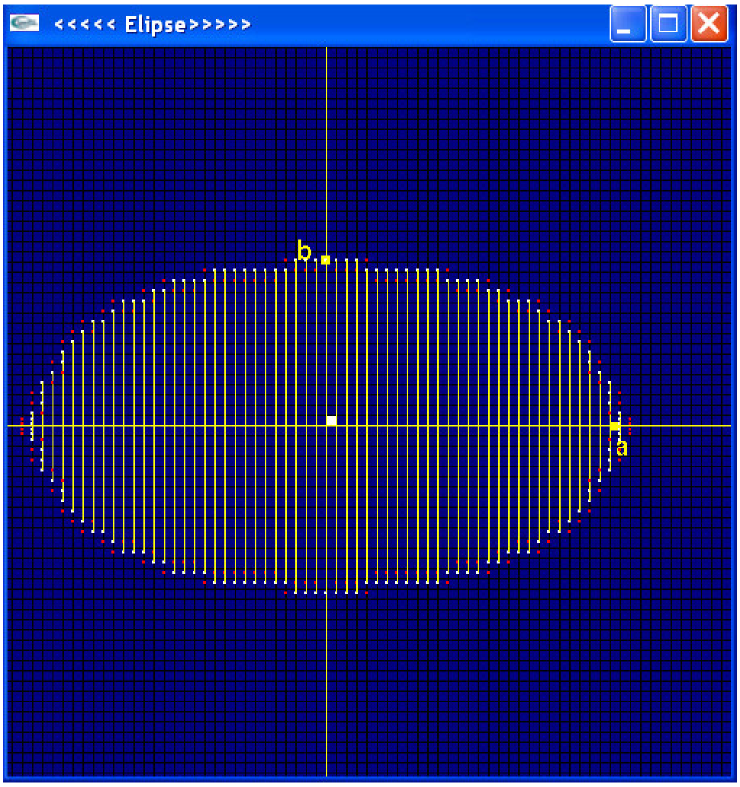
UNIVERSIDADE DE COIMBRA - FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALGORITMO DO PONTO MÉDIO PARA A RASTERIZAÇÃO DA ELIPSE



Trabalho realizado por:

Augusto Bruno Rodrigues Pinho / Sara Margarida Gaspar Silva

OBJECTIVO:

O presente trabalho tem por objectivo ilustrar o funcionamento do ponto médio para a rasterização da elipse, usando uma grelha configurável (a dimensão da quadrícula individual poderá ser re-definida pelo utilizador) que representa amplificadamente um dispositivo raster[1]. O centro da elipse, bem como os seus eixos são dados pelo utilizador através de actuação no rato.

ALGORITMOS DE CONVERSÃO MATRICIAL

O traçado de primitivas gráficas elementares, como segmentos de recta ou arcos de circunferência elipses, requer a construção de algoritmos capazes de determinar na matriz de pixels da superfície de exibição quais pixels devem ser alterados de forma a simular-se a aparência do elemento gráfico desejado. Estes algoritmos recebem o nome de *Algoritmos de Conversão Matricial*, por converterem em representação matricial elementos gráficos expressos em uma representação vectorial.

[1] Um TRC (Raster) pode ser considerado como uma matriz de pontos discretos, não é possível traçar diretamente uma linha unindo ponto a ponto. O processo de descrever da melhor maneira possível a linha encontrando as melhores aproximações é chamado de rasterização. Para linhas horizontais, verticais ou inclinadas 45º, o processo não acusa problemas. Para outras linhas, será necessário decidir
que pixel será usado.

ALGORITMO DO PONTO MÉDIO PARA A RASTERIZAÇÃO DA ELIPSE

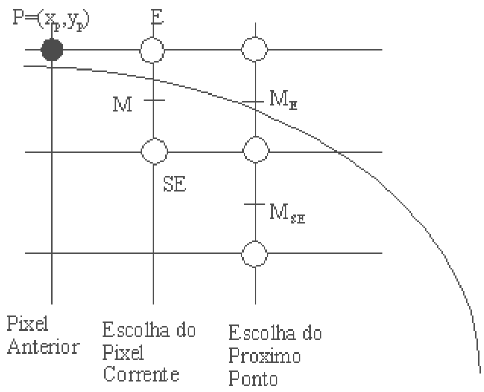
O algoritmo do ponto médio para a elipse arreda erros de arredondamento, evitando o cálculo de funções trigonométricas, revelando-se mais eficiente.

Seja

$$F(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

a função implícita da elipse de centro na origem e focos a , b.

A ideia do algoritmo do ponto médio para a elipse consiste no seguinte:



Assumindo que o pixel que acabou de ser selecionado é P, em (x_p,y_p), e o próximo deve ser escolhido entre o pixel à direita (pixel E) e o pixel acima à direita (SE). Seja M o ponto intermediário entre os pixels E e SE. O que se faz é observar de que lado da "curva" está o ponto M.

Se

- $F(x,y)=0$, o ponto M esta sobre a elipse;
- $F(x,y)>0$ neste caso o ponto intermédio ("ponto médio", M) entre os pixels E e SE está fora da elipse, o pixel SE é escolhido, porque está mais próximo dela.
- $F(x,y)<0$ o ponto está M esta dentro da elipse então o pixel E é escolhido

Atendendo á simetria horizontal e vertical da elipse, definido o primeiro quadrante podemos facilmente traçar os restantes, através da função:

```
void pontos_simetricos (int x, int y, int xc, int yc)
{  desenha_ponto (xc + x, yc + y);
   desenha_ponto (xc - x, yc + y);
   desenha_ponto (xc + x, yc - y);
   desenha_ponto (xc - x, yc - y);
}
```

É necessário ter algum cuidado na simetria dos pontos, assim é necessário dividir o primeiro quadrante da elipse em duas regiões, a região 1 e a região 2.

DIVISÃO EM DUAS REGIÕES:

O limite entre as duas regiões é o ponto da curva cuja tangente tem inclinação igual a -1. Para tal utilizaremos o vector *gradiente* que é perpendicular à tangente à curva no ponto *P*, definido como:

$$Gradiente\, F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j = 2b^2 x\, i + 2a^2 y\, j$$

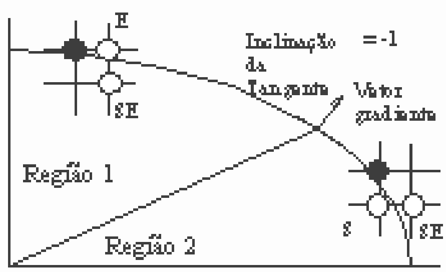
O limite entre as duas regiões é o ponto cuja inclinação da curva é -1, e este ponto ocorre quando o vector gradiente tem inclinação igual a 1, isto é, quando os componentes nas direcções **i** e **j** são iguais. A componente **j** do gradiente é maior do que a **i** na região 1, e vice-versa na região 2.

Assim, se

Se o próximo ponto médio é M=$(x_p + 1, y_p - ½)$, e (componente **j** do gradiente é maior do que a **i**)

$$a^2\,(y_p - ½) > b^2\,(x_p + 1)$$

estamos na região 1



Temos então que considerar 2 situações separadamente, a 1º região e a 2º região.

1º REGIÃO

Para o teste do ponto médio, basta calcular

$$F(M) = F(x_p + 1, y_p - 1/2)$$

e verificar o seu sinal.

Como a decisão será tomada com base no valor da função no ponto $(x_p + 1, y_p - 1/2)$, definimos uma "variável de decisão"

$$d = b^2\left(x_p + 1\right)^2 + a^2\left(y_p - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2b^2$$

- Se $d > 0$, escolhemos o pixel NE,
- Se $d < 0$, escolhemos o pixel E;
- Se $d = 0$ pode-se escolher qualquer um deles, por exemplo E.

Note-se que M e d dependem da escolha de E ou se SE.

- Se E for escolhido, M é incrementado[2] de i na direção x. Assim,

$$d_{novo} = F\left(x_p + 1 + i, y_p - \frac{1}{2}\right) = b^2\left(x_p + 1 + i\right)^2 + a^2\left(y_p - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2b^2$$

com,

$$d_{velho} = b^2\left(x_p + 1\right)^2 + a^2\left(y_p - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2b^2$$

Subtraindo a d_{novo} , d_{velho} obtemos a diferença incremental,

$$d_{novo} - d_{velho} = b^2\left(2ix_p + 3i\right)$$

Para i=1 temos,

$$d_{novo} - d_{velho} = b^2\left(2x_p + 3\right)$$

[2] Estamos a considerar que o primeiro incremento é 1 passando depois a ser um incremento genérico.

- Se NE é escolhido, incrementamos x i e a y decrementamos i.
  Portanto,

  $$d_{novo} = F\left(x_p + 1 + i, y_p - \frac{1}{2} - i\right) = b^2\left(x_p + 1 + i\right)^2 + a^2\left(y_p - \frac{1}{2} - 1\right)^2 + a^2b^2$$

  Subtraindo a d_{novo} , d_{velho}, tem-se

  $$d_{novo} - d_{velho} = b^2\left(2ix_p + 3i\right) + a^2\left(-2iy_p + 2i + i^2\right)$$

  Para i=1 temos

  $$d_{novo} - d_{velho} = b^2\left(2x_p + 3\right) + a^2\left(-2y_p + 3\right)$$

2º REGIÃO

Para a região 2, seja P o pixel considerado, então a variável de decisão para a região 2, é

$$F(x_p+½, y_p-1)$$

isto é, o ponto médio entre *S* e *SE*,

$$d = b^2\left(x_p + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2\left(y_p - 1\right)^2 + a^2b^2$$

- Se $d > 0$, escolhemos o pixel SE,
- Se $d < 0$, escolhemos o pixel E;
- Se $d = 0$ pode-se escolher qualquer um deles, por exemplo E.

  - Se escolhermos NE vamos incrementar x i unidades e a y decrementamos i unidades assim,

  $$d_{novo} = F\left(x_p + \frac{1}{2} + i, y_p - 1 - i\right) = b^2\left(x_p + \frac{1}{2} + i\right)^2 + a^2\left(y_p - 1 - i\right)^2 + a^2b^2$$

  $$d_{velho} = b^2\left(x_p + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2\left(y_p - 1\right)^2 + a^2b^2$$

  Subtraindo a d_{novo} de d_{velho} obtemos a diferença incremental,

  $$d_{novo} - d_{velho} = b^2\left(2ix_p + i^2 + i\right) + a^2\left(-2iy_p + 2i + i^2\right)$$

  Para i=1 temos,

  $$d_{novo} - d_{velho} = b^2\left(2x_p + 2\right) + a^2\left(-2y_p + 3\right)$$

- Se E é escolhido, decrementamos y i unidades,

$$d_{novo} = F\left(x_p + \frac{1}{2}, y_p - 1 - i\right) = b^2\left(x_p + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2\left(y_p - 1 - i\right)^2 + a^2b^2$$

Subtraindo d_{old} de d_{new}, tem-se

$$d_{novo} - d_{velho} = a^2\left(-2iy_p + 2i + i^2\right)$$

Para i=1 temos

$$d_{novo} - d_{velho} = a^2\left(-2y_p + 3\right)$$