

Esquema de Resolução do
Exame de Teoria das Categorias de 20/07/2005

1. Na categoria $\mathcal{PConj}$ dos conjuntos pontuados e das funções que preservam o ponto base, descreva

- (a) Objecto zero.
- (b) Monomorfismos.
- (c) O produto e o coproduto de $(\mathbb{N}, 1)$ por $(\mathbb{Z}, 0)$.
- (d) Uma subcategoria não trivial.
- (e) Uma categoria equivalente, mas não isomorfa, a $\mathcal{PConj}$.

1.(a) $(\star, \{\star\})$ é objecto zero visto ser simultaneamente objecto terminal e objecto inicial. De facto existe um só morfismo t em $\mathcal{PConj}$ de (X, x_0) em $(\star, \{\star\})$ que é definido por $t(x) = \star$ para todo o $x \in X$. Também existe um só morfismo i em $\mathcal{PConj}$ de $(\star, \{\star\})$ para (X, x_0) definido por $i(\star) = x_0$, por definição de morfismo nesta categoria.

(b) Dado $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$

f é uma função injectiva $\Rightarrow f$ é monomorfismo.

Dados $u, v : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ se $f \cdot u = f \cdot v$ então $f(u(z)) = f(v(z))$ para todo o $z \in Z$. Logo, pela injectividade do f vem que $u(z) = v(z)$ para todo o $z \in Z$, o que significa que $u = v$.

f é monomorfismo $\Rightarrow f$ uma função injectiva.

Se $f(x) = f(x')$ então para $u, v : (\{0, 1\}, 0) \rightarrow (X, x_0)$ definidos por $u(1) = x, u(0) = x_0$ e $v(1) = x', v(0) = x_0$ temos que $f \cdot u = f \cdot v$. Como f é monomorfismo vem que $u = v$ portanto $x = x'$. Logo f uma função injectiva.

(c) O produto de $(\mathbb{N}, 1)$ por $(\mathbb{Z}, 0)$ é $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, (1, 0))$ com as projecções usuais visto serem funções que preservam o ponto de base: $p_{\mathbb{N}}((1, 0)) = 1$ e $p_{\mathbb{Z}}((1, 0)) = 0$. De facto, se $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{N}, 1)$ e $g : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$ então existe um único morfismo $h : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, (1, 0))$ tal que $p_{\mathbb{N}} \cdot h = f$ e $p_{\mathbb{Z}} \cdot h = g$: é exactamente o morfismo definido por $h(x) = (f(x), g(x))$.

O coproduto de $(\mathbb{N}, 1)$ por $(\mathbb{Z}, 0)$ é a reunião disjunta $\mathbb{N} \uplus \mathbb{Z}$ identificando 1 e 0, ou seja é o conjunto quociente $\mathbb{N} \uplus \mathbb{Z} / \sim$ sendo $\sim$ a menor relação de equivalência que contém o par $(1, 0)$, tendo como ponto assinalado a classe $[1] = [0] = \{0, 1\}$ (todas as outras classes são conjuntos singulares: $[n] = \{n\}$), com as inclusões evidentes $i_{\mathbb{N}}(n) = [n]$ e $i_{\mathbb{Z}}(n) = [n]$.

Dados $f : (\mathbb{N}, 1) \rightarrow (X, x_0)$ e $g : (\mathbb{Z}, 0) \rightarrow (X, x_0)$ existe um único morfismo $h : \mathbb{N} \uplus \mathbb{Z} / \sim \rightarrow (X, x_0)$...

(d) Exemplos (basta um + justificação):

- a subcategoria dos conjuntos pontuados finitos e dos morfismos entre eles;
- a subcategoria dos conjuntos pontuados e dos monomorfismos;
- a subcategoria dos conjuntos pontuados e dos epimorfismos.

(e) A categoria das funções parciais $\mathcal{Pfn}$ porque podemos definir funtores F e G (ver apontamentos) tais que $F \cdot G = Id$ e $G \cdot F$ naturalmente isomorfo mas diferente da identidade. De facto...

2. Defina e dê um exemplo de

- (a) Colimite
- (b) Categoria de funtores $\mathcal{Conj}^{\mathcal{D}}$
- (c) Functor representável.

2. Ver apontamentos.

3. Prove que

- (a) Se g tem inverso à direita então g é um epimorfismo regular. Enuncie o dual.

3. (a) Dado $g : A \rightarrow B$, se existe um morfismo f tal que $g \cdot f = 1_B$ então g é um epimorfismo: se $u \cdot g = v \cdot g$ então $u = u \cdot g \cdot f = v \cdot g \cdot f = v$.

Além disso $g = co - ig(1_A, f \cdot g)$ porque

1. $g \cdot 1_A = g \cdot f \cdot g$;
2. Se $h \cdot 1_A = h \cdot f \cdot g$ então existe $h' = h \cdot f$ tal que $h' \cdot g = h$ que é o único morfismo a satisfazer essa condição porque g é epimorfismo.

Dual: se g tem inverso à esquerda então ele é monomorfismo regular.

- (b) Numa categoria $\mathcal{C}$ são equivalentes

- (i) $f : A \rightarrow B$ é um monomorfismo;
- (ii) $\mathcal{C}(X, f)$ é injectiva para todo o objecto $X \in \mathcal{C}$.

(b) Como $\mathcal{C}(X, f) : \mathcal{C}(X, A) \rightarrow \mathcal{C}(X, B)$ é definida por $\mathcal{C}(X, f)(g) = f \cdot g$ temos que

$$\mathcal{C}(X, f)(u) = \mathcal{C}(X, f)(v) \iff f \cdot u = f \cdot v$$

Portanto (i) $\iff$ (ii).

- (c) Uma categoria com produtos binários e igualizadores tem produtos fibrados.

(c) Ver apontamentos sobre limites.

- (d) O functor $G = \text{Conj}(\mathbb{N}, -)$ tem adjunto à esquerda $F = \mathbb{N} \times -$ (Unidade? Co-unidade?) mas F não tem adjunto à esquerda.

(d) Uma forma de provar:

A função $\varepsilon_X : FG(X) = \mathbb{N} \times \text{Conj}(\mathbb{N}, X) \rightarrow X$ definida por $\varepsilon_X(n, f) = f(n)$ para $f \in \text{Conj}(\mathbb{N}, X)$ e $n \in \mathbb{N}$ é universal de F para X . De facto, dada uma função $h : F(Y) = \mathbb{N} \times Y \rightarrow X$ existe uma única função $h' : Y \rightarrow \text{Conj}(\mathbb{N}, X)$ tal que $\varepsilon_X \cdot 1_{\mathbb{N}} \times h' = h$: temos, para cada $y \in Y$, $h'(y) : \mathbb{N} \rightarrow X$ tem de ser definida por $h'(y)(n) = h(n, y)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Portanto a co-unidade é a transformação natural ε . A unidade η vai ter por componente em cada conjunto Y a única função $\eta_Y : Y \rightarrow \text{Conj}(\mathbb{N}, \mathbb{N} \times Y)$ tal que

$$\varepsilon_{FY} \cdot F(\eta_Y) = 1_{FY}.$$

Daí se conclui que $\eta_Y : Y \rightarrow \text{Conj}(\mathbb{N}, \mathbb{N} \times Y)$ faz corresponder a cada $y \in Y$ a função $\eta_Y(y) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times Y$ definida por $\eta_Y(y)(n) = (n, y)$.

- (e) Se o functor $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma equivalência de categorias então H é fiel e pleno.

(e) Seja $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ um functor, $\alpha : Id_{\mathcal{A}} \rightarrow FH$ e $\beta : HF \rightarrow Id_{\mathcal{B}}$ isomorfismos naturais. Dados $f, g : A \rightarrow A'$ tais que $H(f) = H(g)$ em $\mathcal{B}$ então

$$\alpha_{A'} \cdot f = FH(f) \cdot \alpha_A = FH(f') \cdot \alpha_A = \alpha_{A'} \cdot f'$$

o que implica que $f = f'$ visto que $\alpha_{A'}$ é isomorfismo. Portanto H é fiel.

De forma análoga se prova que F é fiel.

Dado um morfismo $g : H(A) \rightarrow H(A')$ em $\mathcal{B}$ então $f = \alpha_{A'}^{-1} \cdot F(g) \cdot \alpha_A$ é um morfismo da categoria $\mathcal{A}$ e, como

$$FH(f) \cdot \alpha_A = \alpha_{A'} \cdot f = F(g) \cdot \alpha_A,$$

vem que $H(f) = g$ (α_A é isomorfismo e F é fiel), o que prova que H é pleno.