Carlos Tenreiro

Apontamentos de Medida e Integração

Coimbra, 2000

Versão de Dezembro de 2004

Nota prévia

Os presentes apontamentos têm por base o curso de Medida e Integração leccionado no primeiro semestre dos anos lectivos de 1998/99, 1999/00 e 2000/01, a alunos do Ramo Científico, especialização em Matemática Pura, do terceiro ano da licenciatura em Matemática da Universidade de Coimbra.

Na elaboração deste texto, tal como na leccionação do curso, assumimos, naturalmente, que o estudante tem conhecimentos sólidos sobre as matérias leccionadas nas disciplinas de Álgebra Linear e de Análise Infinitesimal dos dois primeiros anos da licenciatura. De entre estas, realçam-se as relativas ao integral de Riemann, quer num contexto univariado quer multivariado. No entanto, como a abordagem ao integral de Riemann seguida nessas disciplinas de Análise, privilegia a vertente calculatória em detrimento duma construção rigorosa da entidade matemática, opção essa a que não é estranha a morosidade desta última abordagem, apresentamos num capítulo preliminar, mas de forma muito sucinta, as diversas etapas da construção do integral de Riemann em $\mathbb{R}^d$ bem como os principais resultados e limitações deste integral.

No presente texto, surgem também tópicos, como os do teorema da representação de Riesz em L^p, do teorema da diferenciação de Lebesgue, ou da transformada de Fourier de medidas finitas em $\mathbb{R}^d$, que não foram abordados no curso em qualquer dos anos lectivos referidos.

Carlos Tenreiro

Índice

Capítulo 0

Integral de Riemann e medida de Jordan

Neste capítulo preliminar passamos em revista as noções de integral de Riemann e de medida de Jordan em $\mathbb{R}^d$ *bem como algumas das suas propriedades. Fá-lo-emos de forma muito sucinta. Aconselha-se por isso a consulta das monografias referidas no final deste capítulo.*

0.1 Rectângulos em $\mathbb{R}^d$

Chamamos rectângulo em $\mathbb{R}^d$ a todo o subconjunto de $\mathbb{R}^d$ da forma $A = I_1 \times \ldots \times I_d$ onde, para $i = 1, \ldots, d$, I_i é um intervalo real e limitado, isto é, um intervalo da forma $[a_i, b_i]$, $]a_i, b_i[$, $]a_i, b_i]$ ou $[a_i, b_i[$, com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $a_i < b_i$. O rectângulo A dir-se-á fechado, aberto, semi-aberto à esquerda ou semi-aberto à direita se todos os intervalos I_i forem fechados, abertos, semi-abertos à esquerda, ou semi-abertos à direita, respectivamente. Se as diferenças $b_i - a_i$, para $i = 1, \ldots, d$, não dependerem de i, dizemos que A é um cubo em $\mathbb{R}^d$ de aresta $b_1 - a_1$. Ao número real

$$v(A) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i),$$

chamamos volume do rectângulo A.

Uma partição do rectângulo fechado A é um conjunto P do tipo $P = P_1 \times \ldots \times P_d$, onde cada P_i, para $i = 1, \ldots, d$, é uma partição de $[a_i, b_i]$, isto é, um subconjunto finito de $[a_i, b_i]$ contendo a_i e b_i. Uma partição P do rectângulo fechado A determina uma decomposição de A em sub-rectângulos fechados da forma $I_1' \times \ldots \times I_d'$, onde cada I_i' é um subintervalo fechado da decomposição que P_i determina em $[a_i, b_i]$. Designaremos por $R(P)$ o conjunto de tais sub-rectângulos.

0.2 Integral duma função definida num rectângulo

Dadas uma função $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ limitada no rectângulo fechado A e P uma partição de A, sejam $m_B(f) = \inf\{f(x) : x \in B\}$ e $M_B(f) = \sup\{f(x) : x \in B\}$, para $B \in R(P)$. Consideremos ainda as somas

$$\underline{s}(f;P) = \sum_{B \in R(P)} m_B(f)v(B) \quad \text{e} \quad \overline{s}(f;P) = \sum_{B \in R(P)} M_B(f)v(B),$$

a que chamamos somas inferior e superior de Darboux, respectivamente. Ao supremo das somas inferiores e ao ínfimo das somas superiores tomados sobre todas as partições de A, chamamos integral inferior e integral superior de f em A e denotá-los-emos por $\underline{\int}_A f dx$ e $\overline{\int}_A f dx$, respectivamente.

Definição 0.2.1 (Riemann) *Dizemos que $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ limitada no rectângulo fechado A é integrável em A se $\underline{\int}_A f dx = \overline{\int}_A f dx$. O valor comum das quantidades anteriores diz-se integral (de Riemann) de f em A e é denotado por $\int_A f(x)dx$.*

0.3 Conjuntos mensuráveis e medida de Jordan

Definição 0.3.1 (Jordan) *Dizemos que um subconjunto limitado E de $\mathbb{R}^d$ é mensurável à Jordan quando tomando-se um rectângulo fechado A que contenha E a função indicatriz em A, $\mathbb{1}_E : A \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in A - E \end{cases}$$

é integrável em A. Denotaremos por $J(\mathbb{R}^d)$ a classe de tais conjuntos. Ao número real $v(E) = \int_A \mathbb{1}_E(x)dx$ chamamos volume de E.

Um subconjunto limitado E de $\mathbb{R}^d$ é assim mensurável à Jordan quando e só quando $\sup_P \sum_{B \in R(P): B \subset E} v(B) = \inf_P \sum_{B \in R(P): B \cap E \neq \emptyset} v(B)$, ou, por outras palavras, o "volume interior de E" é igual ao "volume exterior de E". Assim, o volume de E não é mais de que o valor comum dos volumes interior e exterior de E.

Os conjuntos mensuráveis à Jordan podem ser caracterizados a partir da respectiva fronteira. Uma tal caracterização baseia-se na noção de conjunto de medida de Lebesgue nula. Dizemos que um subconjunto M de $\mathbb{R}^d$ tem medida de Lebesgue nula se para todo o $\epsilon > 0$ existirem rectângulos fechados $A_1, A_2, \ldots$ em $\mathbb{R}^d$ tais que $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} v(A_i) \leq \epsilon$.

Teorema 0.3.2 (de Lebesgue) *Um conjunto limitado $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Jordan sse $fr(E)$ tem medida de Lebesgue nula.*

Conjuntos “simples” podem não ser mensuráveis à Jordan. Por exemplo, o conjunto dos racionais do intervalo $[0,1]$ não é mensurável à Jordan.

A aplicação $v : J(\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty[$ que a cada subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^d$ associa o seu volume diz-se medida de Jordan e satisfaz as propriedades:

v_1) $v(\emptyset) = 0$;

v_2) Para $E_1, E_2, \ldots \in J(\mathbb{R}^d)$, com $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, e $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in J(\mathbb{R}^d)$, tem-se $v\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} v(E_i)$.

Como veremos no Capítulo 2 as propriedades v_1) e v_2) justificam a designação de “medida”.

0.4 Integral duma função definida num mensurável

Definição 0.4.1 *Dizemos que $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ limitada em $E \in J(\mathbb{R}^d)$ é integrável à Riemann em E quando tomando-se um rectângulo fechado A que contenha E a função*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in A - E \end{cases}$$

for integrável em A. Neste caso, o integral de f em E, que denotamos por $\int_E f(x)dx$, é dado por $\int_A \bar{f}(x)dx$.

Teorema 0.4.2 (de Lebesgue) *$f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ limitada em $E \in J(\mathbb{R}^d)$ é integrável à Riemann em E sse o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida de Lebesgue nula.*

Um exemplo clássico duma função não integrável à Riemann é o da função de Dirichelet definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = 1$, se x é racional, e $f(x) = 0$, se x é irracional.

Teorema 0.4.3 *Sejam $f, g : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ limitadas e integráveis em $E \in J(\mathbb{R}^d)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

a) $f + g$ é integrável e $\int_E (f+g)(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$;

b) αf é integrável e $\int_E (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx$;

c) Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in E$, então $\int_E f(x)dx \geq 0$;

d) $|f|$ é integrável e $|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f|(x)dx$.

Notemos que a integrabilidade de $|f|$ não implica a de f. A função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se x é racional, e $f(x) = -1$, se x é irracional, não é integrável mas o seu módulo é-o.

0.5 Cálculo de integrais múltiplos: Teorema de Fubini

No caso real, o cálculo do integral duma função limitada e integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é habitualmente efectuado utilizando o teorema fundamental do cálculo: Se f é limitada e integrável, e possui uma primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, isto é, se existe F diferenciável com $F' = f$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

No caso multivariado, o cálculo do integral duma função definida num rectângulo $A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ pode reduzir-se ao cálculo de dois integrais, um sobre A e o outro sobre B. A aplicação sucessiva duma tal regra permite-nos concluir que o integral duma função real de n variáveis se reduz ao cálculo de n integrais simples.

Teorema 0.5.1 (de Fubini) *Seja $f : A \times B \to \mathbb{R}$ integrável com $A \subset \mathbb{R}^p$ e $B \subset \mathbb{R}^q$ rectângulos fechados. Para $x \in A$ e $y \in B$ sejam $f_x : B \to \mathbb{R}$ e $f^y : A \to \mathbb{R}$ as secções de f em x e y definidas por $f_x(y) = f_y(x) = f(x, y)$, respectivamente. Então*

$$\begin{aligned}\int_{A\times B} f d(x,y) &= \int_A \Big(\underline{\int}_B f_x(y)dy\Big)dx = \int_A \Big(\overline{\int}_B f_x(y)dy\Big)dx \\ &= \int_B \Big(\underline{\int}_A f^y(x)dx\Big)dy = \int_B \Big(\overline{\int}_A f^y(x)dx\Big)dy.\end{aligned}$$

Em particular, se f é contínua em $A \times B$, as suas secções são contínuas e a fórmula anterior reduz-se a

$$\int_{A\times B} f d(x,y) = \int_A \Big(\int_B f_x(y)dy\Big)dx = \int_B \Big(\int_A f^y(x)dx\Big)dy.$$

A extensão do resultado anterior a domínios mensuráveis à Jordan não rectangulares é simples. Notemos que a existência de algum dos integrais iterados de f não implica a integrabilidade de f. Para $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2y$, se x é irracional, e $f(x, y) = 1$, se x é racional, temos $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y)dy)dx = 1$ mas f não é integrável.

0.6 Integrais paramétricos

Se $f : A \times B \to \mathbb{R}$ é contínua em $A \times B$ com $A \subset \mathbb{R}^p$ e $B \subset \mathbb{R}^q$ rectângulos fechados, o teorema de Fubini garante a integrabilidade do "integral paramétrico" $x \to \int_B f(x, y)dy$. Os resultados seguintes dão conta da continuidade e diferenciabilidade desta função.

Teorema 0.6.1 *Se $f : A \times B \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^p$ e $B \subset \mathbb{R}^q$ rectângulos fechados, é contínua então $x \to \int_B f(x, y)dy$, para $x \in A$, é uma função contínua.*

Teorema 0.6.2 (Regra de Leibniz) *Seja $f : A \times B \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^p$ e $B \subset \mathbb{R}^q$ rectângulos fechados, contínua com derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ contínua em $A \times B$, para algum $i \in \{1, \ldots, p\}$. Então $x \to \int_B f(x,y)dy$, para $x \in A$, admite derivada parcial contínua em ordem a x_i e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\int_B f(x,y)dy\Big) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)dy.$$

0.7 Um teorema de convergência

O limite (simples) duma sucessão de funções integráveis à Riemann não é necessariamente integrável à Riemann mesmo que uma tal sucessão seja uniformemente limitada. É esse o caso da sucessão

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r_k, k = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{se } x \in [a,b]\backslash\{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases}$$

onde $r_1, r_2, \ldots$ é uma enumeração dos racionais do intervalo $[a,b]$. (f_n) é uma sucessão crescente de funções integráveis à Riemann em $[a,b]$ com $\int_a^b f_n(x)dx = 0$ e $\lim f_n(x) = f(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, onde f é a função de Dirichelet que sabemos não ser integrável à Riemann.

A integrabilidade da função limite é preservada se a convergência for uniforme. Recordemos que uma sucessão de funções (f_n) de $A \subset \mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$ <u>converge uniformemente para f em $B \subset A$</u>, se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in B\ \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Teorema 0.7.1 *Se uma sucessão de funções integráveis $f_n : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definidas em A J-mensurável, convergir uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}$, então f é integrável à Riemann e*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

0.8 Integral impróprio de Riemann

A noção de integral de Riemann duma função $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ exige, à partida, que sejam satisfeitas duas condições: o domínio de integração E deve ser mensurável à Jordan (sendo em particular limitado) e f é limitada em E.

Vejamos agora como podemos extender a noção de integral de Riemann a um conjunto mais vasto funções. Comecemos pelas funções não-negativas.

Definição 0.8.1 *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ uma função definida num domínio E para o qual existe uma sucessão $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ em $J(\mathbb{R}^d)$ com $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ sendo f limitada e* *integrável em cada* E_i, $i = 1, 2, \ldots$. *Chamamos* <u>*integral impróprio de* f *em* E</u> *ao limite* $\int_E f(x)dx = \lim_{i\to+\infty} \int_{E_i} f(x)dx$ *(possivelmente* $+\infty$*).*

A escrita duma função $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ como diferença de duas funções não--negativas, $f = f^+ - f^-$, onde $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ e $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ para $x \in \mathbb{R}^d$, permite-nos generalizar a noção de integral impróprio para funções cujo sinal não é constante.

Definição 0.8.2 *Seja* $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *uma função definida num domínio* E *nas condições da definição anterior. Dizemos que* <u>f *é integrável em* E *(sentido impróprio)*</u> *se* $\int_E f^+(x)dx < +\infty$ *e* $\int_E f^-(x)dx < +\infty$. *O* <u>*integral impróprio de* f *em* E</u> *é dado por* $\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$.

Se f é limitada e integrável à Riemann em $E \in J(\mathbb{R}^d)$, então f é integrável no sentido impróprio e os integrais próprio e impróprio coincidem. As propriedades do integral de Riemann apresentadas no Teorema 0.4.3 valem para o integral impróprio.

0.9 Insuficiências do integral de Riemann

Até finais do século XIX a utilização do integral de Riemann foi revelando algumas insuficiências que não permitiam uma utilização satisfatória deste instrumento matemático:

— Funções muito simples podem não ser integráveis à Riemann (caso, por exemplo, da função de Dirichelet definida em §0.4).

— Para uma função integrável à Riemann no rectângulo $[a, b] \times [c, d]$ a fórmula clássica $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx$ não é verdadeira pois um dos integrais simples do segundo membro pode não ter sentido à Riemann. Tal é o caso da função $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 0$, se $x \neq 1/2$, e $f(x, y) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(y)$, se $x = 1/2$.

— A mais importante limitação do integral de Riemann tem a ver com as operações de passagem ao limite. Podemos ter uma sucessão (f_n) de funções integráveis e "bem comportadas" em $[a, b]$ com $\lim f_n(x) = f(x)$, para todo o ponto $x \in [a, b]$, e no entanto a igualdade $\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ não ser válida (ver §0.7).

As insuficiências anteriores foram finalmente superadas com a introdução duma nova noção de integral devida a Lebesgue. O ponto de partida de Lebesgue é a noção de medida introduzida por Emile Borel em 1898. Seguindo esta mesma abordagem, desenvolveremos nos próximos capítulos a teoria geral da medida e integração à Lebesgue. O integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ surgirá como caso particular dessa teoria geral.

0.10 Bibliografia

CHAE, S.B. (1980). *Lebesgue Integration*, Marcel Dekker, New York.

DIEUDONNÉ, J. (1978). Intégration et mesure, In: *Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900*, Vol. 2, Hermann, Paris.

GOMES, R.L., BARROS, L. (1946). *Teoria Geral da Medida: Medida à Jordan*, Cadernos de Análise Geral 2-5, Junta de Investigação Matemática, Porto.

LIMA, E.L. (1989). *Curso de Análise*, Vol. 2, 3^aed., IMPA, Rio de Janeiro.

WEINHOLTZ, A.B. (1996). *Integral de Riemann e de Lebesgue em* $\mathbb{R}^n$, Textos de Matemática, Universidade de Lisboa.

Capítulo 1

Conjuntos e classes de conjuntos

Neste capítulo estudamos determinadas classes de subconjuntos dum conjunto arbitrário X que desempenharão um papel fundamental na primeira parte do curso. Relevo particular será dado às noções de σ-anel gerado por uma classe e de σ-álgebra de Borel.

1.1 Operações com conjuntos

Com o intuito principal de fixar notação, referimos neste parágrafo algumas operações com conjuntos que usaremos durante o curso. Todas elas, com excepção possivelmente da noção de limite duma sucessão de conjuntos, são já do nosso conhecimento tendo sido usadas no capítulo preliminar anterior.

Salvo indicação em contrário, denotaremos por X um conjunto arbitrário não-vazio e por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X, isto é, o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Chamaremos classe a um qualquer conjunto de subconjuntos de X. Uma classe é assim um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ (a palavra "classe" tem, em algumas abordagens à teoria dos conjuntos, um significado distinto do que aqui lhe atribuímos).

Dados $A, B \in \mathcal{P}(X)$ denotaremos por $A \cap B$ ou AB a intersecção de A e B, e por $A \cup B$ a reunião de A e B. Sendo A e B disjuntos, i.e., $A \cap B = \emptyset$, a reunião de A e B é também denotada por $A + B$.

O complementar de A é denotado por A^c e a diferença entre A e B é denotada por $A - B = A \cap B^c$. Se B está contido em A, $B \subset A$, a diferença $A - B$ diz-se própria. Ao conjunto $A \triangle B = (A - B) + (B - A)$ chamamos diferença simétrica de A e B.

Dada uma família $A_i, i \in I$, de subconjuntos de X indexada por um conjunto arbitrário I, denotaremos por $\bigcap_{i \in I} A_i$ a sua intersecção e por $\bigcup_{i \in I} A_i$ a sua reunião. Sendo os conjuntos $A_i, i \in I$, disjuntos dois a dois, i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo o $i \neq j$, a sua reunião é também denotada por $\sum_{i \in I} A_i$.

A intersecção, a reunião e a complementação estão relacionadas pelas leis de De Morgan:

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{e} \quad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Se (A_n) é uma sucessão de subconjuntos de X, chamamos <u>limite inferior</u> da sucessão ao conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \equiv \liminf A_n,$$

e <u>limite superior</u> da sucessão ao conjunto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \equiv \limsup A_n.$$

Notemos que $\liminf A_n$ é o conjunto dos pontos $x \in X$ que pertencem a todos os A_n com excepção dum número finito deles, enquanto que $\limsup A_n$ é o conjunto dos pontos x que pertencem a uma infinidade de conjuntos A_n (ver Exercício 1.5.3). Por isso, o conjunto $\limsup A_n$ é também denotado por A_n *i.o.* (do inglês, *infinitely often*).

Sempre que $\limsup A_n = \liminf A_n$, dizemos existe o <u>limite da sucessão</u> (A_n). Um tal limite, que denotaremos por $\lim A_n$, é definido por $\lim A_n = \limsup A_n = \liminf A_n$.

A sucessão (A_n) diz-se <u>crescente</u> se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e <u>decrescente</u> se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso indicaremos $(A_n)\uparrow$ e no segundo $(A_n)\downarrow$. Diz-se <u>monótona</u> uma sucessão que é crescente ou decrescente. Sendo (A_n) crescente, vale a igualdade $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Se (A_n) é decrescente, temos $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

1.2 Classes de conjuntos

No que se segue, denotamos por $\mathcal{C}$ uma classe não-vazia de subconjuntos de X.

$\mathcal{C}$ diz-se um <u>semi-anel</u> se é estável para a intersecção finita (se $A, B \in \mathcal{C}$ então $A \cap B \in \mathcal{C}$; dizemos neste caso que $\mathcal{C}$ é um <u>π-sistema</u>), e se dados $A, B \in \mathcal{C}$ então $A - B = \sum_{i=1}^{m} C_i$ para algum $m \in \mathbb{N}$ e $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ diz-se um <u>anel</u> se é estável para a reunião finita (se $A, B \in \mathcal{C}$ então $A \cup B \in \mathcal{C}$) e para a diferença (se $A, B \in \mathcal{C}$ então $A - B \in \mathcal{C}$).

$\mathcal{C}$ diz-se um <u>σ-anel</u> se é estável para a diferença e para a reunião numerável (se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$).

Notemos que se $\mathcal{C}$ é um semi-anel então $\emptyset \in \mathcal{C}$. Além disso, um anel é um semi-anel ($A\cap B = A\cup B-((A-B)+(B-A))$) e um σ-anel é um anel ($A\cup B = A\cup B\cup\emptyset\cup\cdots$). Um σ-anel é ainda estável para a intersecção numerável ($\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 - \bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_1 - A_i)$).

Um σ-anel (resp. semi-anel, anel) que contenha X diz-se uma σ-álgebra (resp. semi-álgebra, álgebra).

Uma classe $\mathcal{C}$ diz-se monótona se é estável para os limites monótonos (se (A_n) é monótona então $\lim A_n \in \mathcal{C}$). Uma classe monótona que contenha X e seja estável para a diferença própria (se $A, B \in \mathcal{C}$ e $B \subset A$ então $A - B \in \mathcal{C}$), diz-se um d-sistema (ou sistema de Dynkin).

Uma σ-álgebra é um d-sistema e um σ-anel é uma classe monótona.

Exemplos: 1. $\{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$ são σ-álgebras.

2. A classe $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ definida por $\mathcal{C} = \{]a, b] : -\infty < a \leq b < +\infty\}$, é semi-anel (ver Exercício 1.5.9). A classe $\mathcal{S}$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ obtidos por reunião finita de elementos de $\mathcal{C}$ é anel.

3. A classe $\mathcal{C}$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que admitem uma das formas $]-\infty, a]$, $]a, b]$ ou $]b, +\infty[$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é semi-anel mas não é anel. A classe $\mathcal{S}$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ obtidos por reunião finita de elementos de $\mathcal{C}$ é álgebra.

4. Sejam X infinito e $\mathcal{C}$ a classe de todos os subconjuntos A de X tais que A ou A^c é finito. $\mathcal{C}$ é álgebra mas não é σ-álgebra.

1.3 σ-anel gerado por uma classe

Veremos de seguida que a partir duma classe $\mathcal{C}$ de partes de X, é possível construir classes mais "ricas" que gozam das propriedades anteriores. Tal como para conjuntos, definimos a intersecção $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ e a reunião $\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$ duma família de classes $\mathcal{C}_i$, $i \in I$, por $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{C}_i, \text{ para todo o } i \in I\}$ e $\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{C}_i, \text{ para algum } i \in I\}$. Diremos que $\mathcal{C}$ está contida numa classe $\mathcal{D}$ de partes de X se todo o elemento de $\mathcal{C}$ (subconjunto de X) é elemento de $\mathcal{D}$, e indicaremos $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Proposição 1.3.1 *A intersecção duma qualquer família de σ-anéis é um σ-anel.*

Proposição 1.3.2 *Se Ψ é a família de todos os σ-anéis de partes de X que contêm $\mathcal{C}$, então $\bigcap_{B \in \Psi} B$, é o menor (no sentido da inclusão) σ-anel que contém $\mathcal{C}$. Um tal σ-anel, que denotaremos por $s(\mathcal{C})$, diz-se σ-anel gerado pela classe $\mathcal{C}$.*

As proposições anteriores permanecem válidas para todas as classes de conjuntos consideradas atrás. A definição anterior pode assim ser extendida a tais classes. Em particular denotaremos por $\sigma(\mathcal{C})$, $d(\mathcal{C})$ e $m(\mathcal{C})$, a σ-álgebra, d-sistema e classe monótona gerados por $\mathcal{C}$, respectivamente.

Duma forma geral, se $\mathcal{C}$ é uma classe de partes de X, são válidas as inclusões

$$m(\mathcal{C}) \subset d(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C}) \quad \text{e} \quad m(\mathcal{C}) \subset s(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

Sob certas condições sobre a classe $\mathcal{C}$ são também válidas as inclusões contrárias.

Teorema 1.3.3 (de Dynkin) *Se $\mathcal{C}$ é um π-sistema então $d(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Demonstração: Atendendo ao Exercício 1.5.8, basta mostrar que $d(\mathcal{C})$ é π-sistema. Para $B \in \mathcal{P}(X)$, consideremos a classe $K(B) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \cap B \in d(\mathcal{C})\}$. Notemos que: i) $A \in K(B)$ sse $B \in K(A)$; ii) $K(B)$ é d-sistema, para $B \in d(\mathcal{C})$; iii) $d(\mathcal{C}) \subset K(A)$, para todo o $A \in \mathcal{C}$ (pois $\mathcal{C}$ é π-sistema); e iv) $\mathcal{C} \subset K(B)$, para todo o $B \in d(\mathcal{C})$. Assim, $d(\mathcal{C}) \subset K(B)$, para todo o $B \in d(\mathcal{C})$, o que permite concluir. $\square$

O resultado seguinte estabelece-se de forma análoga.

Teorema 1.3.4 *Se $\mathcal{C}$ é um anel então $m(\mathcal{C}) = s(\mathcal{C})$.*

Corolário 1.3.5 *Se $\mathcal{C}$ é uma álgebra então $m(\mathcal{C}) = d(\mathcal{C}) = s(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

1.4 σ-álgebras de Borel

Por topologia em X entendemos uma classe T_X de subconjuntos de X, a que chamamos abertos, satisfazendo as seguintes propriedades: T1. O conjunto vazio e o próprio X são abertos; T2. A intersecção finita de abertos é um aberto; T3. A reunião arbitrária de abertos é um aberto. O conjunto X munido duma topologia T_X diz-se um espaço topológico. Os complementares dos conjuntos abertos dizem-se fechados. A classe dos conjuntos fechados satisfaz as seguintes propriedades: F1. O conjunto vazio e o próprio X são fechados; F2. A reunião finita de fechados é um fechado; F3. A intersecção arbitrária de fechados é um fechado.

Um exemplo bem nosso conhecido de espaço topológico é o do conjunto $\mathbb{R}^d$ onde por aberto entendemos todo o subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ tal que para todo o ponto $x \in A$ existe uma bola aberta de centro x contida em A.

Mais geralmente, um espaço métrico, isto é, um conjunto X onde podemos definir uma aplicação, d, dita distância, que a cada par de pontos x e y de X associa um número real $d(x, y)$, dito distância entre x e y, e que satisfaz: D1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ sse $x = y$, D2. $d(x, y) = d(y, x)$, D3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo o $x, y, z \in X$, é também um espaço topológico. A noção de aberto é análoga à de $\mathbb{R}^d$, entendendo-se por bola aberta de centro x e raio $r > 0$ o conjunto dos pontos y de X cujas distâncias a x é inferior a r, isto é, $d(y, x) < r$.

Para $x = (x_1, \ldots, x_d)$ e $y = (y_1, \ldots, y_d)$ em $\mathbb{R}^d$, a aplicação $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2}$ é, como sabemos, uma distância, dita distância euclideana. $\mathbb{R}^d$ munido da distância euclideana é assim um espaço métrico. O conjunto das funções reais e limitadas definidas num subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ munido da distância do supremo $d(f, g) = \sup_{x\in A} |f(x)-$

$g(x)|$, e o conjunto das funções reais e contínuas definidas num subconjunto J-mensurável A de $\mathbb{R}^d$ munido da distância $d(f,g) = \int_A |f(x) - g(x)|dx$, são outros exemplos de espaços métricos.

Sendo X um espaço topológico chamamos σ-álgebra de Borel à σ-álgebra gerada pela classe dos abertos de X. Denotá-la-emos por $\mathcal{B}(X)$. Os seus elementos dizem-se borelianos.

Teorema 1.4.1 *Se $\mathcal{F}$ é a classe de todos os fechados de X então $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{F})$.*

No caso particular em que $X = \mathbb{R}^d$, a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ além de ser gerada pelos abertos de $\mathbb{R}^d$ (e pelos fechados) é também gerada por outras classes de conjuntos. Antes de apresentarmos tais classe necessitamos de obter uma decomposição básica dos abertos de $\mathbb{R}^d$. Se $d = 1$ sabemos que qualquer aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como reunião numerável de rectângulos abertos (intervalos abertos) disjuntos dois a dois (ver Lima, 1995, pg. 132). Um tal resultado falha para $d > 1$. Vale, no entanto, o seguinte resultado.

Teorema 1.4.2 *Todo o aberto de $\mathbb{R}^d$ é reunião numerável (disjunta) de cubos semi--abertos à esquerda.*

Demonstração: Para $k \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{C}_k$ a classe dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ da forma

$$\left\{(x_1,\ldots,x_d) : \frac{j_i}{2^k} < x_i \leq \frac{j_i+1}{2^k}, \text{ para } i = 1,\ldots,d\right\},$$

onde $j_1,\ldots,j_d$ são inteiros. $\mathcal{C}_k$ é uma partição numerável de $\mathbb{R}^d$ constituída por cubos semi-abertos à esquerda. Para $k_1 < k_2$, cada elemento de $\mathcal{C}_{k_2}$ está contido nalgum elemento de $\mathcal{C}_{k_1}$.

Dado um aberto A em $\mathbb{R}^d$, consideremos a classe $\mathcal{D}_1$ de todos os elementos de $\mathcal{C}_1$ contidos em A; a classe $\mathcal{D}_2$ de todos os elementos de $\mathcal{C}_2$ contidos em A que não estão contidos em nenhum elemento de $\mathcal{D}_1$; a classe $\mathcal{D}_3$ de todos os elementos de $\mathcal{C}_3$ contidos em A que não estão contidos em nenhum elemento de $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$; duma forma geral seja $\mathcal{D}_k$ a classe de todos os elementos de $\mathcal{C}_k$ contidos em A que não estão contidos em nenhum elemento de $\bigcup_{n=1}^{k-1} \mathcal{D}_n$. Finalmente, seja $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$.

Mostremos que $A = \bigcup_{B\in\mathcal{D}} B$, o que atendendo à numerabilidade de $\mathcal{D}$ permitirá concluir. Claramente $\bigcup_{B\in\mathcal{D}} B \subset A$. Reciprocamente, sejam $x \in A$ e $C_k(x)$ o elemento de $\mathcal{C}_k$ que contém x. Sendo A aberto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_k(x) \subset A$ para $k \geq k_0$ e $C_k(x) \not\subset A$ para $k < k_0$. Assim $C_{k_0}(x) \in \mathcal{D}_{k_0}$ e $x \in \bigcup_{B\in\mathcal{D}} B$. $\square$

O resultado anterior permanece válido para cubos fechados. No entanto, a reunião deixa de ser disjunta.

Teorema 1.4.3 *A σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$ é gerada por cada uma das classes seguintes classes de conjuntos:*

a) a classe de todos os fechados em $\mathbb{R}^d$;

b) a classe de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ da forma

$$\{(x_1,\ldots,x_d) : x_i \le b\}\,,\ \text{para } i \in \{1,\ldots,d\}\ \text{e } b \in \mathbb{R};$$

c) a classe de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ da forma

$$\{(x_1,\ldots,x_d) : a_i < x_i \le b_i,\ \text{para } i = 1,\ldots,d\}\,,\ \text{para } a_1,\ldots,a_d,b_1,\ldots,b_d \in \mathbb{R}.$$

1.5 Exercícios

1. Sendo A, B e C subconjuntos de X, mostre que:
   (a) $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$;
   (b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;
   (c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
2. Sendo A, B e C subconjuntos de X, mostre que:
   (a) $A \triangle B = B \triangle A$;
   (b) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;
   (c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;
   (d) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$;
   (e) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.
3. Se A e (A_n) são subconjuntos de X, mostre que:
   (a) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;
   (b) $A - \liminf A_n = \limsup(A - A_n)$ e $A - \limsup A_n = \liminf(A - A_n)$;
   (c) $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$ e $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$;
   (d) $\limsup A_n = \{x \in X : \exists\,(n_k) \text{ subsucessão de } (n)\,\forall\, k \in \mathbb{N},\ x \in A_{n_k}\}$
   $= \{x \in X : \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{A_n}(x) = +\infty\}$, e
   $\liminf A_n = \{x \in X : \exists\, n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge n_0,\ x \in A_n\}$
   $= \{x \in X : \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{A_n^c}(x) < +\infty\}$,
   onde, para $B \subset X$, $\mathbb{I}_B$ denota a função indicatriz de B definida por $\mathbb{I}_B(x) = 1$ se $x \in B$ e $\mathbb{I}_B(x) = 0$ se $x \notin B$;
   (e) $\lim A_n = A$ sse $x \in A_n$ para n suficientemente grande, para todo o $x \in A$, e $x \notin A_n$ para n suficientemente grande, para todo o $x \notin A$;
   (f) Se (A_n) é monótona então

$$\lim A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{se } (A_n) \text{ é crescente} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{se } (A_n) \text{ é decrescente.} \end{cases}$$

4. Se $A_n = A$ para n par e $A_n = B$ para n ímpar, onde A e B são subconjuntos de X, mostre que $\liminf A_n = A \cap B$ e $\limsup A_n = A \cup B$.

5. Mostre que se (A_n) é uma sucessão de conjuntos disjuntos dois a dois então $\lim A_n = \emptyset$.

6. Mostre que se (A_n) é uma sucessão em $\mathcal{P}(X)$ então as sucessões (B_n) e (C_n) definidas por $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, para $n \geq 1$ e $C_1 = A_1$ e $C_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, para $n \geq 2$, satisfazem:

   (a) (B_n) é crescente, $A_n \subset B_n$ para todo o $n \geq 1$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

   (b) (C_n) é formada por conjuntos disjuntos dois a dois, $C_n \subset A_n$ para todo o $n \geq 1$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

   (c) Se $(A_n) \subset \mathcal{C}$, com $\mathcal{C}$ um anel de partes de X, então $(B_n) \subset \mathcal{C}$ e $(C_n) \subset \mathcal{C}$.

7. Prove que se $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma classe complementada então $\mathcal{C}$ é estável para a intersecção (finita ou infinita) sse é estável para a reunião.

8. Seja $\mathcal{C}$ uma classe não-vazia de partes de X. Prove que:

   (a) Se $\mathcal{C}$ é semi-anel então $\emptyset \in \mathcal{C}$;

   (b) $\mathcal{C}$ é anel $\iff$ $\mathcal{C}$ é semi-anel estável para a reunião finita
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para reunião finita e diferença própria
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para intersecção finita e diferença simétrica
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para reunião finita disjunta, intersecção finita e diferença própria;

   (c) $\mathcal{C}$ é σ-anel $\iff$ $\mathcal{C}$ é anel estável para a reunião numerável.
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é anel monótono
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para a intersecção finita, diferença própria e reunião numerável disjunta;

   (d) Se $\mathcal{C}$ é semi-álgebra então $\emptyset \in \mathcal{C}$ e $X \in \mathcal{C}$;

   (e) $\mathcal{C}$ é semi-álgebra $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para a intersecção finita, o complementar de qualquer elemento de $\mathcal{C}$ é reunião finita disjunta de elementos de $\mathcal{C}$ e $X \in \mathcal{C}$;

   (f) $\mathcal{C}$ é álgebra $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para a reunião finita e para a complementação
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para a intersecção finita e para a complementação;

   (g) $\mathcal{C}$ é σ-álgebra $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para a reunião numerável e para a complementação
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para a interseção numerável e para a complementação
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é π-sistema e d-sistema
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é álgebra monótona
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é σ-anel e existe uma sucessão $(X_n) \subset \mathcal{C}$ com $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$;

   (h) $\mathcal{C}$ é d-sistema $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para a complementação, para a reunião numerável disjunta e $X \in \mathcal{C}$
   $\iff$ $\mathcal{C}$ é estável para os limites crescentes, para a diferença própria e $X \in \mathcal{C}$.

9. Seja $\mathcal{C}$ a classe de subconjuntos de $\mathbb{R}$ definida por $\mathcal{C} = \{]a, b] : -\infty < a \leq b < +\infty\}$. Denotando por $x \vee y$ e por $x \wedge y$ o máximo e o mínimo entre x e y, respectivamente, mostre que:

   (a) $]a, b] \cap]c, d] =]a \vee c, b \wedge d]$;

   (b) $]a, b] -]c, d] =]a, b \wedge c] \cup]a \vee d, b]$;

(c) $\mathcal{C}$ é um semi-anel de partes de $\mathbb{R}$.

10. Generalize o exercício anterior, mostrando que a classe de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ definida por $\mathcal{C} = \big\{ \prod_{i=1}^d]a_i, b_i] : -\infty < a_i \leq b_i < +\infty, \text{ para } i = 1, \ldots, d \big\}$ é um semi-anel.
11. Sejam X um conjunto não-numerável e $\mathcal{C}$ a classe de todos os subconjuntos finitos ou numeráveis de X. Mostre que $\mathcal{C}$ é σ-anel mas não é σ-álgebra.
12. Seja $\{A_i, i \in I\}$ uma partição numerável de X e $\mathcal{C} = \big\{\bigcup_{i\in J} A_i \,:\, J \subset I\big\}$. Mostre que $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra de partes de X.
13. (**Anel gerado por um semi-anel**) Sejam $\mathcal{C}$ um semi-anel de partes de X e
$$R = \Big\{\sum_{i=1}^{m} C_i : C_i \in \mathcal{C}, i = 1, \ldots, m, \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\Big\}.$$
Mostre que:
    (a) R é um π-sistema estável para a reunião finita disjunta;
    (b) R é estável para a diferença;
    (c) R é estável para a reunião finita;
    (d) $r(\mathcal{C}) = R$, onde $r(\mathcal{C})$ denota o anel gerado por $\mathcal{C}$.
14. Mostre que se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são classes de partes de X então
$$s(\mathcal{C}_1) = s(\mathcal{C}_2) \Longleftrightarrow \mathcal{C}_1 \subset s(\mathcal{C}_2) \text{ e } \mathcal{C}_2 \subset s(\mathcal{C}_1).$$
Verifique que o resultado continua válido para σ-álgebras, d-sistemas e classes monótonas.
15. Sejam $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ uma família de partes de X e denotemos por $s(\mathcal{C}_t, t \in T)$ o σ-anel por ela gerado, isto é, o mais pequeno σ-anel que contém todas as classes $\mathcal{C}_t, t \in T$. Mostre que
$$s(\mathcal{C}_t, t \in T) = s(s(\mathcal{C}_t), t \in T) = s\Big(\bigcup_{t\in T} \mathcal{C}_t\Big).$$
16. Sejam $\mathcal{C}$ uma classe de partes de X e $\mathcal{C} \cap A = \{C \cap A \,:\, C \in \mathcal{C}\}$ com $A \subset X$. Mostre que:
    (a) $s(\mathcal{C} \cap A) = s(\mathcal{C}) \cap A$. (Sugestão: considere a classe $S = \{B \cup (C - A) : B \in s(\mathcal{C} \cap A), C \in s(\mathcal{C})\}$ e mostre que S é um σ-anel que contém $\mathcal{C}$ e $S \cap A = s(\mathcal{C} \cap A)$);
    (b) $\sigma_A(\mathcal{C} \cap A) = \sigma(\mathcal{C}) \cap A$, onde σ_A designa a σ-álgebra gerada em A pela classe indicada.
17. Mostre que a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$ é gerada por cada uma das classes de todos os subconjuntos da forma:
    (a) $\{(x_1, \ldots, x_d) : a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ para } i = 1, \ldots, d\}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d$;
    (b) $\{(x_1, \ldots, x_d) : x_i \leq b_i, \text{ para } i = 1, \ldots, d\}$, $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d$;
    (c) $\{(x_1, \ldots, x_d) : a_i \leq x_i < b_i, \text{ para } i = 1, \ldots, d\}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d$;
    (d) $\{(x_1, \ldots, x_d) : a_i < x_i < b_i, \text{ para } i = 1, \ldots, d\}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d$.

    Verifique que o mesmo se passa se em qualquer das alíneas anteriores $a_i \in \mathbb{Q}$ ou $b_i \in \mathbb{Q}$ para algum $i = 1, \ldots, d$.
18. Sejam E um subconjunto de $\mathbb{R}^d$ e $\mathcal{B}(E)$ a σ-álgebra de Borel de E, isto é, a σ-álgebra de partes de E gerada pela classe $\{E \cap A : A \text{ aberto em } \mathbb{R}^d\}$. Mostre que:
    (a) $\mathcal{B}(E) = E \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;
    (b) Se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ então $\mathcal{B}(E) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : B \subset E\}$.

1.6 Bibliografia

Cohn, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

Fernandez, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

Halmos, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

Lima, E.L. (1995). *Curso de Análise*, Vol. 1, 8^aed., IMPA, Rio de Janeiro.

Capítulo 2

Medidas e prolongamento de medidas

Neste capítulo abordamos os problemas da construção duma medida a partir duma medida exterior, do prolongamento duma medida definida num semi-anel ao σ-anel por ele gerado e do completamento de medidas. Como aplicação, definimos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e estudamos algumas das suas propriedades.

2.1 Funções de conjunto e medidas

Chamamos <u>função de conjunto</u> a toda a função μ definida numa classe $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X com valores em $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Em $\overline{\mathbb{R}}$ consideramos a relação de ordem óbvia com $-\infty$ e $+\infty$ os elementos mínimo e máximo, respectivamente.

Seremos frequentemente conduzidos a operar os elementos de $\mathbb{R}$ com $+\infty$ e $-\infty$. Usaremos para o efeito as seguintes convenções:

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = x + (\pm\infty) = \pm\infty, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x/(\pm\infty) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & x \in]0, +\infty] \\ 0, & x = 0 \\ \mp\infty, & x \in [-\infty, 0[. \end{cases}$$

As operações $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$ e ∞/∞ não estão definidas.

Uma função de conjunto μ diz-se <u>aditiva</u> se para todo o $A, B \in \mathcal{C}$, com $A \cup B \in \mathcal{C}$ e $A \cap B = \emptyset$, a soma $\mu(A) + \mu(B)$ está bem definida e

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B).$$

μ diz-se finitamente aditiva se para toda a classe disjunta $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{C}$, com $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$, a soma $\mu(A_i) + \mu(A_j)$ está bem definida para todo o $i \neq j$ e

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

μ diz-se σ-aditiva ou completamente aditiva se para toda a sucessão de conjuntos disjuntos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$, com $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$, a soma $\mu(A_i) + \mu(A_j)$ está bem definida para todo o $i \neq j$ e

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Uma função de conjunto σ-aditiva é finitamente aditiva se $\emptyset \in \mathcal{C}$. Uma função de conjunto aditiva pode não ser finitamente aditiva.

Se μ é uma função de conjunto aditiva, a soma $\mu(A) + \mu(B)$ está definida para todo par de conjuntos disjuntos A e B em $\mathcal{C}$ cuja reunião esteja em $\mathcal{C}$. Assim, se $\mathcal{C}$ é um anel de partes de X, μ toma apenas um dos valores $+\infty$ ou $-\infty$. Com efeito, se existissem A e B em $\mathcal{C}$ com $\mu(A) = +\infty$ e $\mu(B) = -\infty$, então

$$+\infty = \mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B)$$

e

$$-\infty = \mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A \cap B),$$

o que implica que $|\mu(A \cap B)| < +\infty$. Assim $\mu(A - B) = +\infty$ e $\mu(B - A) = -\infty$, ficando sem sentido a igualdade

$$\mu(A \triangle B) = \mu(A - B) + \mu(B - A).$$

Comentários análogos valem para as outras noções de aditividade.

Durante a primeira parte deste curso, estudamos determinadas funções de conjunto não-negativas a que chamamos medidas (ver §0.3). Mais precisamente:

Definição 2.1.1 *Sendo $\mathcal{C}$ uma classe de subconjuntos de X com $\emptyset \in \mathcal{C}$, chamamos medida em $\mathcal{C}$ a toda a função de conjunto μ, não-negativa e σ-aditiva com $\mu(\emptyset) = 0$. Se $A \in \mathcal{C}$, $\mu(A)$ diz-se medida de A.*

No que se segue, quando dizemos que μ é uma medida em $\mathcal{C}$ admitiremos que $\emptyset \in \mathcal{C}$.

Exemplos: 1. Sejam X um conjunto não-vazio e $x \in X$. A aplicação $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ definida por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

é uma medida em $\mathcal{P}(X)$, dita medida de Dirac no ponto x.

2. A função $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definida por $\mu(A) = \#A$ (:= cardinal de A) se A é finito e $\mu(A) = +\infty$ se A é infinito, é uma medida em $\mathcal{P}(X)$ a que chamamos medida contagem em X. Se $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ a medida contagem pode ser escrita na forma

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{x_i}(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x_i),$$

onde $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ é a função indicatriz de A ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\mathbb{1}_A(x) = 0$ se $x \notin A$). Se nada for dito em contrário, consideramos $\mathbb{1}_A$ definida em todo o espaço X.

3. Sendo $\mathcal{C}$ o semi-anel definido no Exemplo 1.2.2, a função de conjunto $\lambda : \mathcal{C} \to [0, +\infty[$ definida por $\lambda(]a, b]) = b - a$, que coincide em $\mathcal{C}$ com a medida de Jordan, é uma medida em $\mathcal{C}$ (ver Exercício 2.9.4).

De entre todas as medidas, aquelas que sabemos verdadeiramente estudar são as medidas finitas e as medidas σ-finitas. Se μ é uma medida em $\mathcal{C}$, um conjunto $A \in \mathcal{C}$ diz-se de medida finita se $\mu(A) < +\infty$. A medida de A diz-se σ-finita quando existe uma sucessão (A_n) em $\mathcal{C}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Se a medida de todo o conjunto de $\mathcal{C}$ é finita (resp. σ-finita), μ diz-se finita em $\mathcal{C}$ (resp. σ-finita em $\mathcal{C}$). As noções anteriores podem, de forma natural, ser extendidas a funções de conjunto quaisquer.

Finalmente, uma medida definida numa σ-álgebra de partes de X diz-se uma probabilidade se $\mu(X) = 1$.

2.2 Propriedades das medidas

Neste parágrafo obtemos as primeiras propriedades das medidas. No que se segue μ é uma medida num anel $\mathcal{C}$ de partes de X.

Teorema 2.2.1 *Se $A, B \in \mathcal{C}$ com $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonia de μ).*

Demonstração: Como $B = A + (B - A)$, da aditividade e da não-negatividade de μ obtemos $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$. $\square$

Teorema 2.2.2 *Se $A, B \in \mathcal{C}$ com $A \subset B$ e $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B-A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Demonstração: Consequência da igualdade $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$ obtida na demonstração anterior. $\square$

Teorema 2.2.3 *Se $A \in \mathcal{C}$ e $(A_n) \subset \mathcal{C}$ é uma sucessão de conjuntos disjuntos dois a dois com $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$.*

Demonstração: Como $\bigcup_{n=1}^{k} A_n \subset A$, da monotonia e aditividade finita de μ concluímos que $\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \mu(A)$, para todo o $k \in \mathbb{N}$ (reparar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ não está necessariamente em $\mathcal{C}$). $\square$

Teorema 2.2.4 *Se $A \in \mathcal{C}$ e $(A_n) \subset \mathcal{C}$ com $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Em particular, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ (μ é σ-subaditiva ou completamente subaditiva).*

Demonstração: Sendo $\mathcal{C}$ um anel, existe $(B_n) \subset \mathcal{C}$ com $B_n \subset A_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ (cf. Exercício 1.5.6). Como $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A \cap B_n$ e $A \cap B_n \in \mathcal{C}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, obtemos $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. $\square$

Teorema 2.2.5 *Se (A_n) é uma sucessão crescente em $\mathcal{C}$ tal que $\lim A_n \in \mathcal{C}$, então $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$ (continuidade ascendente de μ).*

Demonstração: Definindo $A_0 = \emptyset$, obtemos sucessivamente $\mu(\lim A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - A_{n-1}) = \lim \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n - A_{n-1}) = \lim \mu(\sum_{n=1}^{k}(A_n - A_{n-1})) = \lim \mu(A_k)$. $\square$

Teorema 2.2.6 *Se (A_n) é uma sucessão decrescente em $\mathcal{C}$ com pelo menos um dos seus elementos de medida finita e $\lim A_n \in \mathcal{C}$, então $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$ (continuidade descendente de μ).*

Demonstração: Basta usar a continuidade ascendente de μ relativamente à sucessão $(A_m - A_n)_{n \geq m}$, onde $m \in \mathbb{N}$ é tal que $\mu(A_m) < +\infty$. $\square$

Apresentamos de seguida algumas caracterizações das medidas.

Teorema 2.2.7 *Sendo μ uma função de conjunto, não-negativa e aditiva em $\mathcal{C}$ com $\mu(\emptyset) = 0$, as proposições seguintes são equivalentes:*

i) μ é uma medida;

ii) μ é ascendentemente contínua.

Sendo μ finita, as proposições anteriores são ainda equivalentes a:

iii) μ é descendentemente contínua;

iv) μ é descendentemente contínua em $\emptyset$.

Demonstração: Pelos Teoremas 2.2.5 e 2.2.6, $i) \Rightarrow ii)$ e $i) \Rightarrow iii)$. Como $iii) \Rightarrow iv)$, basta então mostrar que $ii) \Rightarrow i)$ e $iv) \Rightarrow i)$.

$ii) \Rightarrow i)$: Seja (A_n) uma sucessão em $\mathcal{C}$ de conjuntos disjuntos dois a dois tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. A sucessão (B_n) está em

$\mathcal{C}$ e satisfaz $B_n \uparrow A$. Assim, por hipótese e pela aditividade de μ, $\mu(A) = \mu(\lim B_n) = \lim \mu(B_n) = \lim \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

iv) $\Rightarrow$ *i)*: Mantendo a notação anterior, a sucessão $C_n = A - B_n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sucessão decrescente de elementos de $\mathcal{C}$ com $\lim C_n = \emptyset$. Por hipótese, $\lim \mu(C_n) = \mu(\emptyset) = 0$. Para concluir, basta agora notar que, pela aditividade de μ, $\mu(A) = \mu(C_n) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Notemos que se $\mathcal{C}$ é um σ-anel, as propriedades anteriores podem ser enunciadas de forma mais simples visto poderem ser, nesse caso, suprimidas parte das hipóteses. Notemos também que, tendo em conta o Exercício 2.9.8, os Teoremas 2.2.1-2.2.6 valem para $\mathcal{C}$ semi-anel de partes de X, bastando, no caso dos Teoremas 2.2.1-2.2.3, exigir que μ seja finitamente aditiva.

2.3 Medida exterior e medida induzida

Em geral, a definição duma medida num σ-anel de partes dum conjunto não pode ser feita explicitando a medida de cada um dos seus elementos. Exceptuam-se naturalmente casos simples como os considerados nos Exemplos 2.1.1 e 2.1.2 anteriores, ou o caso de medidas definidas à custa de medidas previamente definidas no σ-anel (ver os Exercícios 2.9.5 e 2.9.6).

O método geral para construir medidas que vamos estudar, é baseado na noção de medida exterior que consideramos de seguida. Uma medida exterior é, como veremos, uma função de conjunto definida numa classe não-vazia $\mathcal{H}$ de partes de X que contém todos os subconjuntos de todos os seus elementos, isto é, dados $A \in \mathcal{H}$ e $B \subset A$ então $B \in \mathcal{H}$. Dizemos então que $\mathcal{H}$ é uma classe hereditária. O conjunto vazio pertence a qualquer classe hereditária.

Um exemplo simples duma classe hereditária é a classe $\mathcal{P}(X)$ das partes de X. Notemos que se $\mathcal{H}$ é classe hereditária, então $\mathcal{H} = \mathcal{P}(X)$ se e só se $\mathcal{H}$ contém X. Interessar-nos-emos em particular pelas classes hereditárias que são σ-anéis, a que chamamos σ-anéis hereditários. Facilmente se conclui que uma classe hereditária é um σ-anel se e só se for estável para a reunião numerável. Se $\mathcal{H}$ é um σ-anel hereditário, então $\mathcal{H} = \mathcal{P}(X)$ se e só se $\mathcal{H}$ contém uma sucessão (X_n) tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Passemos então à noção de medida exterior (o Teorema 2.4.2 é esclarecedor no que respeita a esta designação).

Definição 2.3.1 *Uma função de conjunto φ definida num σ-anel herditário $\mathcal{H}$, diz-se uma medida exterior quando:*

a) $\varphi(\emptyset) = 0$;

b) se $A, B \in \mathcal{H}$ com $A \subset B$ então $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ (monotonia);

c) para toda a sucessão (A_n) em $\mathcal{H}$, $\varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$ (subaditividade completa ou σ-subaditividade).

Uma medida exterior é não-negativa, mas não é necessariamente σ-aditiva (considere $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definida por $\varphi(A) = 0$ se $A = \emptyset$ e $\varphi(A) = 1$ se $A \neq \emptyset$). No entanto a σ-subaditividade implica a subaditividade finita. Toda a medida num σ-anel herditário é uma medida exterior.

Sabemos já que uma medida exterior em $\mathcal{H}$ não é necessariamente uma medida em $\mathcal{H}$. No entanto, como veremos de seguida, uma medida exterior φ induz uma medida definida numa adequada subclasse de $\mathcal{H}$.

Definição 2.3.2 (Carathéodory) *Diz-se que $A \in \mathcal{H}$ é $\underline{\varphi\text{-mensurável}}$ se*

$$\varphi(Q) = \varphi(QA) + \varphi(QA^c), \ \text{para todo o } Q \in \mathcal{H}.$$

Como $Q = QA + QA^c$ então se A é φ-mensurável, φ é aditiva na partição de Q por A, para todo o $Q \in \mathcal{H}$. Notemos que como $\mathcal{H}$ é classe herditária, QA e QA^c são elementos de $\mathcal{H}$ visto serem subconjuntos de Q.

O conjunto vazio é φ-mensurável, e se $X \in \mathcal{H}$, X é também φ-mensurável.

Proposição 2.3.3 (critério de φ-mensurabilidade) *Para que $A \in \mathcal{H}$ seja φ-mensurável basta que $\varphi(Q) \geq \varphi(QA) + \varphi(QA^c)$, para todo o $Q \in \mathcal{H}$ com $\varphi(Q) < +\infty$.*

Demonstração: Consequência da subaditividade finita de φ. □

Provamos de seguida que a classe Λ das partes φ-mensuráveis de X é um σ-anel e que a restrição de φ a Λ é uma medida.

Lema 2.3.4 *A classe Λ das partes φ-mensuráveis de $\mathcal{H}$ é um anel de partes de X.*

Demonstração: Dados $A, B \in \Lambda$ e $Q \in \mathcal{H}$, temos sucessivamente $\varphi(Q) = \varphi(QA) + \varphi(QA^c) = \varphi(QAB) + \varphi(QAB^c) + \varphi(QA^cB) + \varphi(QA^cB^c) \geq \varphi(Q(A-B)) + \varphi(Q(AB^c + A^cB + A^cB^c)) = \varphi(Q(A-B)) + \varphi(Q(A-B)^c)$. Λ é assim estável para a diferença. De forma análoga se conclui que Λ é estável para a reunião finita. □

Lema 2.3.5 *Para qualquer sucessão (A_n) de elementos de Λ disjuntos dois a dois e para todo o $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\varphi(Q \sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(QA_i)$, para todo o $Q \in \mathcal{H}$. Além disso, se (B_n) é uma sucessão crescente de elementos de Λ convergente para B, então $\varphi(QB_n) \uparrow \varphi(QB)$, para todo o $Q \in \mathcal{H}$.*

Demonstração: Dados (A_n) de elementos de Λ disjuntos dois a dois e $Q \in \mathcal{H}$, comecemos por provar que $\varphi(QS_k) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(QA_i)$, para todo o $k \in \mathbb{N}$, onde $S_k = \sum_{i=1}^{k} A_i$. Para $k = 1$ a igualdade é verdadeira. Sendo válida para o natural k, ela é também válida para $k+1$, uma vez que $\varphi(QS_{k+1}) = \varphi(QS_{k+1}S_k) + \varphi(QS_{k+1}S_k^c) = \varphi(QS_k) + \varphi(QA_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(QA_i) + \varphi(QA_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(QA_i)$, pois $S_k \in \Lambda$ pelo Lema 2.3.4. Pela monotonia de φ, $\sum_{i=1}^{k} \varphi(QA_i) = \varphi(QS_k) \leq \varphi(Q \sum_{i=1}^{\infty} A_i)$, para todo o $k \in \mathbb{N}$, e então $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(QA_i) \leq \varphi(Q \sum_{i=1}^{\infty} A_i)$. A desigualdade recíproca é consequência da subaditividade completa de φ.

Para obter a segunda parte do lema, basta agora notar que se (B_n) é uma sucessão crescente de elementos de Λ convergente para B, cada B_n pode ser escrito na forma $B_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$, com $A_i = B_i - B_{i-1}$ e $B_0 = \emptyset$, e $B = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. $\square$

Teorema 2.3.6 (da medida induzida por uma medida exterior) *A classe Λ é um σ-anel de partes de X e $\varphi_{|\Lambda}$ é uma medida, dita medida induzida por φ. Além disso, $\varphi_{|\Lambda}$ é completa, isto é, dados $A \in \Lambda$ com $\varphi(A) = 0$ e $B \subset A$ então $B \in \Lambda$.*

Demonstração: Dados uma sucessão (A_n) de elementos de Λ e $k \in \mathbb{N}$, a φ-mensurabilidade de $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ e a monotonia de φ, permitem escrever $\varphi(Q) \geq \varphi(Q \bigcup_{i=1}^{k} A_i) + \varphi(Q(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)^c) \geq \varphi(Q \bigcup_{i=1}^{k} A_i) + \varphi(Q(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c)$. Fazendo k tender para $+\infty$, e usando a segunda parte do lema anterior, concluímos, pelo critério de φ-mensurabilidade, que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Lambda$. A classe Λ é assim um σ-anel de partes de X. Se a sucessão (A_n) de elementos de Λ é de elementos disjuntos dois a dois, tomando $Q = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ no lema anterior, concluímos que $\varphi_{|\Lambda}$ é σ-aditiva. Finalmente, se $A \in \Lambda$ é tal que $\varphi(A) = 0$, então todo o subconjunto B de A está em Λ pois $\varphi(Q) = \varphi(A) + \varphi(Q) \geq \varphi(QA) + \varphi(QB^c) \geq \varphi(QB) + \varphi(QB^c)$. $\square$

2.4 Construção de medidas exteriores

Vimos no parágrafo anterior que a partir duma medida exterior é possível induzir uma medida. O problema da construção duma medida pode ser assim reduzido ao da construção duma medida exterior. Neste parágrafo apresentamos a construção duma medida exterior a partir duma função de conjunto não-negativa definida sobre uma classe $\mathcal{C}$ de partes de X.

Tal como para outras classes de partes de X já estudadas, a intersecção duma qualquer família de classes hereditárias é uma classe hereditária. Assim, dada uma classe $\mathcal{C}$ de partes de X chamamos classe hereditária gerada por $\mathcal{C}$ à intersecção de todas as classes hereditárias que contêm $\mathcal{C}$, isto é, à mais pequena classe hereditária que contém $\mathcal{C}$. De forma análoga, chamaremos σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$, à intersecção de todos os σ-anéis hereditários que contêm $\mathcal{C}$. Uma tal classe que denotamos por $\mathcal{H}(\mathcal{C})$, é o mais pequeno σ-anel hereditário que contém $\mathcal{C}$.

Proposição 2.4.1 *Se $\mathcal{C}$ é uma classe de partes de X então*

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \Big\{A \in \mathcal{P}(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, \text{ para alguma sucessão } (C_i) \text{ em } \mathcal{C}\Big\}.$$

Demonstração: A classe anterior contém $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ pois contém $\mathcal{C}$ e é σ-anel hereditário. Se $A \in \mathcal{P}(X)$ é tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, para alguma sucessão (C_i) em $\mathcal{C}$, então $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ uma vez que $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$. $\square$

Atendendo ao resultado anterior, concluímos que $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(X)$ sse existe $(X_n) \subset \mathcal{C}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$.

Exemplos: 1. Se $\mathcal{C}$ é o semi-anel definido no Exemplo 1.2.2 então $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

2. Se X é um conjunto infinito não-numerável e $\mathcal{C}$ é a classe de todos os subconjuntos finitos de X temos $\mathcal{H}(\mathcal{C}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Mais precisamente $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ é a classe dos subconjuntos finitos ou numeráveis de X.

Teorema 2.4.2 *Sejam $\mathcal{C}$ uma classe de partes de X contendo $\emptyset$ e λ uma função de conjunto em $\mathcal{C}$, não-negativa com $\lambda(\emptyset) = 0$. Então, $\lambda^* : \mathcal{H}(\mathcal{C}) \to [0, +\infty]$ definida por*

$$\lambda^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{C},\ n = 1, 2, \ldots\Big\},$$

é uma medida exterior dita <u>medida exterior induzida por λ</u>.

Demonstração: λ^* satisfaz claramente as duas primeiras propriedades da definição de medida exterior. Dados uma sucessão (A_n) em $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ e $\epsilon > 0$, para cada A_n existe uma sucessão $(A^{\epsilon}_{nk})_k$ de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A^{\epsilon}_{nk}) < \lambda^*(A_n) + \epsilon/2^n$. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A^{\epsilon}_{nk}$, então $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A^{\epsilon}_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^*(A_n) + \epsilon/2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \epsilon$. $\square$

Notemos que se λ é σ-finita em $\mathcal{C}$, λ^* é também σ-finita em $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ (ver Exercício 2.9.15).

2.5 Prolongamento de medidas

Sejam λ uma função de conjunto não-negativa sobre uma classe $\mathcal{C}$ de partes de X contendo $\emptyset$ com $\lambda(\emptyset) = 0$ e $\lambda^* : \mathcal{H}(\mathcal{C}) \to [0, +\infty]$ a medida exterior induzida por λ (cf. Teorema 2.4.2). Pelo Teorema 2.3.6 sabemos que $\lambda^*_{|\Lambda}$, onde Λ é o σ-anel dos conjuntos λ^*-mensuráveis, é uma medida completa. Mostramos de seguida que se λ é uma medida definida num anel $\mathcal{C}$, $\lambda^*_{|\Lambda}$ é um prolongamento de λ a Λ.

Teorema 2.5.1 (do prolongamento duma medida, I) *Seja λ uma medida definida num anel $\mathcal{C}$ de partes de X. Então $\mathcal{C} \subset \Lambda$ e $\lambda^*_{|\Lambda}$ é um prolongamento de λ a Λ.*

Demonstração: Comecemos por provar que $\mathcal{C} \subset \Lambda$. Sejam $C \in \mathcal{C}$, e $Q \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ com $\lambda^*(Q) < +\infty$. Por definição de λ^*, dado $\epsilon > 0$, qualquer, existe (C_n) em $\mathcal{C}$ tal que $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(C_n) < \lambda^*(Q)+\epsilon$. Assim, $\lambda^*(Q)+\epsilon > \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda(C_n \cap C)+\lambda(C_n \cap C^c)) \geq \lambda^*(Q \cap C) + \lambda^*(Q \cap C^c)$. Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, concluímos, pela Proposição 2.3.3, que $C \in \Lambda$. Provemos agora que $\lambda = \lambda^*$ em $\mathcal{C}$. Claramente $\lambda^*(A) \leq \lambda(A)$, para $A \in \mathcal{C}$. Por outro lado, se (C_n) em $\mathcal{C}$ é tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, então $\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(C_n)$, pelo Teorema 2.2.4, e assim $\lambda(A) \leq \lambda^*(A)$. $\Box$

Atendendo ao resultado anterior, uma medida λ definida sobre um anel $\mathcal{C}$ de partes de X pode ser prolongada ao σ-anel $\Lambda \supset s(\mathcal{C})$ dos conjuntos λ^*-mensuráveis:

$$\lambda \longrightarrow \lambda^* \longrightarrow \lambda^*_{|\Lambda}.$$

Será que repetindo o processo de prolongamento anterior a partir duma das medidas $\lambda^*_{|\Lambda}$ ou $\lambda^*_{|s(\mathcal{C})}$, poderemos obter um prolongamento de λ a uma classe mais vasta que Λ? Teríamos assim

$$\lambda \longrightarrow \lambda^* \longrightarrow \lambda^*_{|\Lambda} \longrightarrow (\lambda^*_{|\Lambda})^* \longrightarrow (\lambda^*_{|\Lambda})^*_{|\Lambda'}$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda^* \longrightarrow \lambda^*_{|s(\mathcal{C})} \longrightarrow (\lambda^*_{|s(\mathcal{C})})^* \longrightarrow (\lambda^*_{|s(\mathcal{C})})^*_{|\Lambda''},$$

onde Λ' e Λ'' são os σ-anéis dos conjuntos $(\lambda^*_{|\Lambda})^*$ e $(\lambda^*_{|s(\mathcal{C})})^*$-mensuráveis, respectivamente.

Como veremos de seguida, as medidas exteriores λ^*, $(\lambda^*_{|\Lambda})^*$ e $(\lambda^*_{|s(\mathcal{C})})^*$ coincidem o que permite concluir que $\Lambda = \Lambda' = \Lambda''$.

Teorema 2.5.2 *Sejam λ é uma medida no anel $\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}$ um σ-anel de partes de X com $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{H}(\mathcal{C})$. Então $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda^*(B) : A \subset B \in \mathcal{A}\}$, para todo o $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$.*

Demonstração: Como $s(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$, para $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset B$. Assim, pela monotonia de λ^*, $\lambda^*(A) \leq \inf\{\lambda^*(B) : A \subset B \in \mathcal{A}\} \leq \inf\{\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n, C_n \in \mathcal{C}\} \leq \inf\{\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(C_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n, C_n \in \mathcal{C}\} = \lambda^*(A)$. $\Box$

Corolário 2.5.3 *Nas condições anteriores, se $\lambda^*_{|\mathcal{A}}$ é medida em $\mathcal{A}$ então $\lambda^*(A) = (\lambda^*_{|\mathcal{A}})^*(A)$, para todo o $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$. Além disso, $\mathcal{A} \subset \Lambda$, isto é, o prolongamento de λ a Λ por restrição de λ^* é maximal.*

Demonstração: Sendo $\lambda^*_{|\mathcal{A}}$ medida no anel $\mathcal{A}$, pelo Teorema 2.5.1 $(\lambda^*_{|\mathcal{A}})^*$ coincide com $\lambda^*_{|\mathcal{A}}$ em $\mathcal{A}$. Assim, pelo teorema anterior $(\lambda^*_{|\mathcal{A}})^*(A) = \inf\{(\lambda^*_{|\mathcal{A}})^*(B) : A \subset B \in \mathcal{A}\} =$

$\inf\{\lambda^*_{|\mathcal{A}}(B) : A \subset B \in \mathcal{A}\} = \inf\{\lambda^*(B) : A \subset B \in \mathcal{A}\} = \lambda^*(A)$, para $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$. Finalmente, como $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, onde $\mathcal{A}'$ é a classe dos conjuntos $(\lambda^*_{|\mathcal{A}})^*$-mensuráveis, e $(\lambda^*_{|\mathcal{A}})^* = \lambda^*$, então $\mathcal{A}' = \Lambda$, o que prova o pretendido. $\square$

Notemos que a impossibilidade de prolongar λ para além de Λ estabelecida no corolário anterior, vale apenas para prolongamentos obtidos por restrição de λ^* (ver Exercício 2.9.18).

Tomando no teorema anterior $\mathcal{A} = s(\mathcal{C})$, concluímos que a medida exterior dum qualquer elemento de $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ pode ser aproximada pela medida exterior de elementos de $s(\mathcal{C})$ que o contêm. Vejamos que sendo λ uma medida σ-finita, podemos ser mais precisos nesta afirmação.

Definição 2.5.4 *Dado $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$, dizemos que $B \in s(\mathcal{C})$ é cobertura mensurável de A se $A \subset B$ e $\forall\, M \in s(\mathcal{C})$ $M \subset B - A \Rightarrow \lambda^*(M) = 0$.*

Teorema 2.5.5 *Se λ é uma medida σ-finita sobre um anel $\mathcal{C}$ de partes de X, então para todo o $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ existe uma cobertura mensurável B de A tal que $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.*

Demonstração: Seja $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ com $\lambda^*(A) < +\infty$. Para $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in s(\mathcal{C})$ tal que $\lambda^*(B_n) - \lambda^*(A) < 1/n$. Tomando $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$, uma vez que $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) \leq \lambda^*(B_n) \leq \lambda^*(A) + 1/n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Além disso, B é cobertura mensurável de A, pois $B \in s(\mathcal{C})$, $A \subset B$ e para $M \subset B - A$ com $M \in s(\mathcal{C})$, temos $\lambda^*(B) = \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B - M) = \lambda^*(B) - \lambda^*(M)$.

Seja agora $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ com $\lambda^*(A) = +\infty$. Pela σ-aditividade de λ, existe (A_n) em $s(\mathcal{C})$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $A_n \cap A_m = \emptyset$, para $n \neq m$ (cf. Exercício 2.9.15). Assim, $A = \sum_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)$, com $\lambda^*(A \cap A_n) < +\infty$, e $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap A_n$, onde B_n é cobertura mensurável de $A \cap A_n$, é cobertura mensurável de A com $\lambda^*(B) = +\infty$. $\square$

Notemos que os resultados anteriores valem com $\mathcal{C}$ semi-anel e λ medida sobre $\mathcal{C}$. Com efeito, sendo μ o prolongamento de λ a $r(\mathcal{C})$ (ver Exercício 2.9.8) temos $\lambda^* = \mu^*$ em $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ (cf. Exercício 2.9.16).

2.6 Unicidade do prolongamento e aproximação

Pelo Teorema 2.5.1, sabemos que uma medida λ definida sobre um semi-anel $\mathcal{C}$ de partes de X, pode ser prolongada ao σ-anel gerado por $\mathcal{C}$. Discutimos de seguida a unicidade dum tal prolongamento.

Lema 2.6.1 (da igualdade de medidas) *Sejam $\mathcal{C}$ um semi-anel de partes de X e μ_1 e μ_2 medidas definidas em $\mathcal{A} \supset s(\mathcal{C})$ e σ-finitas em $\mathcal{C}$ tais que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, para todo o $A \in \mathcal{C}$. Então $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para todo o $A \in s(\mathcal{C})$.*

Demonstração: Atendendo ao Exercício 2.9.8, basta tomar $\mathcal{C}$ anel de partes de X. Suponhamos em primeiro lugar que uma das medidas é finita em $s(\mathcal{C})$ e seja $\mathcal{D} = \{A \in s(\mathcal{C}) : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset s(\mathcal{C})$ e $\mathcal{D}$ é classe monótona, concluímos pelo Teorema 1.3.4 que $\mathcal{D} = s(\mathcal{C})$, isto é, μ_1 e μ_2 coincidem em $s(\mathcal{C})$.

Seja agora $A \in s(\mathcal{C})$, qualquer. Sendo μ_1 σ-finita no anel $\mathcal{C}$, existe $(A_n) \subset \mathcal{C}$ com $\mu_1(A_n) < +\infty$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, tal que $A \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Como $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cap A$, basta agora provar que para $n \in \mathbb{N}$, as restrições de μ_1 e μ_2 a $A_n \cap s(\mathcal{C})$ coincidem. Para tal, notemos que μ_1 e μ_2 coincidem em $A_n \cap \mathcal{C}$ e μ_1 é finita em $s(A_n \cap \mathcal{C}) = A_n \cap s(\mathcal{C})$ (cf. Exercício 1.5.16). Assim pela primeira parte da demonstração, μ_1 e μ_2 coincidem em $A_n \cap s(\mathcal{C})$. $\square$

Corolário 2.6.2 *Nas condições anteriores, se a classe $\mathcal{C}$ contém X ou uma sucessão (X_n) com $X_n \uparrow X$, então $\mu_1 = \mu_2$ em $\sigma(\mathcal{C})$.*

Corolário 2.6.3 *(da demonstração) Sejam $\mathcal{C}$ um π-sistema de partes de X que contém X ou uma sucessão (X_n) com $X_n \uparrow X$, e μ_1 e μ_2 medidas definidas em $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$ finitas em $\mathcal{C}$. Se μ_1 e μ_2 coincidem em $\mathcal{C}$, coincidem também em $\sigma(\mathcal{C})$.*

Teorema 2.6.4 (do prolongamento duma medida, II) *Sejam $\mathcal{C}$ um semi-anel de partes de X e λ uma medida σ-finita em $\mathcal{C}$. Então existe um e um só prolongamento de λ a $s(\mathcal{C})$. Um tal prolongamento é σ-finito.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.5.1, $\mu = \lambda^*_{|s(\mathcal{C})}$ é um prolongamento de λ a $s(\mathcal{C})$. Além disso, pelo Exercício 2.9.15, um tal prolongamento é σ-finito. A sua unicidade é consequência imediata do lema da igualdade de medidas. $\square$

Atendendo à unicidade do prolongamento, este é, habitualmente, também denotado por λ.

Como primeira aplicação do teorema anterior, consideremos o semi-anel $\mathcal{C}$ definido no Exemplo 1.2.2 e $\lambda : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ a função de conjunto definida no Exemplo 2.1.3. Sabemos agora que existe uma única medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ que prolonga λ, a que chamamos <u>medida de Borel em $\mathbb{R}$</u>.

Terminamos este parágrafo mostrando que um qualquer elemento de $s(\mathcal{C})$ de medida finita, pode ser aproximado, em medida, por um adequado elemento de $r(\mathcal{C})$.

Teorema 2.6.5 (da aproximação) *Se λ é uma medida σ-finita sobre um semi-anel $\mathcal{C}$ então*

$$\forall \epsilon > 0 \, \forall A \in s(\mathcal{C}) : \lambda(A) < +\infty \; \exists B \in r(\mathcal{C}) : \lambda(A \triangle B) < \epsilon.$$

Demonstração: Dados $\epsilon > 0$ e $A \in s(\mathcal{C})$ com $\lambda(A) < +\infty$, existe $(A_n) \subset \mathcal{C}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) < \lambda(A) + \epsilon/2$, uma vez que $\lambda^* = \lambda$ em $s(\mathcal{C})$. Por outro lado, como $\lim \lambda(\bigcup_{n=1}^{m} A_n) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n)$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) < \lambda(\bigcup_{n=1}^{m_0} A_n) + \epsilon/2$. Finalmente, tomando $B = \bigcup_{n=1}^{m_0} A_n \in r(\mathcal{C})$ temos $\lambda(A - B) < \epsilon/2$ e $\lambda(B - A) < \epsilon/2$, o que permite concluir. $\square$

2.7 Completamento de medidas

Sendo μ uma medida sobre um σ-anel $\mathcal{A}$, sabemos que μ^*, que coincide com μ sobre $\mathcal{A}$, é uma medida sobre o σ-anel $\Lambda \supset \mathcal{A}$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis. Vamos de seguida verificar que o alargamento do domínio de definição duma medida pode ser conseguido sem lançar mão da noção de medida exterior.

Teorema 2.7.1 (do completamento duma medida) *Se μ é uma medida sobre o σ-anel $\mathcal{A}$ de partes de X então a classe $\bar{\mathcal{A}}$ de todos os conjuntos da forma $A \cup N$ com $A \in \mathcal{A}$ e $N \subset M$ para algum $M \in \mathcal{A}$ com $\mu(M) = 0$, é um σ-anel e $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ definida por*

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A),$$

é uma medida completa sobre $\mathcal{A}$. $\bar{\mu}$ diz-se o completamento de μ e $\bar{\mathcal{A}}$ o completamento de $\mathcal{A}$ relativamente a μ.

Demonstração: Comecemos por mostrar que $\bar{\mu}$ está bem definida. Com efeito, se $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$, com $A_i \in \mathcal{A}$ e $N_i \subset M_i \in \mathcal{A}$, com $\mu(M_i) = 0$, para $i = 1, 2$, temos $A_1 \subset A_2 \cup M_2$ e $A_2 \subset A_1 \cup M_1$, e então $\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(M_2) = \mu(A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(M_1) = \mu(A_1)$. Sendo $\mathcal{A}$ um σ-anel de partes de X e μ medida em $\mathcal{A}$, facilmente se conclui que $\bar{\mathcal{A}}$ e $\bar{\mu}$ são também σ-anel de partes de X e medida $\bar{\mathcal{A}}$, respectivamente. Finalmente, dado $B \subset A \cup N$, com $A \in \mathcal{A}$, $N \subset M \in \mathcal{A}$, $\mu(M) = 0$ e $\bar{\mu}(A \cup N) = 0$, concluímos que B é um subconjunto do conjunto de medida μ nula de $A \cup M$, o que permite concluir que $B \in \bar{\mathcal{A}}$. $\bar{\mu}$ é assim uma medida completa. $\square$

Duma forma geral $\bar{\mathcal{A}} \subset \Lambda$ (ver Exercício 2.9.25). No caso de μ ser σ-finita, os dois processos descritos de alargamento do domínio $\mathcal{A}$ de definição de μ, via medida exterior e via completamento, são equivalentes.

Teorema 2.7.2 *Se μ é uma medida σ-finita definida no σ-anel $\mathcal{A}$ de partes de X e Λ é a classe dos conjuntos μ^*-mensuráveis, então $\bar{\mathcal{A}} = \Lambda$ e $\bar{\mu} = \mu^*_{|\Lambda}$.*

Demonstração: Sabemos já que μ e $\mu^*_{|\Lambda}$ coincidem no σ-anel $\mathcal{A} \subset \Lambda$, e que $\mu^*_{|\Lambda}$ é completa. Dado $A \cup N \in \bar{\mathcal{A}}$, com $A \in \mathcal{A}$, $N \subset M \in \mathcal{A}$ e $\mu(M) = 0$, concluímos que

$N \in \Lambda$ pela completude de $\mu^*_{|\Lambda}$. Assim $\bar{\mathcal{A}} \subset \Lambda$. Além disso, $\mu^*_{|\Lambda}(A \cup N) = \mu^*_{|\Lambda}(A) = \mu(A) = \bar{\mu}(A \cup N)$, isto é, $\bar{\mu} = \mu^*_{|\Lambda}$ em $\bar{\mathcal{A}}$. Para concluir a demonstração, basta agora mostrar que $\Lambda \subset \bar{\mathcal{A}}$. Seja então $A \in \Lambda$ com $\mu^*(A) < +\infty$. Pelo Teorema 2.5.5 existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset B$ e $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. Como $B - A \in \Lambda$, por nova aplicação do Teorema 2.5.5, existe $G \in \mathcal{A}$ com $B - A \subset G$ e $\mu^*(B - A) = \mu^*(G)$. Para concluir que $A \in \bar{\mathcal{A}}$, basta ter em conta a decomposição $A = (B - G) \cup (A \cap G)$, onde $B - G \in \mathcal{A}$, $A \cap G \subset B \cap G \in \mathcal{A}$ e $\mu(B \cap G) \leq \mu^*(G) = \mu^*(B) - \mu^*(A) = 0$. Finalmente, se $A \in \Lambda$ é tal que $\mu^*(A) = +\infty$, basta usar a σ-finitude de μ e o Exercício 2.9.15. □

Corolário 2.7.3 *Se λ é o prolongamento a $s(\mathcal{C})$ duma medida σ-finita definida num semi-anel $\mathcal{C}$ de partes de X e Λ é a classe dos conjuntos λ^*-mensuráveis, então $\overline{s(\mathcal{C})} = \Lambda$ e $\bar{\lambda} = \lambda^*_{|\Lambda}$.*

2.8 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$

Este parágrafo tem como objectivo a definição duma medida em $\mathbb{R}^d$ que desempenha um papel fundamental em Análise e nas Probabilidades. Uma tal medida, "mede" o "comprimento" se $d = 1$, a "área" se $d = 2$ e o "volume" se $d = 3$.

Consideremos o semi-anel de partes de $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C} = \left\{ \prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i] : -\infty < a_i \leq b_i < +\infty, \text{ para } i = 1, \ldots, d \right\},$$

e a medida (pois coincide em $\mathcal{C}$ com a medida de Jordan em $\mathbb{R}^d$) definida em $\mathcal{C}$ por

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Sendo λ σ-finita em $\mathcal{C}$, pelo teorema do prolongamento duma medida existe uma única medida sobre $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ que prolonga λ, dita <u>medida de Borel em $\mathbb{R}^d$</u>. Ao completamento $\bar{\lambda}$ de λ chamamos <u>medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$</u> e aos elementos de $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)$ chamamos <u>mensuráveis à Lebesgue</u>. Por simplicidade a medida de Lebesgue será também denotada por λ e a σ-ágebra dos mensuráveis à Lebesgue por $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)$.

Sendo λ^* a medida exterior induzida por λ sabemos que (cf. Teorema 2.7.2)

$$\lambda^*_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} = \lambda \quad \text{e} \quad \lambda^*_{|\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)} = \bar{\lambda},$$

onde

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$$

e $\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{C}, n = 1, 2, \ldots\}$, para $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Denotando por $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_F$ as classes dos rectângulos abertos e fechados em $\mathbb{R}^d$, respectivamente, notemos que na definição de λ^* a classe $\mathcal{C}$ pode ser substituída por uma das classes $\mathcal{C}_A$ ou $\mathcal{C}_F$.

Estudamos de seguida algumas propriedades da medida de Lebesgue. Começamos por uma caracterização da mensurabilidade à Lebesgue em termos de conjuntos abertos e de conjuntos fechados.

Teorema 2.8.1 *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^d$. As seguintes proposições são equivalentes:*

i) A é mensurável à Lebesgue;

ii) $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, G$ aberto $: A \subset G$ e $\lambda^*(G - A) < \epsilon$;

iii) $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, F$ fechado $: A \supset F$ e $\lambda^*(A - F) < \epsilon$.

Demonstração: Notemos que basta estabelecer $i) \Leftrightarrow ii)$ uma vez que a equivalência $i) \Leftrightarrow iii)$ resulta desta e do facto da classe dos mensuráveis à Lebesgue ser estável para a complementação.

$i) \Rightarrow ii)$: Sejam A mensurável à Lebesgue e $\epsilon > 0$, arbitrário. Se $\lambda^*(A) < +\infty$, existe uma sucessão (A_n) em $\mathcal{C}_A$ com $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \lambda^*(A) < \epsilon$. O aberto $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ satisfaz $ii)$. Se $\lambda^*(A) = +\infty$, e sendo $\lambda^*_{|\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)}$ σ-finita, A admite a decomposição $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ com $A_n \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)$ e $\lambda^*(A_n) < +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe assim G_n aberto com $A_n \subset G_n$ e $\lambda^*(G_n - A_n) < \epsilon/2^n$. O aberto $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ satisfaz $ii)$.

$ii) \Rightarrow i)$: Dados $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, existe por hipótese F_n fechado com $F_n \subset A^c$ e $\lambda^*(A^c - F_n) < \epsilon/2^n$. Tomando $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ temos $\lambda^*(A^c - F) < \epsilon$, ou ainda, $\lambda^*(A^c - F) = 0$. Assim $A^c - F$, $A^c = F + (A^c - F)$ e também A, são mensuráveis à Lebesgue. $\Box$

Teorema 2.8.2 *Um conjunto numerável é um boreliano e tem medida de Lebesgue nula.*

Demonstração: Um conjunto numerável, sendo reunião numerável de fechados, é boreliano. Basta agora mostrar que $\lambda(\{a\}) = 0$, para todo o $a \in \mathbb{R}^d$. Se $a = (a_1, \ldots, a_d)$ então $\prod_{i=1}^{d}]a_i - 1/n, a_i] \downarrow \{a\}$ e $\lambda(\{a\}) = \lim \lambda(\prod_{i=1}^{d}]a_i - 1/n, a_i]) = \lim 1/n^d = 0$. $\Box$

Teorema 2.8.3 *Dados $A \subset \mathbb{R}^d$ e $x \in \mathbb{R}^d$ então A é mensurável à Lebesgue sse $A + x = \{y + x : y \in A\}$ é mensurável à Lebesgue. Além disso, λ é invariante para translações, isto é, para todo o $A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)$ e $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda(A + x) = \lambda(A)$.*

Demonstração: Para $A \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ e $Q \subset \mathbb{R}^d$ valem as igualdades $\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$, $Q(A + x) = (Q - x)A$ e $Q(A + x)^c = (Q - x)A^c + x$. Assim, se A é mensurável à

Lebesgue, $A+x$ é-o também pois $\lambda^*(Q(A+x)) + \lambda^*(Q(A+x)^c) = \lambda^*((Q-x)A+x) + \lambda^*((Q-x)A^c+x) = \lambda^*((Q-x)A) + \lambda^*((Q-x)A^c) = \lambda^*(Q-x) = \lambda^*(Q)$. Finalmente, λ é invariante para translações pois $\lambda = \lambda^*$ em $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)$ e λ^* é, como vimos, invariante para translações. $\square$

O conjunto das medidas finitas em conjuntos limitados que gozam da propriedade de invariância para translações é caracterizada no teorema seguinte.

Teorema 2.8.4 *Se μ é uma medida não-nula sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ invariante para translações e finita em conjuntos limitados, então existe $c > 0$ tal que $\mu(A) = c\lambda(A)$, para todo o $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração: Ver Cohn (1980), pg. 30. $\square$

Uma questão natural é a de saber se existem subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ não-mensuráveis à Lebesgue. Outra, é saber se existem conjuntos mensuráveis à Lebesgue que não sejam borelianos (isto é, saber se $\lambda_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ é, ou não, completa). A resposta a ambas as questões é afirmativa.

A construção que a seguir apresentamos dum subconjunto de $\mathbb{R}$ não-mensurável à Lebesgue utiliza o axioma da escolha na forma seguinte:

Axioma de Zermelo: Dada uma família de conjuntos não-vazios e disjuntos indexada por um conjunto I, $A_\alpha, \alpha \in I$, existe um conjunto formado por exactamente um elemento de cada A_α, para $\alpha \in I$.

Num artigo publicado em 1970 nos *Annals of Mathematics* (92, pp. 1–56) R.M. Solovey provou que a existência de conjuntos não-mensuráveis à Lebesgue não pode ser estabelecida a partir da axiomática de Zermelo-Frankel sem utilizar o axioma da escolha.

Teorema 2.8.5 *Existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não é mensurável à Lebesgue.*

Demonstração: Consideremos em $[0,1]$ a relação de equivalência definida por $x \sim y$ sse $x-y$ é racional, e sejam $\{a_1, a_2, \ldots\}$ os racionais do intervalo $[-1,1]$. Utilizando o axioma de Zermelo, designemos por C o subconjunto de $[0,1]$ obtido pela escolha dum ponto em cada uma das classes de equivalência determinadas em $[0,1]$ pela relação anterior, e seja $C_k = a_k + C$, para $k \in \mathbb{N}$.

Os conjuntos C_k, $k \in \mathbb{N}$, são disjuntos dois a dois e

$$[0,1] \subset \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \subset [-1,2]. \tag{2.8.6}$$

Se o conjunto C fosse mensurável à Lebesgue, cada C_k sê-lo-ia também e seríamos conduzidos à dupla desigualdade $\lambda([0,1]) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(C_k) \leq \lambda([-1,2])$, que é falsa uma vez que $\lambda(C_k) = \lambda(C)$, para todo o $k \in \mathbb{N}$. O conjunto C não é assim mensurável à Lebesgue. □

Tendo em conta o resultado anterior concluímos que $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \subset\neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Temos também $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset\neq \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ (ver Exercício 2.9.30).

A existência de conjuntos não-mensuráveis à Lebesgue é um resultado "negativo" para a medida de Lebesgue. Tal facto é atenuado pelo resultado seguinte que estabelece a não existência duma medida definida em todos os subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ que seja invariante para translações (ver Exercício 2.9.33).

Teorema 2.8.7 *Não existe uma medida μ definida em todos os subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$ tal que $0 < \mu([0,1]) < +\infty$ e $\mu(A + x) = \mu(A)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$ limitado.*

Demonstração: Usar (2.8.6) e a desigualdade $\mu([-1,2]) \leq 3\mu([0,1])$. □

2.9 Exercícios

1. Sejam $\mathcal{C}$ uma classe de partes de X e μ uma função de conjunto definida em $\mathcal{C}$. Mostre que:
   (a) Se $\mathcal{C}$ é estável para a reunião finita e μ é aditiva então μ é finitamente aditiva;
   (b) Se $\emptyset \in \mathcal{C}$ e μ é aditiva mas não constantemente infinita, então $\mu(\emptyset) = 0$;
   (c) Se $\emptyset \in \mathcal{C}$, $\mu(\emptyset) = 0$ e μ é σ-aditiva então μ é finitamente aditiva;
   (d) Se $\mathcal{C}$ é anel e μ é aditiva, então μ toma apenas um dos valores $-\infty$ ou $+\infty$.
2. Seja μ uma função de conjunto, não-negativa e finitamente aditiva no anel $\mathcal{C}$ com $\mu(\emptyset) = 0$. Mostre que μ é medida em $\mathcal{C}$ sse para todo o $A \in \mathcal{C}$ e $(A_n) \subset \mathcal{C}$ com $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
3. Sejam $\mathcal{C}$ a classe de todos os subconjuntos finitos dum conjunto X e f uma aplicação de X em $[0, +\infty]$. Mostre que a função de conjunto $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ definida por $\mu(\emptyset) = 0$ e por $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ para $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{C}$, é uma medida em $\mathcal{C}$.
4. (**Medida de Borel**) Sejam $\mathcal{C}$ o semi-anel definido no Exemplo 1.2.2, e $\lambda : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ a função de conjunto definida por $\lambda(]a, b]) = b - a$ se $-\infty < a \leq b < +\infty$. No que se segue sejam $a < b$ e $a_i < b_i$ para $i = 1, \ldots, n$.
   (a) Se $]a, b] = \sum_{i=1}^{n}]a_i, b_i]$, mostre que:
      i. Existe $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_{i_1} = a$;
      ii. $]b_{i_1}, b] = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i_1\}}]a_i, b_i]$;
      iii. Existe uma permutação $(i_1, \ldots, i_n)$ de $(1, \ldots, n)$ tal que $a = a_{i_1} < b_{i_1} = a_{i_2} < \ldots < b_{i_n} = b$.

(b) Mostre que λ é finitamente aditiva.

(c) Se $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[$, mostre que:

i. Existem $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ tais que $[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^m]a_{i_j}, b_{i_j}[$, com $a_{i_1} < a < b_{i_1}$, $a_{i_m} < b < b_{i_m}$ e $a_{i_{j+1}} < b_{i_j} < b_{i_{j+1}}$ para $j = 1, \dots, m-1$;

ii. $b - a < \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

(d) Mostre que λ é uma medida.

5. Sejam $\mathcal{A}$ um σ-anel de partes de X, μ e ν medidas sobre $(X, \mathcal{A})$, $B \in \mathcal{A}$ e $\alpha \geq 0$. Em cada um dos seguintes casos mostre que a função de conjunto η aí definida é uma medida:

(a) $\eta(A) = \mu(A) + \nu(A)$, $A \in \mathcal{A}$ (η diz-se adição de μ e ν e denota-se por $\mu + \nu$);

(b) $\eta(A) = \alpha\mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$ (η denota-se por $\alpha\mu$);

(c) $\eta(A) = \mu(A \cap B)$, $A \in \mathcal{A}$.

6. Sejam $\mathcal{A}$ um σ-anel de partes de X, $Y \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{B} = Y \cap \mathcal{A}$.

(a) Sendo μ uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$, mostre que ν definida, para $B \in \mathcal{B}$, por $\nu(B) = \mu(B)$, é uma medida sobre $(Y, \mathcal{B})$ (ν diz-se restrição de μ a Y e denota-se por $\mu_{|Y}$).

(b) Sendo ν uma medida sobre $(Y, \mathcal{B})$, mostre que μ definida, para $A \in \mathcal{A}$, por $\mu(A) = \nu(Y \cap A)$, é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$.

7. Sejam μ uma medida num anel $\mathcal{C}$ e $E, F, G \in \mathcal{C}$. Prove que:

(a) $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$;

(b) $\mu(E \cup F \cup G) + \mu(E \cap F) + \mu(E \cap G) + \mu(F \cap G) = \mu(E) + \mu(F) + \mu(G) + \mu(E \cap F \cap G)$;

(c) (**Fórmula de Daniel da Silva ou da Inclusão-Exclusão**) No caso de μ ser finita generalize as alíneas anteriores mostrando que se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ então $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} \mu(A_1 \cap \dots \cap A_n)$.

8. (**Prolongamento duma medida definida num semi-anel ao anel por ele gerado**) Seja ν uma função de conjunto não-negativa e finitamente aditiva sobre o semi-anel $\mathcal{C}$ de partes de X com $\nu(\emptyset) = 0$. Mostre que:

(a) Existe uma e uma só função de conjunto μ não-negativa e finitamente aditiva sobre o anel $r(\mathcal{C})$ tal que $\mu_{|\mathcal{C}} = \nu$ (Sugestão: tenha em conta o Exercício 1.5.13);

(b) Se ν é medida em $\mathcal{C}$ então μ é medida sobre $r(\mathcal{C})$;

(c) Se ν é σ-finita então μ é também σ-finita.

9. Se $\mathcal{C}$ é um semi-anel de partes de X e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ são tais que $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$, mostre que a Fórmula de Daniel da Silva (cf. Exercício 2.9.7) permanece válida (Sugestão: use o Exercício 2.9.8).

10. Sejam μ uma medida no σ-anel $\mathcal{A}$ de partes de X e (A_n) uma sucessão em $\mathcal{A}$. Mostre que:

(a) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$;

(b) Se μ é finita então $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$ e conclua que $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$;

(c) (**Lema de Borel-Cantelli**) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ então $\mu(\limsup A_n) = 0$.

11. Diz-se que uma medida μ em $(X, \mathcal{A})$, com $\mathcal{A}$ σ-álgebra de partes de X, está *concentrada num mensurável* E se $\mu(A) = \mu(A \cap E)$ para todo o $A \in \mathcal{A}$. Mostre que μ está concentrada em $E \in \mathcal{A}$ sse $\mu(E^c) = 0$.

12. Seja $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ a medida exterior definida por $\varphi(A) = 0$ se $A = \emptyset$ e $\varphi(A) = 1$ se $A \neq \emptyset$. Mostre que $\Lambda = \{\emptyset, X\}$ é a classe dos conjuntos φ-mensuráveis.

13. Sendo X um conjunto infinito não-numerável, mostre que $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definida por $\varphi(A) = 0$ se A é finito ou numerável e $\varphi(A) = 1$ se A é infinito não-numerável, é uma medida exterior. Determine a classe dos conjuntos φ-mensuráveis e a medida induzida por φ.

14. Sejam φ é uma medida exterior definida no σ-anel hereditário $\mathcal{H}$ de partes de X, e $\widehat{\varphi} : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definida por $\widehat{\varphi}(A) = \varphi(A)$ se $A \in \mathcal{H}$ e $\widehat{\varphi}(A) = +\infty$ se $A \notin \mathcal{H}$. Mostre que:

    (a) $\widehat{\varphi}$ é uma medida exterior sobre $\mathcal{P}(X)$;

    (b) $A \in \mathcal{H}$ é φ-mensurável sse A é $\widehat{\varphi}$-mensurável.

15. Sejam $\mathcal{C}$ uma classe de partes de X e λ uma função de conjunto em $\mathcal{C}$, não-negativa com $\lambda(\emptyset) = 0$. Mostre que:

    (a) $\lambda^*(A) \leq \lambda(A)$ para todo o $A \in \mathcal{C}$;

    (b) Se λ é σ-finita em $\mathcal{C}$, então para todo o $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ existe uma sucessão (A_i) em $\mathcal{C}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\lambda(A_i) < +\infty$;

    (c) λ^* e $\lambda^*_{|s(\mathcal{C})}$ são σ-finitas em $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ e $s(\mathcal{C})$, respectivamente.

16. Sejam λ uma medida sobre um semi-anel $\mathcal{C}$ de partes de X e μ o seu prolongamento a $r(\mathcal{C})$. Mostre que $\lambda^* = \mu^*$.

17. Se φ é uma medida exterior definida no σ-anel hereditário $\mathcal{H}$ de partes de X, mostre que $\varphi^* = \varphi$.

18. Sejam $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ onde e λ uma probabilidade em $\mathcal{C}$.

    (a) Determine λ^* e a classe Λ dos conjuntos λ^*-mensuráveis (ver Exercício 2.9.12).

    (b) Mostre que existem medidas que prolongam λ a σ-aneis que contêm estritamente Λ.

19. Em $\mathbb{Q}$ considere o semi-anel $\mathcal{C} \cap \mathbb{Q}$ onde $\mathcal{C}$ é a classe definida no Exemplo 1.2.2.

    (a) Prove que $s(\mathcal{C} \cap \mathbb{Q})$ é a classe de todos os subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

    (b) Defina as medidas μ_1 e μ_2 em $s(\mathcal{C} \cap \mathbb{Q})$ por $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = 2\mu$, onde μ é a medida contagem em $\mathbb{Q}$. Mostre que $\mu_1 = \mu_2$ em $\mathcal{C} \cap \mathbb{Q}$ mas $\mu_1 \neq \mu_2$ em $s(\mathcal{C} \cap \mathbb{Q})$.

    (c) Porque não há contradição com o lema da igualdade de medidas?

20. Seja λ a medida de Borel em $\mathbb{R}$. Tome-se $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| < n\}$ e $B_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| > n\}$. Mostre que $\lambda(\lim A_n) = \lim \lambda(A_n)$ mas $\lambda(\lim B_n) \neq \lim \lambda(B_n)$.

21. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-decrescente e contínua à direita.

(a) (**Medida de Borel-Stieltjes**) Prove que existe uma e uma só medida μ em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$ para todo o $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$.

(b) Mostre que se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $\mu(]a,b]) = G(b) - G(a)$ para todo o $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, então $G - F$ é constante.

Suponha que F é limitada. Prove que:

(c) μ é finita;

(d) $\mu(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$, para todo o $a \in \mathbb{R}$;

(e) $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$, $\mu([a,b]) = F(b) - F(a^-)$, $\mu(]a,b[) = F(b^-) - F(a)$ e $\mu([a,b[) = F(b^-) - F(a^-)$, para todo o $-\infty < a < b < +\infty$;

(f) F é contínua em $x \in \mathbb{R}$ sse $\mu(\{x\}) = 0$;

(g) o conjunto dos pontos de descontinuidade de F é quando muito numerável. (Sugestão: mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \geq \frac{\mu(\mathbb{R})}{n}\}$ tem no máximo n elementos).

Suponha agora que além de ser limitada, F satisfaz $F(x) \to 0$, se $x \to -\infty$. Prove que:

(h) $\mu(]-\infty, x]) = F(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(i) μ é uma probabilidade sse $F(x) \to 1$, quando $x \to +\infty$.

22. Sejam μ uma medida finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$ (F_μ diz-se *função de repartição ou de distribuição de* μ). Prove que:

    (a) F_μ é limitada, não-decrescente, contínua à direita e $F_\mu(x) \to 0$, se $x \to -\infty$;

    (b) $\mu(]a,b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$, para todo o $-\infty < a < b < +\infty$;

    (c) F_μ caracteriza μ.

23. Sejam μ, ν medidas σ-finitas num anel $\mathcal{C}$. Prove que, para todo o $E \in s(\mathcal{C})$ tal que $\mu(E), \nu(E) < \infty$, e todo o $\epsilon > 0$, existe $E_0 \in \mathcal{C}$ tal que $\mu(E \triangle E_0) \leq \epsilon$ e $\nu(E \triangle E_0) \leq \epsilon$.

24. Seja μ uma medida num σ-anel $\mathcal{A}$ e $\bar{\mu}$ o seu completamento em $\bar{\mathcal{A}}$. Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subset E \subset B$ com $\mu(B - A) = 0$ prove que $E \in \bar{\mathcal{A}}$.

25. Sejam μ é uma medida sobre o σ-anel $\mathcal{A}$ de partes de X, $\bar{\mu}$ o completamento de μ, $\bar{\mathcal{A}}$ o completamento de $\mathcal{A}$ relativamente a μ e Λ a classe dos conjuntos μ^*-mensuráveis. Mostre que:

    (a) $\bar{\mathcal{A}}$ é o mais pequeno σ-anel onde podemos definir uma medida completa que prolonga μ;

    (b) $\bar{\mathcal{A}} \subset \Lambda$;

    (c) Se μ não é σ-finita, a inclusão anterior pode ser estrita. (Sugestão: considere um conjunto não-numerável X, $\mathcal{A}$ a classe dos subconjuntos numeráveis de X e dos seus complementares e μ a medida contagem em $\mathcal{A}$).

26. Sejam λ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e R um dos rectângulos $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[$, $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i[$ ou $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$. Mostre que $\lambda(R) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$.

27. Seja λ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e λ^* a medida exterior induzida por λ.

    (a) Dado $A \subset \mathbb{R}^d$ com $\lambda^*(A) = 0$, mostre que A é mensurável à Lebesgue.

    (b) Dado $A \subset \mathbb{R}^d$, mostre que $\lambda^*(A) = 0$ sse para todo o $\epsilon > 0$ existem rectângulos fechados $A_1, A_2, \ldots$ com $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ tais que $\sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i) \leq \epsilon$.

(c) Mostre que se um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^d$ é mensurável à Jordan então é mensurável à Lebesgue.

(d) Mostre que a recíproca da alínea anterior não é verdadeira considerando o boreliano $\{x \in [0,1] : x \text{ é racional}\}$.

28. Mostre que $A \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue sse $\alpha A = \{\alpha x : x \in A\}$ é mensurável à Lebesgue para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, mostre que $\lambda(\alpha A) = |\alpha|^d \lambda(A)$.

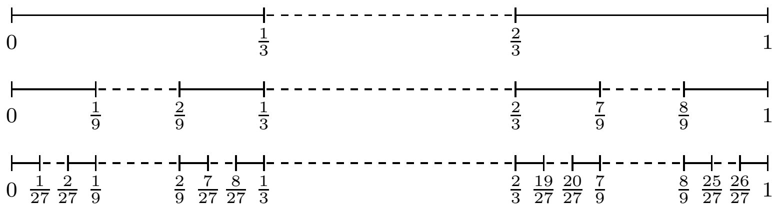
29. Sejam $J(\mathbb{R}^d)$ a classe dos conjuntos mensuráveis à Jordan, v a medida de Jordan em $J(\mathbb{R}^d)$ e λ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Mostre que:

(a) $J(\mathbb{R}^d)$ é um anel;

(b) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(J(\mathbb{R}^d)) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)$;

(c) $\lambda_{|J(\mathbb{R}^d)} = v$.

30. (**Conjunto de Cantor**) Sejam $X_0 = [0,1]$, $X_1 =]1/3, 2/3[$, X_2 e X_3 os terços médios dos dois subintervalos de $X_0 - X_1$, isto é, $X_2 =]1/9, 2/9[$ e $X_3 =]7/9, 8/9[$, X_4, X_5, X_6 e X_7 os terços médios dos quatro subintervalos de $X_0 - (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$, e assim sucessivamente. Denotemos por C o conjunto $C = X_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ dito conjunto ternário de Cantor.



Prove que:

(a) C é compacto;

(b) $\lambda(C) = 0$, onde λ representa a medida de Lebesgue;

(c) $\operatorname{int}(C) = \emptyset$ (e $\overline{C} = [0,1]$);

(d) C tem a potência do contínuo. (Sugestão: mostre que C é o conjunto dos números reais x do intervalo $[0,1]$ cuja expansão em base 3, isto é, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$, com $\alpha_n = 0, 1, 2$ e $n = 1, 2, \ldots$, não utiliza o algarismo 1);

(e) $C \in J(\mathbb{R})$;

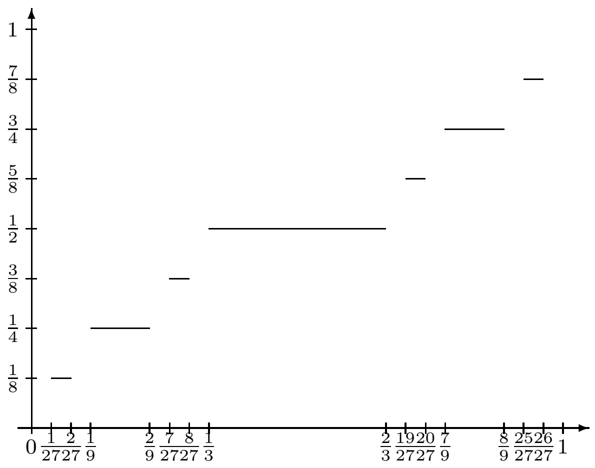
(f) Se $C_0 \subset C$ então $C_0 \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \cap J(\mathbb{R})$;

(g) Existe $C_1 \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $C_1 \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) \cap J(\mathbb{R})$ (Sugestão: note que $\sharp\mathcal{B}(C) < \sharp\mathcal{P}(C)$).

31. Retomando a notação do exercício anterior, considere a função definida para $x \in K = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ por

$$g(x) = \begin{cases} 1/2^n, & \text{se } x \in X_{2^{n-1}} \\ 3/2^n, & \text{se } x \in X_{2^{n-1}+1} \\ \vdots & \\ (2^n-1)/2^n, & \text{se } x \in X_{2^n-1}, \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.



Mostre que:

(a) g toma valores em $[0,1]$, é não-decrescente e contínua;

(b) $g(K)$ é denso em $[0,1]$ e para todo o $x \in [0,1]$ existe o limite $\lim_{u \to x} g(u)$.
Considere a função $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \lim_{u \to x} g(u) \quad (\textit{Função de Cantor}).$$

Mostre que:

(c) $f_{|K} = g$, f é não-decrescente e contínua;

(d) $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.
Seja agora μ a medida de Borel-Stieltjes associada à função

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Mostre que:

(e) $\mu(\{x\}) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;

(f) $\mu(K) = 0$ e $\mu(C) = 1$.

32. (**Regularidade da medida de Lebesgue**) Seja A é um subconjunto de $\mathbb{R}^d$ mensurável à Lebesgue. Mostre que:

(a) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : U \text{ é aberto e } A \subset U\}$;

(b) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ é compacto e } K \subset A\}$.

33. Prove que não existe uma medida μ definida sobre todos os subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^d$ tal que $0 < \mu([0,1]^d) < +\infty$ e $\mu(A+x) = \mu(A)$ para todo o $x \in \mathbb{R}^d$ e A limitado em $\mathbb{R}^d$.

2.10 Bibliografia

Cohn, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

Fernandez, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

Halmos, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. (1961). *Functional Analysis*, Vol. 2, Graylock Press, New York.

Munroe, M.E. (1953). *Introduction to Measure and Integration*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge.

Capítulo 3

Funções mensuráveis

Este capítulo tem na introdução da noção de função mensurável o seu objectivo principal. Particular relevo é dado às funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}$. Neste contexto, as noções de convergência pontual, quase certa e em medida duma sucessão de funções são também estudadas.

3.1 Definição e primeiras propriedades

Para evitar questões de cariz demasiado técnico, suporemos neste e nos próximos capítulos que o conjunto X está munido duma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de partes de X. Relativamente aos dois capítulos anteriores admitiremos assim que o espaço X é um elemento do σ-anel $\mathcal{A}$ (ver Halmos (1950) para uma abordagem que não usa esta hipótese e Weir (1974), pg. 102, para alguns comentários sobre este facto). Quando tal acontece, ao par $(X, \mathcal{A})$ chamamos espaço mensurável. Não havendo dúvida sobre a σ-álgebra considerada em X, indicaremos apenas X em vez de $(X, \mathcal{A})$. Os subconjuntos de X pertencentes a $\mathcal{A}$ dizem-se mensuráveis (não confundir com a noção anterior de conjunto mensurável no sentido de Carathéodory). Se μ é uma medida em $\mathcal{A}$, ao terno $(X, \mathcal{A}, \mu)$ chamamos espaço mensurado ou espaço de medida.

Definição 3.1.1 *Uma função $f : A \subset X \to Y$ definida em $A \in \mathcal{A}$ entre os espaços mensuráveis $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ diz-se mensurável ou $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-mensurável, se para todo o $B \in \mathcal{B}$,*

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\} \in \mathcal{A},$$

isto é, $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ onde $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$.

Dois exemplos de funções mensuráveis reais são os da função indicatriz $\mathbb{1}_A$, quando

$A \in \mathcal{A}$, e o da função escalonada ou simples

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{se } x \in A_i \text{ para algum } i \\ 0 & \text{se } x \notin A_1 \cup \ldots \cup A_k, \end{cases}$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ e $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois. No que se segue, admitiremos que os conjuntos $A_1, \ldots, A_k$ anteriores constituem uma partição de X.

Proposição 3.1.2 *Sejam $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ definida em $A \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$, para alguma classe $\mathcal{C}$ de partes de Y. f é $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-mensurável sse $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.*

Demonstração: Se f é $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-mensurável então claramente $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. reciprocamente, seja $\mathcal{F} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de partes de Y que contém $\mathcal{C}$. Assim, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$, ou ainda, $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. □

Este resultado permite imediatamente concluir que se X e Y são espaços topológicos com topologias T_X e T_Y, então qualquer aplicação contínua de X em Y é mensurável relativamente às σ-álgebras de Borel $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(Y)$. Recordemos que $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ diz-se contínua se $f^{-1}(B) \in T_X$, para todo o $B \in T_Y$.

Proposição 3.1.3 *Se $f : A \subset X \to Y$ e $g : B \subset Y \to Z$ são $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ e $\mathcal{C} - \mathcal{B}$-mensuráveis, respectivamente, com $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ e $f(A) \subset B$, então $g \circ f$ é $\mathcal{C} - \mathcal{A}$-mensurável.*

Demonstração: Basta notar que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$, para $C \in \mathcal{C}$. □

Uma outra aplicação interessante dos resultados anteriores é a seguinte: $f = (f_1, \ldots, f_d)$ é uma aplicação mensurável de $(X, \mathcal{A})$ em $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ sse cada uma das funções f_i, $i = 1, \ldots, d$ for uma aplicação mensurável de $(X, \mathcal{A})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Com efeito, se f é mensurável cada função coordenada de f é a composição de aplicações mensuráveis. A saber, $f_i = \pi_i \circ f$ onde π_i é a função projecção de ordem i (contínua logo mensurável). Reciprocamente, pelos Teorema 1.4.3 e Proposição 3.1.2, basta ter em conta que, para $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d$, $f^{-1}(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i]) = \bigcap_{i=1}^d f_i^{-1}(]a_i, b_i])$ é mensurável pela mensurabilidade de cada função coordenada. Voltaremos mais tarde à questão da mensurabilidade duma aplicação com valores num produto cartesiano.

No que se segue consideraremos, em geral, aplicações definidas em todo o espaço de partida. Tal não restringe a generalidade do estudo pois $f : A \subset X \to Y$, definida em $A \in \mathcal{A}$, é $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-mensurável sse $f : A \to Y$ é $\mathcal{B} - (A \cap \mathcal{A})$-mensurável.

3.2 Funções mensuráveis com valores em $\overline{\mathbb{R}}$

Até final deste capítulo, consideramos apenas funções com valores em $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$. Neste último caso, supomos que $\overline{\mathbb{R}}$ está munido da topologia $\overline{T} = \{A \cup B : A \in T, B \in$

$\{\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\}\}$, onde T é a topologia usual de $\mathbb{R}$, e consideramos em $\overline{\mathbb{R}}$ a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Uma tal σ-álgebra é gerada pela classe $\{A \cup B : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \{\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}\}\}$.

Proposição 3.2.1 *$f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ é $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) - \mathcal{A}$-mensurável sse $f^{-1}([-\infty, t[) \in \mathcal{A}$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Se f é $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) - \mathcal{A}$-mensurável, então $f^{-1}([-\infty, t[) \in \mathcal{A}$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, uma vez que $[-\infty, t[=]-\infty, t[\cup \{-\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Tendo em conta a Proposição 3.1.2, para estabelecer a implicação recíproca basta mostrar que $f^{-1}(\{-\infty\})$, $f^{-1}(\{+\infty\})$ e $f^{-1}(]-\infty, t[)$, para $t \in \mathbb{R}$, estão em $\mathcal{A}$. Tal é verdade pois, $f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, -n[)$, $f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (f^{-1}([-\infty, n[))^c$ e $f^{-1}(]-\infty, t[) = f^{-1}([-\infty, t[) - f^{-1}(\{-\infty\})$. $\square$

O resultado anterior vale ainda com $[-\infty, t]$, $]t, +\infty]$ ou $[t, +\infty]$ em vez de $[-\infty, t[$.

No caso das funções $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ dizemos apenas que f é $\mathcal{A}$-mensurável em vez de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) - \mathcal{A}$-mensurável. Se $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, f diz-se <u>mensurável à Borel</u> e se $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d))$, f diz-se <u>mensurável à Lebesgue</u>.

Proposição 3.2.2 *Se $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são $\mathcal{A}$-mensuráveis então os conjuntos*

$$\{x \in X : f(x) < g(x) + t\}, t \in \mathbb{R}, \quad e \quad \{x \in X : f(x) = g(x)\},$$

são mensuráveis (i.e. pertencem a $\mathcal{A}$).

Demonstração: Basta notar que, para $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < g(x)+t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < g(x) + t\}) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (f^{-1}([-\infty, r[) \cap g^{-1}(]r - t, +\infty]))$. $\square$

Teorema 3.2.3 *Sejam $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-mensuráveis, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então as funções αf, $f + g$, $|f|^\beta$, fg, f/g, $f \vee g$ $[(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))]$ e $f \wedge g$ $[(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))]$ são $\mathcal{A}$-mensuráveis.*

Demonstração: Provamos apenas que αf, com $\alpha \in \mathbb{R}$, e $f+g$ são $\mathcal{A}$-mensuráveis. αf é claramente mensurável uma vez que, para $t \in \mathbb{R}$, $\alpha f = \mathbb{1}_\emptyset$ se $\alpha = 0$, $(\alpha f)^{-1}([-\infty, t[) = f^{-1}([-\infty, t/\alpha[)$, se $\alpha > 0$, e $(\alpha f)^{-1}([-\infty, t[) = f^{-1}(]t/\alpha, +\infty[)$, se $\alpha < 0$. Relativamente a $f + g$, que tem domínio $D = \{x \in X : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}^c \cap \{x \in X : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\}^c \in \mathcal{A}$, temos, para $t \in \mathbb{R}$, $(f + g)^{-1}([-\infty, t[) = \{x \in D : f(x) + g(x) < t\} = D \cap \{x \in X : f(x) < (-g)(x) + t\} \in \mathcal{A}$, pela proposição anterior. $\square$

Sendo $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-mensurável, as funções

$$f^+(x) = (f \vee 0)(x) \quad \text{e} \quad f^-(x) = (-f \vee 0)(x),$$

são $\mathcal{A}$-mensuráveis e dizem-se parte positiva e parte negativa de f, respectivamente. Como $f = f^+ - f^-$, podemos dizer que f é $\mathcal{A}$-mensurável sse f^+ e f^- são $\mathcal{A}$-mensuráveis. Além disso, $|f| = f^+ + f^-$, e assim f é $\mathcal{A}$-mensurável sse $|f|$ é $\mathcal{A}$-mensurável.

3.3 Convergência pontual duma sucessão de funções

Sendo (f_n) uma sucessão de funções de X em $\overline{\mathbb{R}}$ denotamos por $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$ e $\limsup f_n$, as funções de X em $\overline{\mathbb{R}}$ definidas, para $x \in X$, por:

$$\begin{aligned}
\inf f_n(x) &= \inf_{n\geq 1} f_n(x), \\
\sup f_n(x) &= \sup_{n\geq 1} f_n(x), \\
\liminf f_n(x) &= \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} f_k(x) \text{ e} \\
\limsup f_n(x) &= \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_k(x).
\end{aligned}$$

A sucessão (f_n) diz-se convergente no ponto $x \in X$ se $\liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)$. Denotando por A o conjunto dos pontos onde (f_n) é convergente, chamamos limite de f_n à função $\lim f_n$ definida, para $x \in A$, por $\lim f_n(x) = \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)$. Escrevemos também $f_n \to f$.

Dizer que $\lim f_n(x) = f(x)$ para $x \in A$, é assim dizer que
$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
f_n(x) < -\frac{1}{\epsilon}, &\quad \text{se} \quad f(x) = -\infty \\
|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, &\quad \text{se} \quad -\infty < f(x) < +\infty \\
f_n(x) > \frac{1}{\epsilon}, &\quad \text{se} \quad f(x) = +\infty.
\end{aligned}$$

Teorema 3.3.1 *Se (f_n) é uma sucessão de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ então as funções $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ e $\lim f_n$ são $\mathcal{A}$-mensuráveis.*

Demonstração: $\sup f_n$ é mensurável pois, para $t \in \mathbb{R}$, $(\sup f_n)^{-1}([-\infty, t[) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty, t[)$. Atendendo à igualdade $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ e ao Teorema 3.2.3, $\inf f_n$ é também mensurável. Assim, também $\liminf f_n$ e $\limsup f_n$ são mensuráveis. Finalmente, pela Proposição 3.2.2, o domínio A de $\lim f_n$ é mensurável pois $A = \{x \in X : \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\}$ e como $(\lim f_n)^{-1}([-\infty, t[) = A \cap (\liminf f_n)^{-1}([-\infty, t[)$, para $t \in \mathbb{R}$, concluímos que $\lim f_n$ é mensurável. $\square$

Apresentamos agora uma caracterização importante das funções $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})-\mathcal{A}$-mensuráveis. De acordo com o resultado seguinte, tais funções são limite pontual de sucessões de funções escalonadas.

Teorema 3.3.2 *Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, existe uma sucessão (f_n) de funções escalonadas tal que $\lim f_n = f$. Se f é não-negativa, (f_n) pode ser tomada não-decrescente e cada função f_n não-negativa.*

Demonstração: Suponhamos que $f \geq 0$, e para $n \in \mathbb{N}$ consideremos os conjuntos mensuráveis $A_{n,k} = \{x \in X : (k-1)/2^n \leq f(x) < k/2^n\}$, para $k = 1, 2, \ldots, n2^n$. A sucessão (f_n) definida por $f_n(x) = (k-1)/2^n$ se $x \in A_{n,k}$, para algum $k = 1, 2, \ldots, n2^n$, e $f_n(x) = n$ caso contrário, é uma sucessão não-decrescente de funções escalonadas não-negativas que converge para f uma vez que $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 1/2^n$, se $f(x) < +\infty$, e $f_n(x) = n$, se $f(x) = +\infty$. Sendo agora f mensurável, sabemos que $f = f^+ - f^-$, onde f^+ e f^- são mensuráveis não-negativas. Pela primeira parte da demonstração existem sucessões de funções escalonadas não-negativas (g_n) e (h_n) tais que $\lim g_n = f^+$ e $\lim h_n = f^-$. Basta agora tomar $f_n = g_n - h_n$, $n \in \mathbb{N}$. □

Notemos que se f é uma função real $\mathcal{A}$-mensurável, a demonstração apresentada do teorema anterior permite concluir que existe uma sucessão (f_n) de funções escalonadas que converge para f uniformemente em X.

3.4 Convergência quase em todo o ponto

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado. Uma propriedade $P(x)$ relativa aos pontos de X diz-se verdadeira μ-quase em todo o ponto ou μ-quase por toda a parte (μ-q.t.p.), se o conjunto dos pontos x de X onde $P(x)$ é falsa está contido num conjunto de medida μ nula, isto é, se existe $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$, tal que $\{x \in X : P(x) \text{ é falsa}\} \subset N$.

O conjunto $\{x \in X : P(x) \text{ é falsa}\}$ pode não ser mensurável. É-o se μ é completa, isto é, se dados $A \in \mathcal{C}$ com $\mu(A) = 0$ e $B \subset A$ então $B \in \mathcal{C}$.

Assim, quando dizemos que f é μ-quase em todo o ponto contínua, que f e g são μ-quase em todo o ponto iguais, que f é μ-quase em todo o ponto nula, estamos a dizer que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f, onde f e g diferem, ou onde f não é finita, respectivamente, está contido num conjunto de medida nula.

Definição 3.4.1 *Dizemos que uma sucessão (f_n), com $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, converge μ-quase em todo o ponto (ou μ-quase em toda a parte) para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, e escrevemos $f_n \to f$ μ-q.t.p., se $\lim f_n = f$ μ-q.t.p., isto é, se existe $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ tal que $\{x \in X : \lim f_n(x) \neq f(x)\} \subset N$.*

Se μ é uma probabilidade, uma propriedade $P(x)$ relativa aos pontos de X que é verdadeira μ-quase em todo o ponto diz-se verdadeira μ-quase certamente e a convergência quase em todo o ponto diz-se convergência quase certa.

A convergência pontual implica a convergência quase em todo o ponto não sendo o recíproco verdadeiro.

Notemos também que a convergência quase em todo o ponto não implica a unicidade do limite. Por exemplo, as funções definidas em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ por $g = 0$ e $h = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, são limite quase certo da sucessão $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. A transitividade da relação "igualdade quase em todo o ponto" permite concluir que a função limite é univocamente determinada a menos de, quando muito, um conjunto de medida nula:

Proposição 3.4.2 *Sejam (f_n), f e g funções de X em $\overline{\mathbb{R}}$ com $\lim f_n = f$ μ-q.t.p.. Então $\lim f_n = g$ μ-q.t.p. sse $f = g$ μ-q.t.p..*

O limite pontual duma sucessão de funções mensuráveis é, como vimos atrás, uma função mensurável. Tal propriedade não é verdadeira para o limite quase certo. É-o se μ é completa.

Proposição 3.4.3 *Sejam $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tais que $f = g$ μ-q.t.p.. Se μ é completa e f é $\mathcal{A}$-mensurável então g é $\mathcal{A}$-mensurável.*

Demonstração: Por hipótese, existe $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ e $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in N^c$. Assim, para $t \in \mathbb{R}$, $g^{-1}([-\infty, t[) = (\{x \in X : g(x) < t\} \cap N) \cup (\{x \in X : f(x) < t\} \cap N^c)$, onde o primeiro conjunto da reunião é mensurável pela completude de μ e o segundo é-o pela mensurabilidade de f. $\square$

Proposição 3.4.4 *Sejam (f_n) uma sucessão de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tais que $\lim f_n = f$ μ-q.t.p.. Se μ é completa então f é $\mathcal{A}$-mensurável.*

Demonstração: Como $\liminf f_n = f$ μ-q.t.p., e $\liminf f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, concluímos pela proposição anterior que f é também $\mathcal{A}$-mensurável. $\square$

Sabemos que a convergência uniforme implica a convergência pontual. O recíproco não é verdadeiro como atesta o exemplo seguinte: a sucessão $f_n(x) = x^n$ definida para $x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função $f(x) = 0$, se $x \in [0, 1[$, e $f(x) = 1$, se $x = 1$, mas não uniformemente (o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua). No entanto, se considerarmos as funções f_n e f restringidas ao intervalo $[0, 1 - \epsilon]$ com $\epsilon > 0$, a convergência anterior é já uniforme. Tal facto motiva a definição seguinte.

Definição 3.4.5 *A sucessão* (f_n) *de funções reais converge* *quase uniformemente* *para uma função real* f *num conjunto mensurável* $A \subset X$*, se para todo o* $\epsilon > 0$ *existe um mensurável* $F \subset A$ *com* $\mu(A - F) < \epsilon$ *tal que* (f_n) *converge para* f *uniformemente em* F*.*

A convergência uniforme implica a convergência quase uniforme mas o recíproco não é verdadeiro. Num espaço de medida finita a convergência quase em todo o ponto é equivalente à convergência quase uniforme.

Teorema 3.4.6 (de Egorov) *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida finita e* (f_n) *e* f *funções reais* $\mathcal{A}$*-mensuráveis definidas em* X*. Então* f_n *converge quase em todo o ponto para* f *sse* f_n *converge quase uniformemente para* f*.*

Demonstração: Para $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n = \sup_{j \geq n} |f_j - f|$. Como $f_n \to f$ μ-q.t.p., então $g_n \to 0$ μ-q.t.p., e assim, existe $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ e $\lim g_n(x) = 0$ se $x \in N^c$. Para k e n em $\mathbb{N}$, consideremos os conjuntos $F_{k,n} = \bigcap_{m \geq n} \{x \in N^c : 0 \leq g_m(x) < 1/2^k\}$. Para k fixo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{k,n} = X - N$ e sendo μ finita, $\mu(X) = \mu(X - N) = \lim_n \mu(F_{k,n})$. Dado então $\epsilon > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(X - F_{k,n_k}) < \epsilon/2^{k+1}$. Tomando $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{k,n_k}$, temos $\mu(X - F) < \epsilon$ e para $x \in F$, $0 \leq g_m(x) < 1/2^k$ para todo o $k = 1, 2, \ldots$ e $m \geq n_k$. Assim, dado $\delta > 0$, e tomando $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{k_0} < \delta$, temos $0 \leq g_m(x) < \delta$ para todo o $x \in F$ e $m \geq n_{k_0}$. Por outras palavras, $\sup_{x \in F} |f_m(x) - f(x)| < \delta$ para $m \geq n_{k_0}$, isto é, (f_n) converge para f uniformemente em F. Reciprocamente, para $n \in \mathbb{N}$, existe $F_n \in \mathcal{A}$ com $\mu(F_n^c) < 1/n$ e $\sup_{x \in F_n} |f_m(x) - f(x)| \to 0$, $m \to +\infty$. Dado agora $x \in F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $x \in F_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e assim $|f_m(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in F_n} |f_m(x) - f(x)|$, o que permite concluir. $\square$

Nas condições do teorema anterior, se X é um subconjunto de $\mathbb{R}^d$ mensurável à Lebesgue com medida finita, o conjunto F que intervém na definição anterior pode ser tomado fechado atendendo à caracterização dos mensuráveis à Lebesgue em termos de fechados.

Uma aplicação interessante do teorema de Egorov é o teorema de Lusin que dá uma caracterização das funções mensuráveis reais definidas num subconjunto de $\mathbb{R}^d$ mensurável à Lebesgue em termos duma propriedade de continuidade.

Teorema 3.4.7 (de Lusin) *Seja* f *uma função real definida num subconjunto* X *de* $\mathbb{R}^d$ *mensurável à Lebesgue.* f *é* $\overline{\mathcal{B}}(X)$*-mensurável sse para todo o* $\epsilon > 0$ *existe um conjunto fechado* $F \subset X$ *tal que* $\lambda(X - F) < \epsilon$ *e* $f_{|F}$ *é contínua.*

Demonstração: Ver Munroe (1953), pg. 159, e Cohn (1980), pg. 227. $\square$

3.5 Convergência em medida

No parágrafo anterior estudámos a convergência quase em todo o ponto duma sucessão de funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ definidas num espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Vamos neste parágrafo estudar um outro tipo de convergência para sucessões de funções mensuráveis com valores em $\mathbb{R}$ que será bastante utilizado na disciplina de Teoria das Probabilidades.

Definição 3.5.1 *Sejam (f_n) e f funções $\mathcal{A}$-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$. Dizemos que a sucessão $\underline{(f_n) \text{ converge para } f \text{ em medida}}$, e escrevemos $f_n \xrightarrow{\mu} f$, se para todo o $\epsilon > 0$*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\Big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\Big) = 0.$$

Comecemos por provar que o limite em medida duma sucessão de funções é único a menos dum conjunto de medida nula.

Proposição 3.5.2 *Sejam (f_n), f e g funções $\mathcal{A}$-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ com $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Então $f_n \xrightarrow{\mu} g$ sse $f = g$ μ-q.t.p..*

Demonstração: Como $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/n\}$, e $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) = 0$, para todo o $\epsilon > 0$, uma vez que $f_n \xrightarrow{\mu} f$ e $f_n \xrightarrow{\mu} g$, concluímos que $f = g$ μ-q.t.p.. Reciprocamente, se $f = g$ μ-q.t.p., então, para $\epsilon > 0$, $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) \leq \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon, f(x) = g(x)\})$ $+ \mu(\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \epsilon, f(x) \neq g(x)\}) \leq \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to 0, n \to +\infty$. □

A convergência em medida não implica nem é implicada pela convergência quase em todo o ponto (ver Exercícios 3.6.14 e 3.6.15). No caso da medida ser finita temos:

Teorema 3.5.3 *Sejam (f_n) e f funções $\mathcal{A}$-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ e μ finita. Se $f_n \to f$ μ-q.t.p. então $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Demonstração: Tendo em conta o Exercício 3.6.17, $\{x : \lim f_n(x) = f(x)\} \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| < \epsilon\}$, para todo o $\epsilon > 0$. Como por hipótese, $\mu(\{x : \lim f_n(x) \neq f(x)\}) = 0$, obtemos $\mu(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$, ou ainda, pela finitude de μ, $\lim \mu(\bigcup_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$. Assim $\lim \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$. □

Mesmo num espaço de medida finita a recíproca do resultado anterior não é verdadeira (cf. Exercício 3.6.15). É no entanto válido o

Teorema 3.5.4 (de Riesz) *Sejam* (f_n) *e* f *funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis de* X *em* $\mathbb{R}$. *Se* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *então existe uma subsucessão de* (f_n) *que converge para* f μ*-q.t.p..*

Demonstração: Por hipótese $\lim \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$, para todo o $\epsilon > 0$. Tomando sucessivamente $\epsilon = 1/k$, para $k = 1, 2, \ldots$, podemos garantir a existência duma sucessão estritamente crescente de números naturais, (n_k), tal que $\mu(A_k) \leq 1/2^k$, onde $A_k = \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 1/k\}$. Para concluir, basta usar o lema de Borel--Cantelli (Exercício 2.9.10) notando que $\{x : \lim f_{n_k}(x) \neq f(x)\} \subset \limsup A_k$, e que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$. □

3.6 Exercícios

1. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $A \subset X$. Mostre que $\mathbb{I}_A$ é mensurável sse $A \in \mathcal{A}$.
2. Mostre que $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ é escalonada sse é $\mathcal{A}$-mensurável e toma um número finito de valores.
3. Sendo A e B subconjuntos de X, prove que:
   (a) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{I}_A \leq \mathbb{I}_B$;
   (b) $\mathbb{I}_{A \cap B} = \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B$;
   (c) $\mathbb{I}_{A \cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_{A \cap B}$;
   (d) $\mathbb{I}_{A^c} = 1 - \mathbb{I}_A$;
   (e) $\mathbb{I}_{E-F} = \mathbb{I}_A(1 - \mathbb{I}_B)$;
   (f) $\mathbb{I}_{A \triangle B} = |\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B| = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B (mod\ \ 2)$.
4. Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação, $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de partes de Y e $\mathcal{C}$ uma classe de partes de Y. Mostre que:
   (a) $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ é uma σ-álgebra de partes de X;
   (b) $f^{-1}(\mathcal{B})$ é a mais pequena σ-álgebra de partes de X relativamente à qual f é mensurável (dita *σ-álgebra gerada por* f);
   (c) $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$.
5. Para $i \in I$, seja f_i uma aplicação definida em X com valores em $(Y_i, \mathcal{B}_i)$. Denotemos por $\sigma(f_i, i \in I)$ a *σ-álgebra gerada pela família* $\{f_i, i \in I\}$, isto é, a mais pequena σ-álgebra de partes de X relativamente à qual f_i é $\mathcal{B}_i - \sigma(f_i, i \in I)$-mensurável, para $i \in I$. Mostre que
$$\sigma(f_i, i \in I) = \sigma\Big(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\Big).$$
6. Mostre que $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ é mensurável sse $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$ e $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{A}$-mensurável, onde
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| < +\infty \\ 0, & |f(x)| = +\infty. \end{cases}$$

7. Sejam $f : A \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $A \in \mathcal{A}$ onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X. Mostre que f é $\mathcal{A}$-mensurável sse $\bar{f}$ é $\mathcal{A}$-mensurável onde

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

8. Sejam C o conjunto de Cantor (cf. Exercício 2.9.30), $f : [0,1] \to [0,1]$ a função de Cantor (cf. Exercício 2.9.31) e $g : [0,1] \to [0,1]$ a função definida por

$$g(y) = \inf\{x \in [0,1] : f(x) = y\}.$$

   Mostre que:

   (a) $f(g(y)) = y$ para todo o $y \in [0,1]$;

   (b) g é injectiva;

   (c) $g([0,1]) \subset C$;

   (d) g é mensurável à Borel (verifique que basta mostrar que g é não-decrescente);

   (e) Para $A \subset [0,1]$ não-mensurável à Lebesgue, mostre que $g(A)$ é mensurável à Lebesgue mas não é mensurável à Borel.

9. Sendo A um rectângulo semi-aberto à esquerda em $\mathbb{R}^d$, mostre que existe uma sucessão (f_n) de funções contínuas de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$ de suporte compacto tais que $0 \leq f_n \leq \mathbb{1}_E$, para todo o n, onde E é um rectângulo fechado que contém a aderência de A, e $\lim f_n = \mathbb{1}_A$.

10. Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, considere as funções infinitamente diferenciáveis

$$h(x) = \exp\left(-\frac{1}{(x-a)(b-x)}\right) \mathbb{1}_{]a,b[}(x),$$

   e

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(x)dx/H \text{ (integral de Riemann)}$$

   onde $H = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$. Utilize a função g para mostrar que dado um rectângulo A em $\mathbb{R}^d$ semi-aberto à esquerda, existe uma sucessão (f_n) de funções de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$, infinitamente diferenciáveis de suporte compacto com $\lim f_n = \mathbb{1}_A$.

11. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e A, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Mostre que:

   (a) $\limsup \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n}$;

   (b) $\liminf \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}$;

   (c) $\lim \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A$ sse $\lim A_n = A$ sse $A \triangle \limsup A_n = A \triangle \liminf A_n = \emptyset$;

   (d) $\lim \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A$ *q.t.p.* sse $\mu(A \triangle \limsup A_n) = \mu(A \triangle \liminf A_n) = 0$.

12. Sejam (x_n) uma sucessão num espaço X e μ a medida sobre $\mathcal{P}(X)$ definida por $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_n}$. Mostre que $f, g : X \to \mathbb{R}$ coincidem μ-q.t.p. sse $f(x_n) = g(x_n)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

13. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e (f_n) e (g_n) sucessões de funções de X em $\overline{\mathbb{R}}$ tais que $f_n = g_n$ *q.t.p.*. Mostre que $\liminf f_n = \liminf g_n$ *q.t.p.* e $\limsup f_n = \limsup g_n$ *q.t.p.*

14. Mostre que a sucessão $(\mathbb{1}_{[n,+\infty[})$ definida em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ converge pontualmente para a função nula, quando $n \to +\infty$, mas não em medida.

15. Considere a sucessão (f_n) definida em $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$ por $f_n = \mathbb{I}_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[}$, se $n = 2^m + k$ com $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $k \in \{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$. Mostre que f_n converge em medida para a função nula, mas não quase em todo o ponto.
16. Apresente uma demonstração do Teorema 3.5.3 utilizando o Teorema 3.4.6 de Egorov.
17. Sejam (f_n) e f funções reais definidas num espaço mensurado $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

    (a) Mostre que

    $$\begin{aligned}\{x : f_n(x) \to f(x)\} &= \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < 1/k\}.\end{aligned}$$

    (b) Se (f_n) e f são $\mathcal{A}$-mensuráveis, conclua que $\{f_n \to f\}$ é mensurável. Verifique que tal também é verdadeiro se as funções (f_n) e f tomarem valores em $\overline{\mathbb{R}}$.

    (c) Prove que $f_n \to f$, μ-q.t.p. sse para todo o $\epsilon > 0$

    $$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\Big) = 0.$$

    (d) Se μ é finita, mostre que a condição anterior é equivalente a qualquer uma das condições seguintes:

    (i) $\forall\, \epsilon > 0 \quad \mu\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\Big) \to 0,\ k \to +\infty$;

    (ii) $\sup_{n \geq k} |f_n - f| \xrightarrow{\mu} 0,\ k \to +\infty$.

    (e) Se μ é finita, conclua que se $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < +\infty$, para todo o $\epsilon > 0$, então $f_n \to f$, μ-q.t.p..

18. Uma sucessão (f_n) de funções reais definidas num espaço mensurado $(X, \mathcal{A}, \mu)$ diz-se *de Cauchy em quase todo o ponto*, se

    $$\sup_{n,m \geq k} |f_n - f_m| \to 0,\ k \to +\infty\ \mu - q.t.p.$$

    (a) Mostre que as condições seguintes são equivalentes:

    (i) (f_n) é de Cauchy em quase todo o ponto;

    (ii) $f_n \to f$, μ-q.t.p. para alguma função real f definida em X.

    (b) Se as funções $f_n, n \in \mathbb{N}$, são $\mathcal{A}$-mensuráveis, conclua que f pode ser tomada $\mathcal{A}$-mensurável e mostre que as condições anteriores são ainda equivalentes a

    (iii) $\forall\, \epsilon > 0 \quad \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}\Big) = 0$.

19. Uma sucessão (f_n) de funções reais $\mathcal{A}$-mensuráveis definidas num espaço mensurado $(X, \mathcal{A}, \mu)$ diz-se de *Cauchy em medida*, se

    $$\forall\, \epsilon > 0 \quad \sup_{n,m \geq k} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \to 0,\ k \to +\infty.$$

    Mostre que:

(a) Se (f_n) é de Cauchy em medida então existe uma subsucessão de (f_n) que converge quase em todo o ponto para alguma função real $\mathcal{A}$-mensurável;

(Sugestão: i) Conclua que existe uma sucessão (n_k) estritamente crescente de números naturais tal que $\mu(\{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k}\}) < 2^{-k}$, para todo o $k \in \mathbb{N}$. ii) Use o Lema de Borel-Cantelli para mostrar que $\mu(\limsup\{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k}\}) = 0$ iii) Mostre que (f_{n_k}) é quase em todo o ponto de Cauchy);

(b) (f_n) é de Cauchy em medida sse $f_n \xrightarrow{\mu} f$, para alguma função f real e $\mathcal{A}$-mensurável;

(c) Se μ é finita, então $f_n \xrightarrow{\mu} f$ sse toda a subsucessão de (f_n) possui uma subsucessão que converge quase em todo o ponto para f.

20. Sejam (f_n) e f funções reais $\mathcal{A}$-mensuráveis definidas num espaço mensurado $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que:

(a) Se $f_n \to f$, μ-q.t.p. então $g \circ f_n \to g \circ f$, μ-q.t.p.;

(b) Se μ é finita e $f_n \xrightarrow{\mu} f$ então $g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f$.

3.7 Bibliografia

COHN, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

FERNANDEZ, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

HALMOS, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

LOÈVE, M. (1977). *Probability Theory I*, Springer-Verlag, New York.

MUNROE, M.E. (1953). *Introduction to Measure and Integration*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge.

WEIR, A.J. (1974). *General Integration and Measure*, Vol. 2, Cambridge University Press.

Capítulo 4

Integração relativamente a uma medida

Este capítulo é destinado à construção do integral "de Lebesgue" duma função com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ definida num espaço mensurável arbitrário relativamente a uma medida nele definida, e ao estudo das suas principais propriedades. A relação entre os integrais de Riemann e de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ é também estudada.

4.1 O integral duma função escalonada não-negativa

No que se segue $(X, \mathcal{A}, \mu)$ designa um espaço mensurado (ver §3.1). A construção do integral de Lebesgue que a seguir apresentamos desenvolve-se em três etapas. Na primeira definimos o integral duma função escalonada não-negativa, seguidamente, o integral duma função mensurável não-negativa, e por último, o integral de funções mensuráveis de sinal não-constante.

Definição 4.1.1 *Dada uma função escalonada não-negativa $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$, com $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^+$ e $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ partição de X, chamamos integral de f, ao elemento de $[0, +\infty]$ definido por $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i)$ e que denotamos por $\int f d\mu$.*

Se os mensuráveis $A_1, \ldots, A_k$ são disjuntos dois a dois mas não constituem uma partição de X, o integral de f é ainda dado pela expressão anterior, pois, definindo $A_{k+1} = (A_1 \cup \ldots A_k)^c$ e $\alpha_{k+1} = 0$, temos $f = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$ e $\int f d\mu = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i)$ (atendendo às convenções adoptadas em §2.1, tal é verdade mesmo que $\mu(A_{k+1}) = +\infty$).

Notemos ainda que o integral depende apenas de f e de μ e não de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ou de $A_1, \ldots, A_k$. Com efeito, se f admite também a representação $f = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{I}_{B_j}$, com $B_1, \ldots, B_m$ partição de X, temos $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$.

Denotaremos por $\mathcal{E}_+(X,\mathcal{A})$, ou apenas por $\mathcal{E}_+$, o conjunto das funções escalonadas não-negativas definidas em X.

Proposição 4.1.2 *Para $f,g \in \mathcal{E}_+$ e $\alpha \in \mathbb{R}^+$:*
a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ (homogeneidade);
b) $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ (aditividade);
c) Se $f \leq g$ então $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ (monotonia).

Demonstração: Sejam $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$ e $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{I}_{B_j}$. Tendo em conta que $\alpha f = \sum_{i=1}^n (\alpha\alpha_i)\mathbb{I}_{A_i}$ e $f+g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i+\beta_j)\mathbb{I}_{A_i\cap B_j}$, temos $\int \alpha f d\mu = \sum_{i=1}^n (\alpha\alpha_i)\mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \int f d\mu$ e $\int (f+g)d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu$. Finalmente, se $f \leq g$ então $g - f \in \mathcal{E}_+$ e pela alínea b) $\int g d\mu = \int (f + (g-f))d\mu = \int f d\mu + \int (g-f)d\mu \geq \int f d\mu$. $\square$

Teorema 4.1.3 (de Beppo Levi) *Sejam (f_n) uma sucessão crescente de elementos em $\mathcal{E}_+$ e $f \in \mathcal{E}_+$. Se $\lim f_n \geq f$ então $\lim \int f_n d\mu \geq \int f d\mu$.*

Demonstração: Para $c \in]0,1[$, fixo, consideremos a sucessão de mensuráveis $B_n = \{x : f_n(x) \geq cf(x)\} \uparrow X$. Para $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq cf\mathbb{I}_{B_n} = \sum_{i=1}^k c\alpha_i \mathbb{I}_{A_i\cap B_n}$, onde $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$. Pela monotonia do integral, $\int f_n d\mu \geq c\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap B_n)$, ou ainda, $\lim \int f_n d\mu \geq c\sum_{i=1}^k \alpha_i \lim \mu(A_i \cap B_n) = c\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = c\int f d\mu$. $\square$

Corolário 4.1.4 *Se (f_n) e f são escalonadas não-negativas e $f_n \uparrow f$ então $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.*

4.2 O integral duma função mensurável não-negativa

Denotemos por $\mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$, ou simplesmente por $\mathcal{M}_+$, o conjunto das funções mensuráveis de $(X,\mathcal{A})$ em $([0,+\infty],\mathcal{B}([0,+\infty]))$ onde em $[0,+\infty]$ consideramos a topologia relativa (ver §3.2).

Definição 4.2.1 *Para $f \in \mathcal{M}_+$, chamamos integral de f ao elemento de $[0,+\infty]$ dado por $\int f d\mu = \sup\left\{\int g d\mu : g \in \mathcal{E}_+ \text{ e } g \leq f\right\}$.*

No que se segue, estudamos algumas propriedades do integral agora definido. Começamos por uma generalização parcial do Corolário 4.1.4 que conjuntamente com o Teorema 3.3.2 é de grande utilidade no que se segue.

Proposição 4.2.2 *Se $f \in \mathcal{M}_+$ e $(f_n) \subset \mathcal{E}_+$ com $f_n \uparrow f$ então $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.*

Demonstração: Como $f_n \leq f$ e $f_n \in \mathcal{E}_+$, então $f_n \in \beta = \{g : g \in \mathcal{E}_+ \text{ e } g \leq f\}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\int f d\mu \geq \int f_n d\mu$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $\int f d\mu \geq \lim \int f_n d\mu$. Por outro lado, para $g \in \beta$, qualquer, temos $g \leq f = \lim f_n$ e $g \in \mathcal{E}_+$. Pelo Lema de Beppo Levi, $\lim \int f_n d\mu \geq \int g d\mu$, e assim $\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$. $\square$

Proposição 4.2.3 *Para $f, g \in \mathcal{M}_+$ e $\alpha \in \mathbb{R}^+$:*
a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$;
b) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$;
c) Se $f \leq g$ então $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Demonstração: Se $f \in \mathcal{M}_+$, sabemos pelo Teorema 3.3.2 que existe $(f_n) \subset \mathcal{E}_+$ tal que $f_n \uparrow f$. Então $\alpha f_n \uparrow \alpha f$, com $(\alpha f_n) \subset \mathcal{E}_+$ e $\alpha f \in \mathcal{M}_+$. Pela proposição anterior, $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$ e $\int \alpha f_n d\mu \uparrow \int \alpha f d\mu$. Para obter a), basta agora notar que, pela Proposição 4.1.2, $\int \alpha f_n d\mu = \alpha \int f_n d\mu$. De forma análoga obtem-se b). A monotonia do integral expressa em c), é consequência imediata da definição de supremo. $\square$

Teorema 4.2.4 (da convergência monótona) *Se (f_n) e f são mensuráveis não--negativas e $f_n \uparrow f$ então $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.*

Demonstração: Comecemos por notar que basta mostrar que $\lim \int f_n d\mu \geq \int f d\mu$, ou ainda, pela Proposição 4.2.2, que existe $(h_n) \subset \mathcal{E}_+$ tal que $h_n \leq f_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $h_n \uparrow f$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, e sendo f_m mensurável não-negativa, existe $(h_{m,n}) \subset \mathcal{E}_+$ tal que $h_{m,n} \uparrow f_m$, quando $n \to +\infty$. Tomando $h_n = \sup_{1 \leq m \leq n} h_{m,n}$, para $n \in \mathbb{N}$, (h_n) é claramente uma sucessão não-decrescente de funções escalonadas não-negativas com $h_n \leq f_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $\lim h_n \leq \lim f_n = f$. Além disso, para $m \in \mathbb{N}$, fixo, $\lim h_n \geq \lim h_{m,n} = f_m$, e assim $\lim h_n \geq \lim f_m = f$. $\square$

Corolário 4.2.5 *Se $(f_n) \subset \mathcal{M}_+$ então*

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k d\mu.$$

4.3 Funções integráveis

Denotemos por $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ou apenas por $\mathcal{M}$ o conjunto das funções mensuráveis de $(X, \mathcal{A})$ em $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Definição 4.3.1 *Dizemos que $f \in \mathcal{M}$ é <u>integrável</u> ou <u>μ-integrável</u> se $\int f^+ d\mu < +\infty$ e $\int f^- d\mu < +\infty$. Neste caso, o <u>integral de f</u>, $\int f d\mu$, é definido por $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.*

Concluímos assim que $f \in \mathcal{E}_+$ é integrável sse $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) < +\infty$. Se $f \in \mathcal{M}_+$, então $f = f^+$ e assim f é integrável sse $\int f d\mu < +\infty$.

Definição 4.3.2 (de integral num subconjunto mensurável) *A) Dizemos que* $\underline{f \in \mathcal{M}\text{ é integrável em } A \in \mathcal{A}}$ *quando* $f\mathbb{I}_A$ *for integrável. Neste caso,* $\int f\mathbb{I}_A d\mu$ *é denotado por* $\int_A f d\mu$ *e diz-se* $\underline{\text{integral de } f \text{ em } A}$. *B) Uma função* $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$*-mensurável definida em* $A \in \mathcal{A}$ *diz-se integrável se a função* $\bar{f}(x) = f(x)$ *se* $x \in A$ *e* $\bar{f}(x) = 0$ *se* $x \notin A$, *é integrável. O integral de* f *é dado por* $\int \bar{f} d\mu$ *e é denotado por* $\int_A f d\mu$. *Num e noutro caso, escrevemos* $\int f d\mu$ *em vez de* $\int_A f d\mu$ *sempre que* $\mu(A^c) = 0$.

Se f não é integrável mas um dos integrais $\int f^+ d\mu$ ou $\int f^- d\mu$, é finito, f diz-se quase-integrável ou μ-quase-integrável. Neste caso, o integral de f é definido por $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$. As funções quase-integráveis são assim aquelas que apesar de não serem integráveis possuem integral dado pela igualdade anterior. A Definição 4.3.2 estende-se de forma óbvia ao caso das funções quase-integráveis.

Proposição 4.3.3 (critérios de integrabilidade) *Para* $f \in \mathcal{M}$ *são equivalentes as seguintes proposições:*

i) f *é integrável;*

ii) $\exists\, g, h \in \mathcal{M}_+$ *integráveis* : $f = g - h$;

iii) $\exists\, g \in \mathcal{M}_+$ *integrável* : $|f| \leq g$;

iv) $|f|$ *é integrável.*

Demonstração: Provamos apenas que $iv) \Rightarrow i)$. Como $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$ e $\int |f| d\mu < +\infty$, então $\int f^+ d\mu < +\infty$ e $\int f^- d\mu < +\infty$, isto é, f é integrável. $\square$

Notemos que a equivalência $i) \Leftrightarrow iv)$ não é válida para o integral de Riemann em $\mathbb{R}^d$ (verifica-se no entanto a implicação $i) \Rightarrow iv)$, cf. Teorema 0.4.3).

Proposição 4.3.4 *Se* $f \in \mathcal{M}$ *é integrável então* $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

Demonstração: Sendo f integrável, $|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$. $\square$

Proposição 4.3.5 *Sejam* $f, g \in \mathcal{M}$ *com* $f = g$ μ*.q.c.*

a) Se $f, g \in \mathcal{M}_+$ *então* $\int f d\mu = \int g d\mu$.

b) Se f *é integrável então* g *é integrável e vale a igualdade anterior.*

c) $\int |f| d\mu = 0$ *sse* $f = 0$ μ*-q.t.p..*

Demonstração: Por hipótese o conjunto $N = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ é mensurável e $\mu(N) = 0$. Assim, a função definida por $h(x) = +\infty$, se $x \in N$, e $h(x) = 0$, se

$x \notin N$, é mensurável e $\int h d\mu = 0$ (ver Exercício 4.7.1). A alínea a) é agora uma consequência imediata das desigualdades $g \leq f + h$ e $f \leq g + h$, e da monotonia do integral em $\mathcal{M}_+$. Decompondo f e g nas suas partes positiva e negativa, obtemos b) por aplicação de a). Ainda por aplicação de a) concluímos que $\int |f| d\mu = 0$ se $f = 0$ μ-q.t.p.. Reciprocamente, suponhamos que $\int f d\mu = 0$ para $f \in \mathcal{M}_+$. Se f é escalonada, isto é, se $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$, com $\alpha_i \geq 0$ e $A_i \in \mathcal{A}$, então $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = 0$ e $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) \leq \sum_{i:\alpha_i \neq 0} \mu(A_i) = 0$. Se f é mensurável não-negativa, existe $(f_n) \subset \mathcal{E}_+$ tal que $f_n \uparrow f$ e $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu = 0$. Assim, $\int f_n d\mu = 0$, ou ainda $f_n = 0$ μ-q.t.p., o que implica que $f = 0$ μ-q.t.p.. $\square$

Tendo em conta a proposição anterior, os critérios de integrabilidade ii) e iii) podem falhar em subconjuntos de conjuntos de medida nula sem que isso altere as conclusões.

No que se segue, denotaremos por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, ou simplesmente por $\mathcal{L}^1(\mu)$, o subconjunto de $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ das funções integráveis com valores em $\mathbb{R}$.

Teorema 4.3.6 *a) O conjunto $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ é um espaço vectorial real (com a soma e produto escalar definidos da forma habitual).*

b) A aplicação $f \to \int f d\mu$ de $\mathcal{L}^1(\mu)$ em $\mathbb{R}$ é uma forma linear positiva, isto é, $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ e $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$, para $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\int f d\mu \geq 0$ se $f \geq 0$.

Demonstração: O conjunto $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ é claramente um espaço vectorial real, uma vez que $|f + g| \leq |f| + |g|$ e $|\alpha f| \leq |\alpha||f|$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Das propriedades enunciadas em b) demonstramos apenas a primeira delas. Consideremos a dupla igualdade $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-) = (f + g)^+ - (f + g)^-$, que permite obter a igualdade $(f + g)^+ + (f^- + g^-) = (f + g)^- + (f^+ + g^+)$. Pela aditividade do integral em $\mathcal{M}_+$ temos $\int (f + g)^+ d\mu + \int (f^- + g^-) d\mu = \int (f + g)^- d\mu + \int (f^+ + g^+) d\mu$, ou ainda $\int (f + g) d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$. $\square$

Em consequência da Proposição 4.3.5, se considerarmos em $\mathcal{L}^1(\mu)$ a relação de equivalência $f \sim g$ sse $f = g$ μ-q.t.p., o conjunto quociente $\mathcal{L}^1(\mu)/\sim$, isto é, o conjunto das classes de equivalência determinadas em $\mathcal{L}^1(\mu)$ por $\sim$, é um espaço vectorial real (para a soma e o produto escalar definidos da forma usual) e a aplicação $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu)/\sim \to \mathbb{R}^+$ definida por $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$ é uma norma, isto é, para todo o $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ são válidas as propriedades N1) $\|f\|_1 = 0$ sse $f = 0$, N2) $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$ e N3) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Qualquer espaço vectorial real (ou complexo) X munido duma aplicação $\|\cdot\|$, dita norma, que satisfaz as propriedades anteriores diz-se um espaço vectorial normado. O conjunto quociente $\mathcal{L}^1(\mu)/\sim$, que denotaremos por $L^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ ou $L^1(\mu)$, é assim um espaço vectorial normado. Um espaço vectorial normado é também um espaço métrico para a métrica definida, para $x, y \in X$, por $d(x,y) = \|x - y\|$.

4.4 Teoremas de convergência

Incluímos neste parágrafo alguns resultados fundamentais de convergência. Começamos por generalizar o Teorema 4.2.4.

Teorema 4.4.1 (da convergência monótona) *Sejam f e (f_n) em $\mathcal{M}_+$ tais que $f_n \uparrow f$, μ-q.t.p. Então $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.*

Demonstração: Por hipótese, $N^c = \{x : f_n(x) \to f(x)\} \in \mathcal{A}$ e $\mu(N) = 0$. Como $f_n \mathbb{I}_{N^c} \uparrow f \mathbb{I}_{N^c}$, o resultado é consequência imediata do Teorema 4.2.4 e da Proposição 4.3.5. $\square$

Lema 4.4.2 (de Fatou) *Se $(f_n) \subset \mathcal{M}_+$ então $\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.*

Demonstração: Seja $g_n = \inf_{m \geq n} f_m$, para $n \in \mathbb{N}$. Temos $g_n \in \mathcal{M}_+$ e $g_n \uparrow \liminf f_n$. Assim, $\lim \int g_n d\mu = \int \liminf f_n d\mu$. Finalmente, como $g_n \leq f_n$ então $\liminf \int f_n d\mu \geq \liminf \int g_n d\mu = \int \liminf f_n d\mu$. $\square$

Teorema 4.4.3 (da convergência dominada de Lebesgue) *Sejam (f_n) e f em $\mathcal{M}$ e g integrável em $\mathcal{M}_+$ tais que*

a) $f_n \to f$, μ-q.t.p.

b) $|f_n| \leq g$, μ-q.t.p. para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Então $f, f_1, f_2, \ldots$ são integráveis e $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Demonstração: De b) e da desigualdade $|f| = |\lim f_n| = \lim |f_n| \leq |g|$, μ-q.t.p., concluímos que $f, f_1, f_2, \ldots$ são integráveis. De a) e b), existe $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ tal que para $x \notin N$, $\lim f_n(x) = f(x)$ e $|f_n(x)| \leq g(x) < +\infty$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assim, as funções definidas por $f_n^* = f_n \mathbb{I}_{N^c}$, $n \in \mathbb{N}$, $f^* = f \mathbb{I}_{N^c}$ e $g^* = g \mathbb{I}_{N^c}$, satisfazem $\lim f_n^*(x) = f^*(x)$ e $|f_n^*(x)| \leq g^*(x)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Aplicando o Lema de Fatou às sucessões $(g^* + f_n^*)$ e $(g^* + f_n^*)$, obtemos $\int f^* d\mu \leq \liminf \int f_n^* d\mu$ e $\limsup \int f_n^* d\mu \leq \int f^* d\mu$, respectivamente. Assim, $\lim \int f_n^* d\mu = \int f^* d\mu$, o que permite concluir pois $f_n^* = f_n$ e $f^* = f$, μ-q.t.p.. $\square$

Notemos que se (f_n) e f são funções $\mathcal{A}$-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$, o Teorema 3.5.4 permite concluir que o resultado anterior contínua válido se a convergência quase certa em a) for substituída pela convergência em medida.

4.5 Integração e completamento

Sendo $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ o completamento de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ então $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \subset \mathcal{L}^1(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ e $\int f d\mu = \int f d\bar{\mu}$ para $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (ver Exercício 4.7.16). O resultado seguinte permite concluir que quando passamos aos espaços quocientes, estes podem ser identificados: existe uma bijecção entre $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $L^1(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ que preserva o integral.

Teorema 4.5.1 *Se $g : X \to \mathbb{R}$ é $\bar{\mathcal{A}}$-mensurável então existe $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mensurável tal que $f = g$ $\bar{\mu}$-q.t.p. (ou equivalentemente $f = g$ μ-q.t.p.). Além disso, g é $\bar{\mu}$-integrável sse f é μ-integrável e $\int g d\bar{\mu} = \int f d\mu$.*

Demonstração: Se $g \in \mathcal{E}(\bar{\mathcal{A}})$, facilmente se conclui que existe $f \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ tal que $f = g$ μ-q.t.p.. O Teorema 3.3.2 permite agora obter o resultado para $g \in \mathcal{M}(\bar{\mathcal{A}})$. Se além disso g é integrável então $\int g d\bar{\mu} = \int f d\bar{\mu} = \int f d\mu$ (cf. Exercício 4.7.16). $\square$

A bijecção ϕ de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ em $L^1(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ é então definida por $\phi(f) = f$.

Notemos que o resultado anterior vale também para funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}$.

4.6 Integrais de Lebesgue e de Riemann em $\mathbb{R}^d$

Sendo $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável à Lebesgue e (A_n) uma qualquer sucessão de mensuráveis à Lebesgue com $A_n \uparrow \mathbb{R}^d$ sabemos, pelo Teorema 4.2.4, que $\lim \int_{A_n} |f| d\lambda = \int |f| d\lambda$, e assim f é integrável à Lebesgue (isto é, integrável relativamente à medida de Lebesgue) sse $\lim \int_{A_n} |f| d\lambda < +\infty$. No caso de f ser integrável, pelo teorema da convergência dominada, $\int f d\lambda = \lim \int_{A_n} f d\lambda$.

O resultado seguinte, permitir-nos-á estudar a integrabilidade à Lebesgue duma função, bem como o cálculo do respectivo integral, a partir do integral de Riemann (caso este exista).

Teorema 4.6.1 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ limitada e definida em $A \in J(\mathbb{R}^d)$. Se f é integrável à Riemann em A então f é integrável à Lebesgue em A e $\int_A f d\lambda = \int_A f dx$.*

Demonstração: Seja $\bar{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a função definida por $\bar{f}(x) = f(x)$, se $x \in A$, e $\bar{f}(x) = 0$, se $x \notin A$. Como $|\bar{f}| \leq \sup_{x \in A} |f(x)| \mathbb{1}_A$ e A é de medida de Lebesgue finita, concluímos que $\bar{f}$ é integrável em $\mathbb{R}^d$. Atendendo à Definição 4.3.2, f é integrável à Lebesgue em A. Por definição de integral de Riemann, $\int_A f dx = \int_B f^*(x) dx$, onde B é um rectângulo fechado que contém A e $f^* : B \to \mathbb{R}$ é definida por $f^*(x) = f(x)$, se $x \in A$, e $f^*(x) = 0$, se $x \notin A$. Sendo agora P uma partição de $B = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ e $R(P)$ o conjunto dos rectângulos determinados em B por P, temos para $x \in B$,

$$g(x) := \sum_{R \in R(P)} \inf_{x \in R} f^*(x) \mathbb{1}_{R'}(x) \leq f^*(x) \leq \sum_{R \in R(P)} \sup_{x \in R} f^*(x) \mathbb{1}_{R'}(x) =: h(x),$$

onde, para $R=\prod_{i=1}^d[c_i,d_i]\in R(P)$, R' é definido por $R'=\prod_{i=1}^d(]c_i,d_i]\cup C_i)$ onde $C_i=\emptyset$ se $c_i\neq a_i$, e $C_i=\{c_i\}$ se $c_i=a_i$. Denotando por $\bar{g}$, $\bar{f}^*$ e $\bar{h}$, as funções de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$, definidas de modo análogo a $\bar{f}$, temos, pela monotonia do integral, $\int\bar{g}d\lambda\leq\int\bar{f}^*d\lambda\leq\int\bar{h}d\lambda$, ou seja,

$$\sum_{R\in R(P)}\inf_{x\in R}f^*(x)\lambda(R)\leq\int\bar{f}^*d\lambda\leq\sum_{R\in R(P)}\sup_{x\in R}f^*(x)\lambda(R).$$

Assim,

$$\underline{s}(f^*,P)\leq\int_A fd\lambda\leq\overline{s}(f^*,P),$$

o que permite concluir que $\int_A fd\lambda=\int_B f^*dx$. $\square$

Concluímos assim que se $f\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d,\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d))$ (f é mensurável à Lebesgue) e (A_n) é uma sucessão de conjuntos em $J(\mathbb{R}^d)$ com $A_n\uparrow\mathbb{R}^d$, então sendo f limitada e integrável à Riemann em cada A_n, f é integrável à Lebesgue (em $\mathbb{R}^d$) sse $\lim\int_{A_n}|f|dx<+\infty$. Nesse caso, $\int fd\lambda=\lim\int_{A_n}fdx$.

4.7 Exercícios

1. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço mensurado, $A\in\mathcal{A}$, $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-mensurável e $g,h:X\to\overline{\mathbb{R}}$ definidas por

$$g(x)=\begin{cases}+\infty, & x\in A\\ 0, & x\notin A.\end{cases}\quad \text{e}\quad h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

   Mostre que:

   (a) g e h são mensuráveis;
   (b) g é integrável sse $\mu(A)=0$ e nesse caso $\int gd\mu=0$;
   (c) Se f é integrável prove que $|f|<+\infty$ q.t.p.;
   (d) Se $\mu(A)=0$ então h é integrável e $\int hd\mu=0$.

2. Sejam μ a medida contagem sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, e $f:\mathbb{N}\to\overline{\mathbb{R}}$ mensurável. Prove que:

   (a) Se f é não-negativa então $\int fd\mu=\sum_{n=1}^\infty f(n)$;
   (b) f é integrável sse $\sum_{n=1}^\infty|f(n)|<\infty$;
   (c) Se f é integrável então $\int fd\mu=\sum_{n=1}^\infty f(n)$;
   (d) f é quase-integrável sse ocorre um dos casos seguintes:
      i. $\sum_{n:f(n)<0}|f(n)|<\infty$ e $\sum_{n:f(n)>0}f(n)=\infty$;
      ii. $\sum_{n:f(n)>0}f(n)<\infty$ e $\sum_{n:f(n)<0}|f(n)|=\infty$.

3. Sejam X um conjunto arbitrário e μ a medida sobre $\mathcal{P}(X)$ definida por $\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\delta_{a_i}$ com $\alpha_i\in\mathbb{R}^+$ e $a_i\in X$ para $i=1,\ldots,n$. Mostre que, para $f:X\to\mathbb{R}$, $\int fd\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_if(a_i)$.

4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável.
   (a) (**Desigualdade de Tchebychev-Markov**) Se $f \in \mathcal{M}_+$ e $p, t > 0$, mostre que $\mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int f^p d\mu$.
   (b) Usando a alínea (a) mostre que:
      i. f é integrável $\Rightarrow |f| < +\infty$ q.t.p.;
      ii. $\int |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ q.t.p.
5. Mostre que se $(f_n) \subset \mathcal{M}_+$ é tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \int f_k d\mu < +\infty$ então $f_n \to 0$, μ-q.t.p.
6. Seja f uma função μ-integrável definida em $(X, \mathcal{A})$. Mostre que
$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, A \in \mathcal{A} \,:\, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon.$$
7. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado.
   (a) Mostre que $f \in \mathcal{M}$ é integrável sse existe $g \in \mathcal{L}^1$ tal que $f = g$ μ-q.t.p.
   (b) Sejam $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integráveis. Mostre que:
      i. $f + g$ é integrável e $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$;
      ii. se $f \leq g$ então $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
8. Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrável é tal que $\int_A f d\mu = 0$ para todo o $A \in \mathcal{A}$, mostre que $f = 0$ q.t.p..
9. Considere a sucessão (f_n) de funções reais de variável real definida por $f_n = \frac{1}{n} 1\!\!1_{[0,n]}$. Mostre que:
   (a) (f_n) converge (uniformemente) para $f = 0$, quando $n \to +\infty$;
   (b) $\lim \int f_n d\lambda \neq \int f d\lambda$.

   Porque não há contradição com o teorema da convergência dominada?
10. Considere a sucessão (f_n) definida, para $x \in [0,1]$, por $f_n(x) = n^2 x 1\!\!1_{[0,1/(2n))} + n(1 - nx) 1\!\!1_{]1/(2n),1/n]}$, e seja λ a medida de Lebesgue em $[0,1]$. Mostre que:
   (a) f_n é λ-integrável e converge para $f = 0$;
   (b) $\lim \int f_n d\lambda = \frac{1}{4}$.

   "Falhará" o teorema da convergência dominada de Lebesgue?
11. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e f e (f_n) funções em $\mathcal{M}_+$ tais que $f_n \downarrow f$, μ-q.t.p. com $\int f_1 d\mu < +\infty$. Mostre que $\int f_n d\mu \downarrow \int f d\mu$.
12. Mostre que se f, definida em $(X, \mathcal{A})$, é μ-integrável então $\lim \int_{\{x : |f(x)| \geq n\}} f d\mu = 0$.
13. Seja (u_{np}) uma sucessão duplamente indexada de números reais tal que
    a) $\lim_{n \to \infty} u_{np} = u_p$, para todo o $p \in \mathbb{N}$;
    b) $|u_{np}| \leq v_p$ para todo o $n, p \in \mathbb{N}$ e $\sum_{p=1}^{\infty} v_p < \infty$.

    Mostre que $\sum_{p=1}^{\infty} |u_{np}| < \infty$, $\sum_{p=1}^{\infty} |u_p| < \infty$ e $\lim \sum_{p=1}^{\infty} u_{np} = \sum_{p=1}^{\infty} u_p$.
    (Sugestão: aplique o teorema da convergência dominada sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ onde μ é a medida contagem).

14. (**Limite sob o sinal de integral**) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$, f uma aplicação real definida em $X \times U$ e y_0 fixo em U. Se:
a) para cada $x \in X$, o limite $\lim_{y \to y_0} f(x, y)$ existe;
b) existe uma função $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que, para todo o $y \in U$, $|f(\cdot, y)| \leq g(\cdot)$;
mostre que
$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x, y) d\mu(x).$$
15. (**Derivação sob o sinal de integral**) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$, f uma aplicação real definida em $X \times U$ e y_0 fixo em U. Se:
a) para cada $y \in U$, a função $x \to f(x, y)$ está em $\mathcal{L}^1(\mu)$;
b) para cada $x \in X$, a derivada parcial $y \to \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)$ existe numa vizinhança do ponto y_0;
c) existe uma função $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que, para todo o $y \in U$, $|\frac{\partial f}{\partial y_i}(\cdot, y)| \leq g(\cdot)$;
mostre que o integral paramétrico é diferenciável em y_0 relativamente à variável y_i e
$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\int_X f(x, y) d\mu(x)\Big)_{|y=y_0} = \int_X \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y_0) d\mu(x).$$
16. Sejam $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ o completamento de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-mensurável. Mostre que:
   (a) f é $\bar{\mathcal{A}}$-mensurável;
   (b) se f é não-negativa então $\int f d\mu = \int f d\bar{\mu}$;
   (c) f é μ-integrável sse f é $\bar{\mu}$-integrável e $\int f d\mu = \int f d\bar{\mu}$.
17. Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$
Mostre que f não é integrável à Riemann mas é integrável à Lebesgue.
18. Calcule $\int_{[0,+\infty[} e^{-x} d\lambda(x)$ e mostre que $\int_0^n \big(1 - \frac{x}{n}\big)^n dx \to 1, n \to +\infty$.
19. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ e $g(x) = x f(x)$. Mostre que:
   (a) $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ e $\int f d\lambda = 1$;
   (b) $\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^a g(x) dx = 0$;
   (c) $g \notin \mathcal{L}_1(\lambda)$.
20. Seja $f(x, y) = 1/(x - y)$ definida em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y < x\}$. Mostre que f não é integrável à Lebesgue.

4.8 Bibliografia

Cohn, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

Fernandez, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

Halmos, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

Pozo, M.A.J. (1989). *Medida, Integración y funcionales*, Editorial Pueblo y Educación, Habana.

Capítulo 5

Os espaços $\mathcal{L}^p$ e L^p de Lebesgue

No capítulo anterior definimos o espaço vectorial $\mathcal{L}^1$ das funções integráveis com valores em $\mathbb{R}$ e o espaço vectorial L^1 que se obtém de $\mathcal{L}^1$ identificando funções que diferem num conjunto de medida nula. Neste capítulo definimos, para $p \in]0, +\infty]$, os espaços $\mathcal{L}^p$ e L^p de Lebesgue das funções de potência p integrável e obtemos algumas das suas principais propriedades.

5.1 Funções convexas e desigualdade de Jensen

Definição 5.1.1 *Uma função real φ definida no intervalo $]a, b[$, com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, diz-se convexa, se*

$$\varphi((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y),$$

para todo o $x, y \in]a, b[$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Notemos que uma função φ é convexa em $]a, b[$ sse $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$, para todo o $s, t, u \in]a, b[$ com $s < t < u$.

Proposição 5.1.2 *Se $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ é convexa, então é contínua em $]a, b[$.*

Demonstração: Sejam x, x_1, x_2, x_3, x_4 em $]a, b[$ com $x_1 < x_2 < x < x_3 < x_4$ e (s_n) e (t_n) sucessões em $]a, b[$ convergentes para x com $s_n < x < t_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Pela convexidade de φ e para n suficientemente grande,

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(s_n)}{x - s_n} \leq \frac{\varphi(t_n) - \varphi(x)}{t_n - x} \leq \frac{\varphi(x_4) - \varphi(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

As sucessões $(\frac{\varphi(x)-\varphi(s_n)}{x-s_n})$ e $(\frac{\varphi(t_n)-\varphi(x)}{t_n-x})$ são assim limitadas o que permite concluir. $\square$

Proposição 5.1.3 *Se $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ é convexa, então para cada ponto $t \in]a,b[$ existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(s) \geq \varphi(t) + m(s-t)$, para todo o $s \in]a,b[$.*

Demonstração: Para $t \in]a,b[$, sejam $\alpha_t = \sup_{a<s<t} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$ e $\beta_t = \sup_{t<u<b} \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$. Pela convexidade de φ, $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \beta_t$, para todo o $s < t$, e $\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \geq \alpha_t$, para todo o $u > t$, ou ainda, $\varphi(s) \geq \varphi(t)+\beta_t(s-t)$, para todo o $s < t$, e $\varphi(u) \geq \varphi(t)+\alpha_t(u-t)$, para todo o $u > t$. Para concluir, basta escolher $m \in [\alpha_t, \beta_t]$ (reparar que se φ é diferenciável em t então $\alpha_t = \beta_t = \varphi'(t)$). $\square$

Teorema 5.1.4 (desigualdade de Jensen) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade ($\mu(X) = 1$). Se $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$, com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, é uma aplicação convexa e $f : X \to \mathbb{R}$, com $f(X) \subset]a,b[$, é $\mathcal{A}$-mensurável e integrável então*

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu.$$

Demonstração: Pela proposição anterior, para cada $t \in]a,b[$, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi \circ f \geq \varphi(t) + m(f-t). \tag{5.1.5}$$

Sendo f integrável e $\mu(X) = 1$, a função $h = \varphi(t) + m(f-t)$ é integrável, o mesmo acontecendo com a função $(\varphi \circ f)^-$, pois $(\varphi \circ f)^- \leq h^-$. O resultado é assim trivialmente verdadeiro se $\int (\varphi \circ f)^+ d\mu = +\infty$. Se $\int (\varphi \circ f)^+ d\mu < +\infty$, por integração de (5.1.5) obtemos $\int \varphi \circ f d\mu \geq \varphi(t) + m(\int f d\mu - t)$, o que permite concluir, bastando para tal tomar $t = \int f d\mu \in]a,b[$. $\square$

5.2 Os espaços $\mathcal{L}^p$ e L^p

Para $p \in]0, +\infty[$, vamos denotar por $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, ou por $\mathcal{L}^p(\mu)$, o conjunto de todas as funções $\mathcal{A}$-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável. Dizemos então que f é de potência p integrável. $\mathcal{L}^p(\mu)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ pois para $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $|f+g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \in \mathcal{L}^1$ e $|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p \in \mathcal{L}^1$. Denotaremos por $\|\cdot\|_p$ a aplicação de $\mathcal{L}^p(\mu)$ em $\mathbb{R}^+$ definida por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = +\infty$, vamos denotar por $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, ou por $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, o conjunto de todas as funções $\mathcal{A}$-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ para as quais existe $M > 0$ tal que $|f| \leq M$ μ-q.t.p. Dizemos que f é essencialmente limitada. $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\|\cdot\|_\infty$ a aplicação de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ em $\mathbb{R}^+$ definida por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 : |f| \leq M \ \mu - q.t.p.\}.$$

O resultado seguinte dá-nos uma motivação para a notação anterior.

Proposição 5.2.1 *Se $\mu(X) < +\infty$ então $\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$.*

Demonstração: Sejam $M' < M = \|f\|_\infty$ e $A = \{x \in X : |f(x)| > M'\}$. Como $0 < \mu(A) < +\infty$, então $\|f\|_p \geq (\int_A |f|^p d\mu)^{1/p} \geq M'\mu(A)^{1/p} \to M'$, se $p\to+\infty$, e assim $\liminf \|f\|_p \geq M'$. Sendo $M' < M$ qualquer, concluímos que $\liminf \|f\|_p \geq M$. Por outro lado, $\|f\|_p \leq M\mu(X)^{1/p} \to M$, se $p\to+\infty$, o que implica $\limsup \|f\|_p \leq M$. $\square$

Em geral os espaços $\mathcal{L}^p(\mu)$ para diferentes valores de p não estão relacionados. Se a medida é finita temos:

Teorema 5.2.2 *Se $\mu(X) < +\infty$ então $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, para $0 < p < q \leq +\infty$.*

Demonstração: Se $q < +\infty$, temos $|f|^p \leq 1 + |f|^q$ e então $\int |f|^p d\mu \leq \int (1 + |f|^q) d\mu \leq \mu(X) + \int |f|^q d\mu$, quantidade esta que é finita se $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Se $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, $\int |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X) < +\infty$. $\square$

A condição $\mu(X) < +\infty$ é essencial para a validade dos resultados anteriores. Se tomarmos $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ e $f(x) = 1$ para $x \in \mathbb{R}$, temos $f \in \mathcal{L}^\infty$ e $f \notin \mathcal{L}^p$ para $p \in]0, +\infty[$.

A título de exemplo, se $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ uma função de X em $\mathbb{R}$ pode ser identificada com uma sucessão de números reais $x = (x_n)$. Sendo μ a medida contagem em $\mathbb{N}$, então

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \Big\{(x_n) : x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\Big\}, \quad p \in]0, +\infty[,$$

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R} \text{ e } (x_n) \text{ é limitada}\},$$

e $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$ para $p \in]0, +\infty[$ e $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

Tal como para o caso $p = 1$ (§4.3), a aplicação $\|\cdot\|_p$, para $p \in [1, +\infty]$, é uma semi-norma em $\mathcal{L}^p(\mu)$, isto é, SN1) $\|f\|_p \geq 0$, SN2) $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ e SN3) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, para todo o $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. As duas primeiras propriedades são óbvias. A terceira, enunciada em §4.3 para $p = 1$, será estabelecida no próximo parágrafo para $p \in [1, +\infty]$. Uma tal desigualdade não é válida para $p \in]0, 1[$ (tome $X =]0, 1[$, μ a medida de Lebesgue, $f = \mathbb{1}_{]0,1/2[}$ e $g = \mathbb{1}_{]1/2,1[}$).

Claramente $\|\cdot\|_p$ não é uma norma em $\mathcal{L}^p(\mu)$ pois $\|f\|_p = 0$ sem que f seja necessariamente a função nula. No entanto, tal como fizemos no parágrafo 4.3, considerando em $\mathcal{L}^p(\mu)$ a relação de equivalência $f \sim g$ sse $f = g$ μ-q.t.p., e denotando por $L^p(\mu)$ ou $L^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ o conjunto quociente $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$, isto é, o conjunto das classes de equivalência determinadas em $\mathcal{L}^p(\mu)$ por $\sim$, então $L^p(\mu)$ é um espaço vectorial real e a aplicação $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R}^+$, definida atrás, é uma norma para $p \in [1, +\infty]$.

No que se segue consideramos apenas o caso $p \in [1, +\infty]$. Como já referimos, se $p \in]0,1[$, $\|\cdot\|_p$ não é uma norma em $L^p(\mu)$. No entanto, $L^p(\mu)$ é, neste caso, um espaço métrico com distância definida por $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$ (ver Wheeden e Zygmund, 1977, pg. 133).

5.3 Desigualdades de Hölder e de Minkowski

Neste parágrafo vamos estabelecer duas desigualdades importantes, sendo a última a propriedade SN3) enunciada anteriormente.

Teorema 5.3.1 (desigualdade de Hölder) *Para $p, q \in]1, +\infty[$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e $f, g \in \mathcal{M}_+$, temos*

$$\int fg\, d\mu \leq \left(\int f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração: Se $\int f^p\, d\mu = 0$ ou $\int g^q\, d\mu = 0$, então $fg = 0$ μ-q.t.p. e a desigualdade é trivialmente verificada. Caso contrário, ela é consequência imediata da desigualdade (cf. Exercício 5.6.3)

$$\frac{fg}{\left(\int f^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q\, d\mu\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{f^p}{\int f^p\, d\mu} + \frac{1}{q} \frac{g^q}{\int g^q\, d\mu}. \ \square$$

Corolário 5.3.2 *Para $p, q \in [1, +\infty]$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sejam $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Então $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Se $p, q \in]1, +\infty[$, o resultado é consequência da desigualdade de Hölder. Se $p = 1$ e $q = +\infty$ (de forma análoga se $p = +\infty$ e $q = 1$), o resultado é consequência da desigualdade $|fg| \leq |f| \|g\|_\infty$, μ-q.t.p.. $\square$

Corolário 5.3.3 *Se μ é finita, $1 \leq p < q \leq +\infty$, e $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$, então*

$$\frac{1}{\mu(X)^{1/p}} \|f\|_p \leq \frac{1}{\mu(X)^{1/q}} \|f\|_q.$$

Demonstração: Aplicar a desigualdade de Hölder ao produto de $|f|^p$ pela função constantemente igual a 1. $\square$

Teorema 5.3.4 (desigualdade de Minkowski) *Se $p \in [1, +\infty[$ e $f, g \in \mathcal{M}_+$, então*

$$\left(\int (f+g)^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração: Se $p = 1$, vale a igualdade pela linearidade do integral. Para $p > 1$, temos pela desigualdade de Hölder $\int (f+g)^p \, d\mu = \int (f+g)(f+g)^{p-1} \, d\mu \leq \int f(f+g)^{p-1} \, d\mu + \int g(f+g)^{p-1} \, d\mu \leq \left(\left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\mu\right)^{1/p} \right) \left(\int (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/q}$. □

Corolário 5.3.5 *Se $p \in [1, +\infty]$ então $\|\cdot\|_p$ é uma semi-norma em $\mathcal{L}^p(\mu)$ e uma norma em $L^p(\mu)$.*

Demonstração: Para $p \in [1, +\infty[$, o resultado é consequência da desigualdade de Minkowski. Se $p = +\infty$, basta notar que as igualdades $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$ e $\mu(\{x : |g(x)| > \|g\|_\infty\}) = 0$, implicam $\mu(\{x : |(f+g)(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$. □

5.4 Convergência em $\mathcal{L}^p$

Definição 5.4.1 *Para $p \in]0, +\infty]$, dizemos que a sucessão (f_n) em $\mathcal{L}^p(\mu)$ (resp. em $L^p(\mu)$) converge em $\mathcal{L}^p$ (resp. em $L^p(\mu)$) para $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ (resp. em $L^p(\mu)$ ou em norma de ordem p), se* $\lim \|f_n - f\|_p = 0$.

Notemos que o limite (quando existe) duma sucessão em $L^p(\mu)$ é único. O mesmo não acontece para uma sucessão de elementos de $\mathcal{L}^p(\mu)$. Relacionemos este modo de convergência com os até agora já introduzidos.

Teorema 5.4.2 *Sejam (f_n) e f em $\mathcal{L}^p(\mu)$ com $p \in]0, +\infty]$. Se (f_n) converge para f em $\mathcal{L}^p(\mu)$ então (f_n) converge em medida para f.*

Demonstração: Para $p \in]0, +\infty[$, basta notar que $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \int |f_n - f|^p d\mu / \epsilon^p$, para todo o $\epsilon > 0$ (cf. Exercício 4.7.4). Para $p = +\infty$, e dado $\epsilon > 0$, existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir da qual $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$. Como, por definição de norma em $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\}) = 0$ então $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$, para $n \geq n_0$, o que prova o pretendido. □

A convergência em $\mathcal{L}^p(\mu)$ não implica a convergência quase em todo o ponto nem é implicada por esta ou pela convergência em medida (ver Exercícios 3.6.15 e 5.6.7).

Sob certas condições, a convergência em $\mathcal{L}^p(\mu)$ pode ser implicada pela convergência quase em todo o ponto e pela convergência em medida (ver Exercício 5.6.8).

Teorema 5.4.3 (da convergência dominada em $\mathcal{L}^p$) *Sejam f e (f_n) funções $\mathcal{A}$-mensuráveis tais que $|f_n| \leq |g|$ μ-q.t.p., com $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ para algum $p \in]0, +\infty[$. Se (f_n) converge para f μ-q.t.p. então $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e (f_n) converge em $\mathcal{L}^p(\mu)$ para f.*

Não existe uma relação directa entre os modos de convergência $\mathcal{L}^p(\mu)$ para diferentes valores de p. No entanto, num espaço de medida finita podemos obter o resultado seguinte como aplicação directa do Corolário 5.3.3.

Proposição 5.4.4 *Se μ é finita e $1 \le p < q \le +\infty$, então a convergência em $\mathcal{L}^q(\mu)$ implica a convergência em $\mathcal{L}^p(\mu)$.*

5.5 Propriedades dos espaços L^p

Vimos já que os espaços $L^p(\mu)$, com $p \in [1, +\infty]$, são espaços vectoriais normados. Vamos de seguida mostrar que tais espaços são completos, isto é, qualquer sucessão de Cauchy (f_n) em $L^p(\mu)$ converge em $L^p(\mu)$ para um elemento f de $L^p(\mu)$. Dizemos então que os espaços $L^p(\mu)$ são espaços de Banach. Recordemos que uma sucessão (f_n) em $L^p(\mu)$ é de Cauchy se

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \;:\; n, m \ge n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

Teorema 5.5.1 *Para $p \in [1, +\infty]$, os espaços $L^p(\mu)$ são espaços de Banach para a norma $\|\cdot\|_p$.*

Demonstração: Sendo (f_n) uma sucessão de Cauchy em $L^p(\mu)$, para $p \in [1, +\infty]$, (f_n) é de Cauchy em medida (ver Exercício 3.6.19). Pelo Teorema 3.5.4, existe uma subsucessão (f_{n_k}) de (f_n) que converge quase em todo o ponto para alguma função real e $\mathcal{A}$-mensurável f. Mostremos agora que $f \in L^p(\mu)$ e que $f_n \to f$, em $L^p(\mu)$. Dado $\epsilon > 0$, qualquer, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon/2$, para $n, m \ge n_0$. Tomando $n \ge n_0$, temos $|f_n - f| = \lim |f_n - f_{n_k}|$, μ-q.t.p.. Se $p = +\infty$ então $|f_n - f| \le \epsilon/2,\ \mu - q.t.p.$, ou ainda, $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$. Se $p \in [1, +\infty[$, então pelo lema de Fatou $\int |f_n - f|^p d\mu \le \liminf \int |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p$, ou seja, $\|f_n - f\|_p < \epsilon$. Para $p \in [1, +\infty]$, concluímos assim que $f \in L^p(\mu)$, uma vez que $f_n - f \in L^p(\mu)$ e $f_n \in L^p(\mu)$, e além disso $f_n \to f$, em $L^p(\mu)$. $\square$

Mostramos de seguida que o conjunto das funções escalonadas de $L^p(\mu)$ é denso em $L^p(\mu)$, isto é, para todo o $f \in L^p(\mu)$ e $\epsilon > 0$, existe uma função escalonada, g, em $L^p(\mu)$ tal que $\|f - g\|_p < \epsilon$, ou de forma equivalente, para todo o $f \in L^p(\mu)$ existe uma sucessão de funções escalonadas em $L^p(\mu)$ que converge em $L^p(\mu)$ para f.

Teorema 5.5.2 *Para $p \in [1, +\infty]$, o conjunto das funções escalonadas de $L^p(\mu)$ é denso em $L^p(\mu)$.*

Demonstração: Dado $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, com $p \in [1, +\infty[$, sabemos, pelo Teorema 3.3.2, que existem (g_n) e (h_n) sucessões de funções escalonadas não-negativas com $g_n \uparrow f^+$ e $h_n \uparrow f^-$. Como $g_n \le f^+ \le |f|$ e $h_n \le f^- \le |f|$, então $g_n, h_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e também $f_n = g_n - h_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como $f_n \to f$ e $|f_n| \le f$, concluímos pelo Teorema 5.4.3 que f_n converge em $L^p(\mu)$ para f. Se $p = +\infty$, seja $\epsilon > 0$, qualquer, e consideremos os números reais $a_0 < a_1 < \ldots < a_k$ com $a_i - a_{i-1} < \epsilon$, $i = 1, \ldots, k$, e $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty] \subset \bigcup_{i=1}^k]a_{i-1}, a_i]$. Tomando $A_i = f^{-1}(]a_{i-1}, a_i])$ e $g = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i}$, basta agora notar que $\|g - f\|_\infty < \epsilon$. $\square$

Se o espaço de base X é suficientemente "rico" podemos fazer melhor. Vamos centrar as nossas atenções no caso $X = \mathbb{R}^d$ com $\mu = \lambda$ (notemos no entanto que os argumentos valem se μ é uma medida de Radon em $\mathbb{R}^d$, isto é, se $\mu(K) < +\infty$ para todo o compacto K). Começamos por mostrar que, para $p \in [1, +\infty[$, $L^p(\lambda)$ é separável, isto é, $L^p(\lambda)$ possui um subconjunto numerável denso. Notemos que $L^\infty(\lambda)$ não é separável, uma vez que para a família não-numerável $f_t = \mathbb{1}_{]0,t[}$, $t > 0$, temos $\|f_t - f_s\|_\infty = 1$ para $t \neq s$.

Teorema 5.5.3 *Para $p \in [1, +\infty[$, $L^p(\lambda)$ é separável.*

Demonstração: Atendendo ao teorema anterior, o conjunto das funções $f \in L^p(\lambda)$, da forma $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, com $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{Q}$, e $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ disjuntos dois a dois, é denso em $L^p(\lambda)$. Vamos agora mostrar que para todo o $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, com $\lambda(A) < +\infty$, a função indicatriz de A pode ser aproximada em $L^p(\lambda)$ por uma soma finita de indicatrizes de conjuntos pertencentes a uma classe numerável de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Tal facto permitirá concluir. Uma tal classe que denotamos por $\mathcal{C}_r$, é a classe dos rectângulos semi-abertos à esquerda da forma $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i]$, com $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, para $i = 1, \ldots, d$. Sendo esta classe um semi-anel que gera $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (cf. Exercício 1.5.17), então pelo Teorema da aproximação (Teorema 2.6.5), dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ com $\lambda(A) < +\infty$, existe $B = \sum_{i=1}^s B_i$, com $B_i \in \mathcal{C}_r$, e $\mu(A \triangle B) < \epsilon$, isto é, $\|\mathbb{1}_A - \sum_{i=1}^s \mathbb{1}_{B_i}\|_p < \epsilon$. $\square$

Por último mostramos que, para $p \in [1, +\infty[$, qualquer função de $L^p(\lambda)$ pode ser aproximada em $L^p(\lambda)$ por uma função "(infinitamente) regular". Este resultado não vale para $p = +\infty$. Não é possível aproximar em $L^\infty(\lambda)$ a indicatriz dum rectângulo por uma função contínua.

Teorema 5.5.4 *Para $p \in [1, +\infty[$, o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto é denso em $L^p(\lambda)$.*

Demonstração: Da demonstração anterior, sabemos que uma função em $L^p(\lambda)$ pode ser aproximada em $L^p(\lambda)$ por uma combinação linear finita de indicatrizes de rectângulos semi-abertos à esquerda. Para estabelecer o teorema, basta então mostrar que para todo o rectângulo A semi-aberto à esquerda, existe uma sucessão de funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto que converge para $\mathbb{1}_A$ em $L^p(\lambda)$. Se (f_n) é a sucessão definida no Exercício 3.6.10, cada f_n é infinitamente diferenciável de suporte compacto com $0 \leq f_n \leq \mathbb{1}_E$ e $\lim f_n = \mathbb{1}_A$, onde E é rectângulo fechado que contém a aderência de A. Pelo teorema da convergência dominada em $\mathcal{L}^p(\lambda)$, concluímos que $\|f_n - \mathbb{I}_A\|_p \to 0$, o que prova o pretendido. $\square$

5.6 Exercícios

1. Mostre que $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ é convexa em $]a,b[$ sse
$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t},$$
para todo o $s,t,u \in]a,b[$ com $s < t < u$.

2. Seja $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ diferenciável em $]a,b[$. Mostre que φ é convexa sse φ' é crescente em $]a,b[$.

3. Dados $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in]0,1[$ com $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, mostre que:
   (a) $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ (Sugestão: use desigualdade de Jensen);
   (b) $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq (x_1 + \ldots + x_n)/n$.

4. Mostre que se X é finito e $\mu(X) < \infty$ então os espaços $\mathcal{L}^p$ (resp. L^p) são os mesmos para $p \in [1,+\infty]$.

5. Se X é finito ou numerável, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ e $0 < \mu(\{x\}) < +\infty$ para todo o $x \in X$, mostre que $\mathcal{L}^p = L^p$ para todo o $p \in [1,+\infty]$.

6. Sendo μ a medida contagem em $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, mostre que $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$ para $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

7. Considere a sucessão (f_n) definida em $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ por $f_n = n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}$. Mostre que f_n converge quase em todo o ponto para a função nula, mas não em $\mathcal{L}^p(\mu)$.

8. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço mensurado e $f, f_1, f_2, \ldots$ funções reais $\mathcal{A}$-mensuráveis definidas em X tais que (f_n) converge em medida para f. Mostre que se existe $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, com $p \in]0,+\infty[$ tal que $|f_n| \leq g$ μ-q.t.p., então f_n converge para f em norma de ordem p.

9. Seja (f_n) uma sucessão de funções não-negativas e integráveis que converge quase em todo o ponto para uma função integrável f. Se $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$ mostre que (f_n) converge em média para f. (Sugestão: escreva $g_n = f_n - f$ aplique o teorema da convergência dominada a g_n^-).

5.7 Bibliografia

Fernandez, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

Halmos, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

Lang, S. (1993). *Real and Functional Analysis*, Springer, New York.

Rudin, W. (1974). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Wheeden, R.L., Zygmund, A. (1977). *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York.

Capítulo 6

Medidas produto

Neste capítulo introduzimos as noções de σ-álgebra produto e de medida produto, e estudamos a integração relativamente à medida produto. Seremos conduzidos aos "integrais múltiplos" e a uma forma alternativa de construir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$.

6.1 σ-álgebra produto

No que se segue consideramos uma família $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \ldots, d$ (com $d \geq 2$), de espaços mensuráveis e denotamos por $X = \prod_{i=1}^d X_i$ o produto cartesiano dos conjuntos $X_1, \ldots, X_d$, isto é, o conjunto dos d-uplos ordenados $(x_1, \ldots, x_d)$ onde, para cada i, x_i é elemento de X_i. A um subconjunto de X da forma $\prod_{i=1}^d A_i$, onde $A_i \in \mathcal{A}_i$, para cada i, chamamos rectângulo mensurável.

Definição 6.1.1 *Chamamos σ-álgebra produto das σ-álgebras $\mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, d$, à σ-álgebra $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ gerada pelos rectângulos mensuráveis, isto é, $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i = \sigma(\prod_{i=1}^d \mathcal{A}_i)$. O espaço mensurável $(X, \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i)$ diz-se produto dos espaços mensuráveis $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \ldots, d$.*

O exemplo mais habitual é aquele em que $(X_i, \mathcal{A}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $i = 1, \ldots, d$, onde $X = \mathbb{R}^d$. O resultado seguinte permitirá concluir que a σ-álgebra produto $\otimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R})$ não é mais do que a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$.

Proposição 6.1.2 *A σ-álgebra produto $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ é a σ-álgebra gerada pelas aplicações projecção $\pi_i : X \to (X_i, \mathcal{A}_i)$, para $i = 1, \ldots, d$, definidas por $\pi_i(x_1, \ldots, x_d) = x_i$.*

Demonstração: Como $A_1 \times A_d = \bigcap_{i=1}^d \pi_i^{-1}(A_i)$, concluímos que $\prod_{i=1}^d \mathcal{A}_i \subset \sigma(\pi_i, i = 1, \ldots, d)$, ou ainda, $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i \subset \sigma(\pi_i, i = 1, \ldots, d)$. Para estabelecer a inclusão contrária basta mostrar que $\pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$, para $i = 1, \ldots, d$. Tal é óbvio pois para $A_i \in \mathcal{A}_i$, $\pi_i^{-1}(A_i) = X_1 \times \ldots X_{i-1} \times A_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_d \in \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$. $\square$

Corolário 6.1.3 *A σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$ é a σ-álgebra produto $\otimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: A inclusão $\otimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ é consequência imediata da proposição anterior e da $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mensurabilidade das aplicações projecção. Por outro lado, sendo $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gerada pelos rectângulos semi-abertos à esquerda, concluímos que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \otimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R})$, uma vez que tais rectângulos estão em $\otimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Um outro resultado importante é a associatividade do produto de σ-álgebras. Para $k \in \{1, \ldots, d-1\}$, consideremos os produtos cartesianos $Y = \prod_{i=1}^k X_i$ e $Z = \prod_{i=k+1}^d X_i$, e as σ-álgebras $\mathcal{B} = \otimes_{i=1}^k \mathcal{A}_i$ e $\mathcal{C} = \otimes_{i=k+1}^d \mathcal{A}_i$. Podendo os espaços X e $Y \times Z$ ser identificados de forma natural, escreveremos $X = Y \times Z$. Neste sentido:

Proposição 6.1.4 *As σ-álgebras produto $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ e $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ são iguais.*

Demonstração: Claramente $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$. Seja $\mathcal{Y} = \{B \subset Y : B \times Z \in \mathcal{A}\}$. $\mathcal{Y}$ é uma σ-álgebra de partes de Y que contém os rectângulos mensuráveis de Y. $\mathcal{Y}$ contém assim $\mathcal{B}$, isto é, $B \times Z \in \mathcal{A}$, para todo o $B \in \mathcal{B}$. De modo análogo se prova que $Y \times C \in \mathcal{A}$, para todo o $C \in \mathcal{C}$. A inclusão $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ é agora consequência da igualdade $B \times C = (B \times Z) \cap (Y \times C)$, válida para todo o $B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$. $\square$

No Capítulo 3 discutimos já a mensurabilidade duma aplicação com valores num produto cartesiano. Voltamos agora a esse assunto. Seja $f = (f_1, \ldots, f_d)$ uma aplicação definida num espaço mensurável $(E, \mathcal{F})$ com valores no espaço produto $(X, \mathcal{A}) = (\prod_{i=1}^d X_i, \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i)$.

Proposição 6.1.5 *f é $\mathcal{A} - \mathcal{F}$-mensurável sse cada uma das aplicações coordenadas f_i é $\mathcal{A}_i - \mathcal{F}$-mensurável.*

Outro aspecto desta questão é o das aplicações definidas num produto de espaços mensuráveis com valores num espaço mensurável. Este aspecto será abordado nos próximos parágrafos.

6.2 Medida produto

Sejam $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, d$ (com $d \geq 2$), uma família de espaços mensurados e denotemos por $(X, \mathcal{A})$ o produto dos espaços mensuráveis $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \ldots, d$.

Teorema 6.2.1 *Existe uma medida γ sobre $(X, \mathcal{A})$ tal que*

$$\gamma\Big(\prod_{i=1}^d A_i\Big) = \prod_{i=1}^d \mu_i(A_i),$$

para todo o $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, d$. Uma tal medida é única se $\mu_1, \ldots, \mu_d$ são σ-finitas. Nesse caso γ é também σ-finita.

Demonstração: Restrinjamo-nos ao caso $d = 2$, e comecemos por provar que existe uma medida sobre $\mathcal{A}$ nas condições anteriores. Consideremos a função de conjunto λ definida no semi-anel $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ de partes de $X_1 \times X_2$, por $\lambda(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$. Provemos que se trata duma medida. Se $A_1 \times A_2 = \emptyset$, então $A_1 = \emptyset$ ou $A_2 = \emptyset$, e $\lambda(A_1 \times A_2) = 0$. Sejam agora $A_{1j} \times A_{2j} \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, para $j = 1, 2, \ldots$, com $\sum_{j=1}^{\infty} A_{1j} \times A_{2j} = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Para $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, temos $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{A_{1j}}(x_1)\mathbb{I}_{A_{2j}}(x_2) \uparrow \mathbb{I}_{A_1}(x_1)\mathbb{I}_{A_2}(x_2)$. Fixando x_1 e aplicando o teorema da convergência monótona obtemos $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{A_{1j}}(x_1)\mu_2(A_{2j}) \uparrow \mathbb{I}_{A_1}(x_1)\mu_2(A_2)$. Nova aplicação do teorema, permite obter $\sum_{j=1}^{n} \mu_1(A_{1j})\mu_2(A_{2j}) \uparrow \mu_1(A_1)\mu(A_2)$, ou ainda, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_{1j} \times A_{2j}) = \lambda(A_1 \times A_2)$. λ é assim σ-aditiva. Pelo teorema do prolongamento duma medida, podemos garantir a existência duma medida γ sobre $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}$ que prolonga λ.

Finalmente, a unicidade e a σ-finitude de γ são consequência do Teorema do prolongamento duma medida e da σ-finitude de λ em $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. $\square$

Definição 6.2.2 *Se as medidas $\mu_1, \ldots, \mu_d$ são σ-finitas, chamamos medida produto de $\mu_1, \ldots, \mu_d$, que denotamos por $\otimes_{i=1}^{d}\mu_i$, à medida cuja existência é assegurada no teorema anterior. O espaço $(X, \mathcal{A}, \otimes_{i=1}^{d}\mu_i)$ diz-se produto cartesiano dos espaços mensurados $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, d$.*

Vimos já que o produto de σ-álgebras é associativo. A mesma propriedade vale para o produto de medidas. Para $k \in \{1, \ldots, d-1\}$, consideremos os produtos cartesianos $Y = \prod_{i=1}^{k} X_i$ e $Z = \prod_{i=k+1}^{d} X_i$, as σ-álgebras $\mathcal{B} = \otimes_{i=1}^{k}\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{C} = \otimes_{i=k+1}^{d}\mathcal{A}_i$ e as medidas $\nu = \otimes_{i=1}^{k}\mu_i$ e $\eta = \otimes_{i=k+1}^{d}\mu_i$.

Proposição 6.2.3 *As medidas produto $\otimes_{i=1}^{d}\mu_i$ e $\nu \otimes \eta$ são iguais.*

Demonstração: Consequência imediata do teorema anterior pois estas duas medidas coincidem no semi-anel dos rectângulos mensuráveis. $\square$

Se $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ onde λ_1 é a medida de Borel em $\mathbb{R}$, o resultado anterior dá-nos uma nova forma de construir a medida de Borel em $\mathbb{R}^d$. Com efeito, $\otimes_{i=1}^{d}\lambda_1$ coincide com λ_d, medida de Borel em $\mathbb{R}^d$, sobre conjuntos da forma $\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i]$, e consequentemente também em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Atendendo ao Corolário 6.1.3, o procedimento desenvolvido no Capítulo 2 para a construção de λ_d e o agora introduzido são equivalentes (ver Exercício 6.6.1).

6.3 Fórmulas integrais para a medida produto

Neste e nos próximos parágrafos consideramos apenas o caso $d = 2$. No entanto, atendendo à associatividade do produto de σ-álgebras e do produto de medidas, os resultados poderão ser enunciados sem dificuldade para $d > 2$.

Dados um conjunto $E \subset X \times Y$ e pontos $x \in X$ e $y \in Y$, aos subconjuntos de Y e X definidos por

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \text{ e } E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\},$$

chamamos secções de E em x e y, respectivamente.

Lema 6.3.1 *Se $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ então para todo o $x \in X$ e $y \in Y$, $E_x \in \mathcal{B}$ e $E^y \in \mathcal{A}$.*

Demonstração: Para $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e $x \in X$, provemos que $E_x \in \mathcal{B}$. Seja $C_x = \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{B}\}$. C_x é uma σ-álgebra uma vez que $(E^c)_x = (E_x)^c$ e $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n)_x = \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_n)_x$. Além disso, C_x contém $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ pois $(A \times B)_x = B$, se $x \in A$ e $(A \times B)_x = \emptyset$, se $x \notin A$. Assim $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset C_x$, o que prova o pretendido. $\square$

Lema 6.3.2 *Se μ e ν são σ-finitas, então para todo o $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, as aplicações ϕ_E de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e ψ_E de Y em $\overline{\mathbb{R}}$ definidas por $\phi_E(x) = \nu(E_x)$ e $\psi_E(y) = \mu(E^y)$, são $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$-mensuráveis, respectivamente.*

Demonstração: Comecemos pelo caso em que ν é finita. Consideremos a classe $\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \phi_E \text{ é } \mathcal{A}\text{-mensurável}\}$. $\mathcal{D}$ contém $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ pois para $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $\phi_{A\times B} = \nu(B)\mathbb{I}_A$. Sendo ν finita, $\mathcal{D}$ é um d-sistema e assim $d(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subset d(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Sendo $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ um π-sistema temos $\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = d(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, e então $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$.

Suponhamos agora que ν é σ-finita e consideremos uma sucessão (Y_n) em $\mathcal{B}$ de conjuntos dois a dois disjuntos com $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ e $\nu(Y_n) < +\infty$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Para cada n, definamos em $\mathcal{B}$ a medida finita $\nu_n(B) = \nu(B \cap Y_n)$. Pela primeira parte da demonstração, a aplicação $x \to \nu_n(E_x)$ é $\mathcal{A}$-mensurável, para $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Assim, como $\phi_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(E_x)$, concluímos que ϕ_E é $\mathcal{A}$-mensurável. $\square$

Teorema 6.3.3 *Se μ e ν são σ-finitas, então para todo o $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,*

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)d\nu(y).$$

Demonstração: Para $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, seja $\gamma(E) = \int_Y \mu(E^y)d\nu(y)$. γ é uma medida e para $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ temos $\gamma(A \times B) = \int_Y \mu(A)\mathbb{I}_B(y)d\nu(y) = \mu(A)\nu(B) = \mu \otimes \nu(A \times B)$. Pelo Lema da igualdade de medidas concluímos que $\gamma = \mu \otimes \nu$ em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. $\square$

Concluímos assim que se E e F são conjuntos mensuráveis de $X \times Y$ cujas secções (quase todas) têm medidas iguais então as medidas de E e F são iguais (princípio de Cavalieri). Notemos que se uma das medidas μ ou ν não é σ-finita a igualdade dos dois integrais anteriores pode não ocorrer (ver Exercício 6.6.3).

6.4 Teorema de Fubini

Interessamo-nos neste parágrafo pela integração relativamente à medida produto. Dados uma função f de $X \times Y$ em $\overline{\mathbb{R}}$, e pontos $x \in X$ e $y \in Y$, as aplicações $f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ e $f^y : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas por

$$f_x(y) = f(x,y) \quad \text{e} \quad f^y(x) = f(x,y),$$

dizem-se secções de f em x e y, respectivamente.

Lema 6.4.1 *Se f é mensurável de $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ em $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, então, para todo o $x \in X$ e $y \in Y$, as aplicações $f_x : (Y, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ e $f^y : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ são mensuráveis.*

Demonstração: Usar o Lema 6.3.1 e as igualdades $f_x^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x$ e $(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y$. □

Lema 6.4.2 *Se μ e ν são σ-finitas e $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ é $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mensurável então as aplicações*

$$\phi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) \quad e \quad \psi(y) = \int_X f^y(x) d\mu(x),$$

definidas para $x \in X$ e $y \in Y$, são $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$-mensuráveis, respectivamente.

Demonstração: Mostramos apenas a mensurabilidade da primeira das aplicações. Para $f = \mathbb{1}_E$ com $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, o resultado é uma consequência do Lema 6.3.2, pois para $x \in X$, $f_x = \mathbb{1}_{E_x}$ e assim $\phi = \phi_E$. Se $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ com $\alpha_i \geq 0$ e $E_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, então $f_x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{(E_i)_x}$ e ϕ é mensurável pois $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_{E_i}$. Finalmente, se $f \in \mathcal{M}_+$ existe $(f_n) \subset \mathcal{E}_+$ tal que $f_n \uparrow f$, e, para $x \in X$, temos $(f_n)_x \uparrow f_x$ e também $\int (f_n)_x(y) d\nu(y) \uparrow \int f_x(y) d\nu(y)$. Sendo ϕ limite pontual duma sucessão de funções mensuráveis concluímos que ϕ é também mensurável. □

Teorema 6.4.3 (de Fubini-Hobson-Tonelli) *Se μ e ν são σ-finitas e $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ é $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mensurável então*

$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \Big(\int_Y f_x(y) d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f^y(x) d\mu(x) \Big) d\nu(y).$$

Demonstração: Suponhamos que $f = \mathbb{I}_E$, com $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Como $f_x = \mathbb{I}_{E_x}$ então $\int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \mu(E_x)d\mu(x) = \int_X(\int_Y \mathbb{I}_{E_x}(y)d\nu(y))d\mu(x) = \int_X\Big(\int_Y f_x(y)d\nu(y)\Big)d\mu(x)$. Pela homogeneidade do integral o resultado é ainda válido para $f \in \mathcal{E}_+$, e finalmente, pelo teorema da convergência monótona, é-o também para $f \in \mathcal{M}_+$. A segunda igualdade estabelece-se de modo análogo. □

Os dois últimos integrais, ditos integrais iterados de f, são também denotados por $\int\int f d\nu d\mu$ e $\int\int f d\mu d\nu$ ou por $\int d\mu \int f d\nu$ e $\int d\nu \int f d\mu$, respectivamente.

Notemos que o resultado anterior pode ser usado como critério de integrabilidade para f, bastando para tal verificar se um dos integrais iterados de $|f|$ é finito. Este resultado não é válido para o integral de Riemann.

Teorema 6.4.4 (de Fubini) *Sejam μ e ν σ-finitas e $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mensurável e $\mu \otimes \nu$-integrável. Então:*

a) a aplicação f_x é ν-integrável para μ quase todo o ponto $x \in X$ e f^y é μ-integrável para ν quase todo o ponto $y \in Y$;

b) as aplicações $x \to \int_Y f_x(y)d\nu(y)$ e $y \to \int_X f^y(x)d\mu(x)$, definidas μ e ν quase em todo o ponto, são μ e ν-integráveis, respectivamente;

c)

$$\int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X\Big(\int_Y f_x(y)d\nu(y)\Big)d\mu(x) = \int_Y\Big(\int_X f^y(x)d\mu(x)\Big)d\nu(y).$$

Demonstração: Vamos apenas estabelecer as propriedades relativas à função f_x. De modo análogo se procede para a função f^y. Sendo $|f|$ integrável, temos pelo teorema anterior

$$\int_X\Big(\int_Y |f|_x(y)d\nu(y)\Big)d\mu(x) < +\infty, \tag{6.4.5}$$

e assim $\int_Y |f|_x(y)d\nu(y) < +\infty$ para μ quase todo o ponto x. Como $|f_x| = |f|_x$, f_x é assim ν-integrável para μ quase todo o ponto x. A aplicação $x \to \int_Y |f|_x(y)d\nu(y)$ está assim definida para μ quase todo o ponto x (mais, ela é finita para μ quase todo o ponto x), e por (6.4.5) concluímos também que ela é μ-integrável, o que implica que $x \to \int_Y f_x(y)d\nu(y)$ seja também μ-integrável. Finalmente, aplicando o teorema anterior a f^+ e a f^-, e tendo em conta que $(f^+)_x = f_x^+$ e $(f^-)_x = f_x^-$, obtemos c). □

Nos Exercícios 6.6.3 e 6.6.4 discute-se a importância, para a validade do teorema anterior, das hipóteses de σ-finitude das medidas e de integrabilidade de f.

6.5 Medida produto e completamento

Se μ e ν são medidas σ-finitas sobre $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$, respectivamente, não são em geral válidas as igualdades $\overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ e $\bar{\mu} \otimes \bar{\nu} = \overline{\mu \otimes \nu}$ (ver Exercício 6.6.1). Comecemos por estudar as relações existentes entre as entidades anteriores.

Proposição 6.5.1 *Se μ e ν são medidas σ-finitas então $\overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$.*

Demonstração: Dados $A \in \overline{\mathcal{A}}$ e $B \in \overline{\mathcal{B}}$, existem $A_0 \in \mathcal{A}$, $B_0 \in \mathcal{B}$, $N_a \subset M_a \in \mathcal{A}$ e $N_b \subset M_b \in \mathcal{B}$, com $\mu(M_a) = \nu(M_b) = 0$, tais que $A = A_0 \cup N_a$ e $B = B_0 \cup N_b$. Assim, $A \times B = A_0 \times B_0 \cup N$, onde $N = A_0 \times N_b \cup N_a \times B_0 \cup N_a \times N_b$, e $N \subset M = A_0 \times M_b \cup M_a \times B_0 \cup M_a \times M_b$. Como $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e $(\mu \otimes \nu)(M) = 0$, concluímos que $A \times B \in \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$, ou ainda, $\overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$, o que permite concluir. $\square$

Proposição 6.5.2 *Se μ e ν são medidas σ-finitas então $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} = \overline{\overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}}}$ e $\overline{\mu \otimes \nu} = \overline{\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}}$.*

Demonstração: Comecemos por notar que $\mu \otimes \nu$ está definida em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, que $\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}$ está definida em $\overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}}$ e que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}}$. Claramente, $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \subset \overline{\overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}}}$. Além disso, como $\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}_{|\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = \mu \otimes \nu$, então $\bar{\mu} \otimes \bar{\nu} = \mu \otimes \nu$ em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pelo teorema do prolongamento, e assim $\overline{\mu \otimes \nu} = \overline{\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}}$ em $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$. Para concluir basta agora mostrar que $\overline{\overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}}} \subset \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$. Dado $E \in \overline{\overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}}}$, temos $E = E_0 \cup N$, onde $E_0 \in \overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}}$, $N \subset M \in \overline{\mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{B}}$ e $(\bar{\mu} \otimes \bar{\nu})(M) = 0$. Pela proposição anterior, $E_0, M \in \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ e $\overline{\mu \otimes \nu}(M) = \overline{\bar{\mu} \otimes \bar{\nu}}(M) = (\bar{\mu} \otimes \bar{\nu})(M) = 0$, ou seja, $E \in \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$. $\square$

Corolário 6.5.3 *Se $\bar{\lambda}_p$, $\bar{\lambda}_q$ e $\bar{\lambda}_{p+q}$ são as medidas de Lebesgue em $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ e $\mathbb{R}^{p+q}$, respectivamente, então $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^{p+q}) = \overline{\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^p) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^q)}$ e $\bar{\lambda}_{p+q} = \overline{\bar{\lambda}_p \otimes \bar{\lambda}_q}$.*

Estudamos agora a integração relativamente à medida $\overline{\mu \otimes \nu}$.

Lema 6.5.4 *Sejam μ e ν medidas σ-finitas e $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ nula $\overline{\mu \otimes \nu}$-q.t.p.. Então para μ quase todo o $x \in X$, f_x é ν-q.t.p. nula e para ν quase todo o $y \in Y$, f^y é μ-q.t.p. nula.*

Demonstração: Por hipótese, para $E = \{(x, y) : f(x, y) \neq 0\}$ temos $E \subset F$ onde $F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e $(\mu \otimes \nu)(F) = 0$. Pelo Teorema 6.3.3, $(\mu \otimes \nu)(F) = \int_X \nu(F_x) d\mu(x) = 0$, e portanto $\nu(F_x) = 0$, μ-q.t.p.. Como $\{y : f_x(y) \neq 0\} = E_x \subset F_x \in \mathcal{B}$, concluímos que para μ quase todo ponto x, f_x é ν-q.t.p. nula. Analogamente se procede para f^y. $\square$

Teorema 6.5.5 *Sejam μ e ν medidas σ-finitas completas e $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$-mensurável e $\overline{\mu \otimes \nu}$-integrável. Então:*

a) a aplicação f_x é $\mathcal{B}$-mensurável e ν-integrável para μ quase todo o ponto $x \in X$ e f^y é $\mathcal{A}$-mensurável e μ-integrável para ν quase todo o ponto $y \in Y$;

b) as aplicações $x \to \int_Y f_x(y)d\nu(y)$ *e* $y \to \int_X f^y(x)d\mu(x)$*, definidas* μ *e* ν *quase certamente, são* μ *e* ν*-integráveis, respectivamente;*

c)

$$\int_{X\times Y} f d\overline{\mu\otimes\nu} = \int_X \Big(\int_Y f_x(y)d\nu(y)\Big)d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f^y(x)d\mu(x)\Big)d\nu(y).$$

Demonstração: Pelo Teorema 4.5.1, existe g $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mensurável tal que $f = g$ $\mu\otimes\nu$-q.t.p., e $\int f d\overline{\mu\otimes\nu} = \int g d\mu\otimes\nu$. Além disso, $f_x = g_x$, ν-q.t.p., para μ quase todo o ponto x, e $f^y = g^y$, μ-q.t.p., para quase todo o ponto y, uma vez que, pelo lema anterior, $f - g = 0$ $\mu\otimes\nu$-q.t.p.. Para concluir basta agora notar que sendo g integrável, as alíneas $a), b)$ e $c)$ do teorema de Fubini valem para g. □

Corolário 6.5.6 *Nas condições do teorema anterior se* μ *e* ν *não são completas, então:*

a) a aplicação f_x *é* $\overline{\mathcal{B}}$*-mensurável e* $\bar\nu$*-integrável para* $\bar\mu$ *quase todo o ponto* $x \in X$ *e* f^y *é* $\overline{\mathcal{A}}$*-mensurável e* $\bar\mu$*-integrável para* $\bar\nu$ *quase todo o ponto* $y \in Y$*;*

b) as aplicações $x \to \int_Y f_x(y)d\bar\nu(y)$ *e* $y \to \int_X f^y(x)d\bar\mu(x)$*, definidas* $\bar\mu$ *e* $\bar\nu$ *quase certamente, são* $\bar\mu$ *e* $\bar\nu$*-integráveis, respectivamente;*

c)

$$\int_{X\times Y} f d\overline{\mu\otimes\nu} = \int_X \Big(\int_Y f_x(y)d\bar\nu(y)\Big)d\bar\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f^y(x)d\bar\mu(x)\Big)d\bar\nu(y).$$

Demonstração: Usar o teorema anterior tendo em conta que $\overline{\mu\otimes\nu} = \overline{\bar\mu\otimes\bar\nu}$. □

Corolário 6.5.7 *Nas condições do Corolário 6.5.3, se* $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \overline{\mathbb{R}}$ *é integrável à Lebesgue então*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f d\bar\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{\mathbb{R}^q} f d\bar\lambda_q\Big)d\bar\lambda_p = \int_{\mathbb{R}^q} \Big(\int_{\mathbb{R}^p} f d\bar\lambda_p\Big)d\bar\lambda_q.$$

6.6 Exercícios

1. Denotando por λ_m, para $m \in \mathbb{N}$, a medidas de Borel sobre $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, e por $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^m)$ o completamento de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ relativamente a λ_m, mostre que, para $p, q \in \mathbb{N}$:
   (a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$;
   (b) $\lambda_p\otimes\lambda_q = \lambda_{p+q}$;
   (c) $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^p)\otimes\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^q) \neq \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^{p+q})$.
2. Mostre que o $(d-1)$-hiperplano de $\mathbb{R}^d$, $\{(x_1,\ldots,x_d) : \sum_{i=1}^d a_i x_i = b\}$, com b em $\mathbb{R}$ e $(a_1,\ldots,a_d)$ não-nulo em $\mathbb{R}^d$, tem medida de Lebesgue nula.
3. Sejam μ e ν as medidas de Borel e de contagem em $\mathcal{B}([0,1])$, respectivamente. Considere o conjunto $E = \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x = y\}$ e a função $f = \mathbb{I}_E$. Mostre que:

(a) f é $\mathcal{B}([0,1])\otimes\mathcal{B}([0,1])$-mensurável;

(b) $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} f d\nu)d\mu \neq \int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} f d\mu)d\nu$.

4. Sejam μ a medida contagem em $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ e $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{se } x=y \\ -1 & \text{se } (x,y)=(2i+1,2i+2) \text{ ou} \\ & \quad (x,y)=(2i+2,2i+1) \text{ para } i=0,1,\ldots \\ 0 & \text{nos restantes casos.}\end{cases}$$

Mostre que:

(a) $\int_{\mathbb{N}}(\int_{\mathbb{N}} f(x,y)d\mu(x))d\mu(y)=\int_{\mathbb{N}}(\int_{\mathbb{N}} f(x,y)d\mu(y))d\mu(x)$;

(b) f não é $\mu\otimes\mu$-integrável.

5. Considere os espaços de medida $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ e $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$, onde λ é a medida de Lebesgue e μ é a medida contagem.

(a) Seja $B=[a,b]\times\{n\in\mathbb{N}:\ p\leq n\leq q\}$. Calcule $\lambda\otimes\mu(B)$.

(b) Defina-se em $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ a função

$$f(x,n)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{se } x\in[0,1] \\ 0 & \text{nos outros casos.}\end{cases}$$

Calcule $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{N}} f(x,n)\,d\lambda\otimes\mu$.

6. Considere a função f de $]0,1[\times]0,1[$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-2}$ e seja λ a medida de Lebesgue em $]0,1[$. Mostre que:

(a) $\int_{]0,1[}(\int_{]0,1[} f(x,y)d\lambda(y))d\lambda(x)=\pi/4$. Poderá concluir que f é $\lambda\otimes\lambda$-integrável?

(b) $\int_{]0,1[}(\int_{]0,1[} f(x,y)d\lambda(x))d\lambda(y)=-\pi/4$. Poderá concluir que f não é $\lambda\otimes\lambda$-integrável?

(Sugestão: note que $f_x(y)=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2})$ e $f_y(x)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-x}{x^2+y^2})$).

7. Sejam μ e ν medidas σ-finitas sobre $(X,\mathcal{A})$ e $(Y,\mathcal{B})$, e $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ e $h:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ funções $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$-mensuráveis, respectivamente. Considere $f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ definida por $f(x,y)=g(x)h(y)$. Mostre que:

(a) f é $\mu\otimes\nu$-integrável sse g é μ-integrável e h é ν-integrável;

(b) Se f é $\mu\otimes\nu$-integrável então $\int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu=\int_X g d\mu\int_Y h d\nu$.

8. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida σ-finita e λ a medida de Borel sobre $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dada $f:X\to\mathbb{R}^+$ $\mathcal{A}$-mensurável, considere o subconjunto de $X\times\mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(f)=\{(x,y):x\in X,\ 0\leq y<f(x)\}.$$

Mostre que:

(a) $\varphi(f)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$;

(b) $\mu\otimes\lambda(\varphi(f))=\int_X f d\mu$.

9. (**Fórmula de integração por partes**) Sejam μ uma medida σ-finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, f e g funções integráveis com valores em $\mathbb{R}$ e $F(x) = \int_{]-\infty,x]} f d\mu$ e $G(x) = \int_{]-\infty,x]} g d\mu$ definidas para $x \in \mathbb{R}$. Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, mostre que

$$\int_{]a,b]} fGd\mu = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{]a,b]} g(y)F(y-0)d\mu.$$

(Sugestão: para $E = \{(x,y) \in]a,b] \times]a,b] : y \leq x\}$ e $h(x,y) = f(x)g(y)\mathbb{1}_E$, aplique o Teorema de Fubini para calcular $\int h \, d\mu \otimes \mu$ de duas maneiras diferentes).

Obtenha fórmulas análogas para os integrais $\int_{[a,b]} fGd\mu$, $\int_{]a,b[} fGd\mu$ e $\int_{[a,b[} fGd\mu$.

6.7 Bibliografia

COHN, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

FERNANDEZ, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

HALMOS, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

JACOD, J. (1999). *Théorie de l'Intégration*, Université Paris VI, Paris.

POZO, M.A.J. (1989). *Medida, Integración y funcionales*, Editorial Pueblo y Educación, Habana.

RUDIN, W. (1974). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Capítulo 7

Transformação de medidas

Dada uma medida definida num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ introduzimos as noções de medida imagem de μ por uma transformação g e de medida de densidade f em relação a μ, e estudamos a integração relativamente a cada uma dessas novas medidas. Os últimos parágrafos do capítulo são consagrados à fórmula de mudança de variável no integral de Lebesgue e ao produto de convolução em $\mathbb{R}^d$.

7.1 Medidas imagem e ponderação

Introduzimos neste parágrafo duas formas de construir medidas a partir duma medida μ definida sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. A primeira permite definir uma medida num espaço mensurável $(Y, \mathcal{B})$ à custa duma aplicação mensurável g de $(X, \mathcal{A})$ em $(Y, \mathcal{B})$.

Definição 7.1.1 *Dada $g : X \to Y$ $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-mensurável, chamamos* <u>*medida imagem de μ por g*</u> *à medida μg^{-1} definida por*

$$(\mu g^{-1})(B) = \mu(g^{-1}(B)), \text{ para } B \in \mathcal{B}.$$

A segunda forma de construir medidas a partir de μ permite definir uma nova medida em $(X, \mathcal{A})$ à custa duma aplicação mensurável não-negativa f definida em $(X, \mathcal{A})$, em que $f(x)$ pode ser interpretado como a "densidade de massa" associada ao ponto x de X.

Definição 7.1.2 *Dada $f \in \mathcal{M}_+$, chamamos* <u>*ponderação de μ por f*</u> *ou* <u>*medida de densidade f em relação a μ*</u> *à medida $f\mu$ definida por*

$$(f\mu)(A) = \int_A f d\mu, \text{ para } A \in \mathcal{A}.$$

7.2 Integração relativamente às medidas μg^{-1} e $f\mu$

Estudamos agora a integração relativamente a cada uma das medidas definidas no parágrafo anterior.

Teorema 7.2.1 (da mudança de variável) *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado, $(Y, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e $g : X \to Y$ $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-mensurável. Se $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{B}$-mensurável, então:*

a) Se f é não-negativa, então

$$\int_Y f d(\mu g^{-1}) = \int_X f \circ g d\mu;$$

b) f é μg^{-1}-integrável sse $f \circ g$ é μ-integrável, e nesse caso vale a igualdade anterior.

Demonstração: a) Se $f = 1\!\!1_B$, com $B \in \mathcal{B}$, temos $\int_Y f d(\mu g^{-1}) = (\mu g^{-1})(B) = \mu(g^{-1}(B)) = \int_X 1\!\!1_{g^{-1}(B)} d\mu = \int_X 1\!\!1_B \circ g d\mu = \int_X f \circ g d\mu$. Se $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1\!\!1_{B_i}$, com $\alpha_i \geq 0$ e $B_i \in \mathcal{B}$, então $\int_Y f d(\mu g^{-1}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_Y 1\!\!1_{B_i} d(\mu g^{-1}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X 1\!\!1_{B_i} \circ g d\mu = \int_X (\sum_{i=1}^n \alpha_i 1\!\!1_{B_i}) \circ g d\mu = \int_X f \circ g d\mu$. Finalmente, se $f \in \mathcal{M}_+$, existe $(f_n) \subset \mathcal{E}_+$ tal que $f_n \uparrow f$. Como $f_n \circ g \uparrow f \circ g$, então, pelo teorema da convergência monótona, $\int_Y f_n d(\mu g^{-1}) \uparrow \int_Y f d(\mu g^{-1})$ e $\int_X f_n \circ g d\mu \uparrow \int_X f \circ g d\mu$. Para concluir, basta agora notar que sendo f_n escalonada não-negativa, vale a igualdade $\int_Y f_n d(\mu g^{-1}) = \int_X f_n \circ g d\mu$.

b) Atendendo à igualdade expressa em a), temos f é μg^{-1}-integrável sse f^+ e f^- são μg^{-1}-integráveis sse $f^+ \circ g$ e $f^- \circ g$ são μ-integráveis sse $(f \circ g)^+$ e $(f \circ g)^-$ são μ-integráveis sse $f \circ g$ é μ-integrável. Além disso, usando as decomposições $f = f^+ - f^-$ e $f \circ g = f^+ \circ g - f^- \circ g$, uma tal igualdade vale ainda para f μg^{-1}-integrável. $\square$

Teorema 7.2.2 *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e $f \in \mathcal{M}_+$. Se $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, então:*

a) Se h é não-negativa, então

$$\int h d(f\mu) = \int h f d\mu;$$

b) h é $f\mu$-integrável sse hf é μ-integrável, e nesse caso vale a igualdade anterior.

Demonstração: Análoga à do teorema anterior. $\square$

7.3 Mudança de variável no integral de Lebesgue

Este parágrafo é consagrado à fórmula de mudança de variável no integral de Lebesgue. Esta fórmula tem por base o resultado seguinte que estabelece que a medida imagem de λ por g^{-1}, para g bijectiva e suficientemente regular, tem densidade

$x \to |det(J_g(x))|$ relativamente a λ, onde $J_g(x)$ representa a matriz jacobiana de g no ponto x. A sua demonstração será apresentada no parágrafo 7.4.

Teorema 7.3.1 *Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^d$ e $g : U \to V$ bijectiva com g e g^{-1} de classe C^1 (isto é, g e g^{-1} possuem derivadas parciais contínuas em U e V, respectivamente). Então, para $B \in \mathcal{B}(U)$,*

$$\lambda(g(B)) = \int_B |det(J_g(x))| d\lambda(x).$$

Os Teoremas 7.2.1 e 7.2.2 conduzem-nos à fórmula de mudança de variável no integral de Lebesgue (mais precisamente, no integral relativamente à medida de Borel).

Teorema 7.3.2 (mudança de variável no integral de Lebesgue, I) *Nas condições do Teorema 7.3.1, seja $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}(V)$-mensurável. Se f é não-negativa, então*

$$\int_V f d\lambda = \int_U (f \circ g)(x) |det(J_g(x))| d\lambda(x).$$

Além disso, para f qualquer, a λ-integrabilidade de f é equivalente à λ-integrabilidade de $(f \circ g)(\cdot)|det(J_g(\cdot))|$, e nesse caso vale a igualdade anterior.

Demonstração: Sendo f não-negativa, e tendo em conta que a medida imagem de λ por g^{-1} tem densidade $x \to |det(J_g(x))|$ relativamente a λ, então, pelos Teoremas 7.2.1 e 7.2.2, temos $\int_V f d\lambda = \int_V (f \circ g) \circ g^{-1} d\lambda = \int_U f \circ g d(\lambda (g^{-1})^{-1}) = \int_U (f \circ g)(x) |det(J_g(x))| d\lambda(x)$. Se f é qualquer, basta aplicar a igualdade anterior às partes positiva e negativa de f. $\square$

Mudanças de variável habituais ($y \to x$, $y = g(x)$):

1. Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$: $g :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$g(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

2. Coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$: $g :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$g(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r \sin\theta, z).$$

3. Coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$: $g :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$g(r, \theta, \varphi) = (r \cos\theta \,\sin\varphi, r \sin\theta \,\sin\varphi, r \cos\varphi).$$

Corolário 7.3.3 *Nas condições do Teorema 7.3.1, se μ é uma medida sobre $(U, \mathcal{B}(U))$ que admite uma densidade f relativamente à medida de Lebesgue, e ν é a medida imagem de μ por g, então ν admite uma densidade h relativamente à medida de Lebesgue dada por*

$$h(\cdot) = (f \circ g^{-1})(\cdot) |det J_{g^{-1}}(\cdot)| \mathbb{1}_V(\cdot).$$

Demonstração: Para $B \in \mathcal{B}(V)$, temos $\nu(B) = \mu(g^{-1}(B)) = \int_{g^{-1}(B)} f d\lambda = \int_B (f \circ g^{-1})(x)|det J_{g^{-1}}(x)| d\lambda(x)$. $\square$

Apresentamos de seguida mais duas fórmulas de mudança de variável em integrais. A primeira, relativa ao integral de Lebesgue (medida completa), é uma consequência dos Teoremas 4.5.1 e 7.3.2. A segunda, relativa ao integral de Riemann, é uma consequência dos Teoremas 4.6.1 e 7.3.2.

Corolário 7.3.4 (mudança de variável no integral de Lebesgue, II) *Nas condições do Teorema 7.3.1, seja $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mathcal{B}}(V)$-mensurável. Se f é não-negativa, então*

$$\int_V f d\bar{\lambda} = \int_U (f \circ g)(x)|det(J_g(x))| d\bar{\lambda}(x).$$

Para f qualquer, f é $\bar{\lambda}$-integrável sse $(f \circ g)(\cdot)|det(J_g(\cdot))|$ é $\bar{\lambda}$-integrável, e nesse caso vale a igualdade anterior.

Demonstração: Comecemos por notar que pelo Exercício 7.6.10, g é $\overline{\mathcal{B}}(V) - \overline{\mathcal{B}}(U)$-mensurável, o que implica que $f \circ g$ seja $\overline{\mathcal{B}}(U)$-mensurável. Além disso, sendo $x \to |det(J_g(x))|$ $\mathcal{B}(U)$-mensurável é também $\overline{\mathcal{B}}(U)$-mensurável. Admitamos em primeiro lugar que f é não-negativa. Existe então f^* $\overline{\mathcal{B}}(V)$-mensurável tal que $f = f^* \geq 0$ λ-q.t.p. e $\int_V f d\overline{\lambda} = \int_V f^* d\lambda$. Pelo Teorema 7.3.2, $\int_V f^* d\lambda = \int_U (f^* \circ g)(x)|det(J_g(x))| d\lambda(x)$ $= \int_U (f^* \circ g)(x)|det(J_g(x))| d\overline{\lambda}(x) = \int_U (f \circ g)(x)|det(J_g(x))|\ d\lambda(x)$, pois, sendo g bijectiva, $(f^* \circ g)(\cdot)|det(J_g(\cdot))| = (f \circ g)(\cdot)|det(J_g(\cdot))|$ λ-q.t.p.. Se f é qualquer, e para concluir a demonstração, basta aplicar a igualdade anterior às partes positiva e negativa de f. $\square$

Corolário 7.3.5 (mudança de variável no integral de Riemann) *Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^d$ mensuráveis à Jordan, $g : U \to V$ bijectiva com g e g^{-1} de classe C^1 e $f : V \to \mathbb{R}$ limitada. Então, f é integrável à Riemann sse $(f \circ g)(\cdot)|det(J_g(\cdot))|$ o é, e nesse caso*

$$\int_V f(y) dy = \int_U (f \circ g)(x)|det(J_g(x))| dx.$$

Demonstração: Sejam $A = \{x \in U : (f \circ g)(\cdot)|det(J_g(\cdot))|$ é descontínua em $x\}$ e $B = \{y \in V : f$ é descontínua em $y\}$. Como $g^{-1}(B) = A$, temos sucessivamente (cf. Teorema 0.4.2 e Exercício 2.9.27), f é integrável à Riemann sse $\lambda^*(B) = 0$ sse $\overline{\lambda}(B) = 0$ e $B \in \overline{\mathcal{B}}(V)$ sse $\overline{\lambda}(g^{-1}(B)) = 0$ e $g^{-1}(B) \in \overline{\mathcal{B}}(U)$ sse $\lambda^*(g^{-1}(B)) = 0$ sse $\lambda^*(A) = 0$ sse $(f \circ g)(\cdot)|det(J_g(\cdot))|$ é integrável à Riemann. Sendo f integrável à Riemann, f é integrável à Lebesgue (cf. Teorema 4.6.1), e, pelo Teorema 7.3.2, $\int_V f(y) dy = \int_V f d\lambda = \int_U (f \circ g)(x)|det(J_g(x))| d\lambda(x) = \int_U (f \circ g)(x)|det(J_g(x))| dx$. $\square$

7.4 Demonstração do teorema da mudança de variável

A demonstração do Teorema 7.3.1 é baseada em alguns resultados preliminares que enunciamos e demonstramos de seguida. O primeiro deles não é mais do que o próprio Teorema 7.3.1 para aplicações lineares.

Lema 7.4.1 *Se $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é linear e invertível, então para todo o $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\lambda(g(B)) = |detJ_g|\lambda(B).$$

Demonstração: Sendo g uma aplicação linear invertível, existem aplicações lineares $g_1, \ldots, g_k$, tais que $g = g_k \circ \ldots \circ g_1$ onde cada uma das aplicações $g_\ell, \ell = 1, \ldots, k$, é de um dos seguintes tipos:

i) $g_\ell(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, \alpha x_i, \ldots, x_d)$;

ii) $g_\ell(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_d)$;

iii) $g_\ell(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_d)$;

para algum $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Basta agora estabelecer o resultado para aplicações de cada um dos tipos anteriores pois nesse caso, $(\lambda g)(B) = (\lambda g_k)((g_{k-1} \circ \ldots \circ g_1)(B)) = |detJ_{g_k}|\lambda(g_{k-1} \circ \ldots \circ g_1)(B)) = |detJ_{g_k}| \ldots |detJ_{g_1}|\lambda(B) = |detJ_g|\lambda(B)$, para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Se g_ℓ é de um dos tipos *i)* ou *ii)* o resultado é consequência imediata da definição de medida de Lebesgue, uma vez que, pelo Lema da igualdade de medidas, basta estabelecer o resultado para $B = \prod_{i=1}^d]a_i, b_i]$, com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Se g_ℓ é do tipo *iii)* $detJ_{g_\ell} = 1$. Denotando por $\bar{u}_i$ o vector $(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_d)$ temos, pela fórmula integral para a medida produto, $\lambda(g_\ell(B)) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \lambda((g_\ell(B))_{\bar{u}_i}) d\lambda\bar{u}_i = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \lambda(B_{\bar{u}_i}) d\lambda\bar{u}_i = \lambda(B)$, para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, pois $(g_\ell(B))_{\bar{u}_i} = u_j + B_{\bar{u}_i}$ e $\lambda((g_\ell(B))_{\bar{u}_i}) = \lambda(B_{\bar{u}_i})$, pela invariância da medida de Lebesgue para translações. $\square$

Antes de continuarmos, precisamos de introduzir alguma notação. Se $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é uma aplicação linear e $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,d}$ é a sua matriz relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^d$, denotamos por $\|T\|$ o número real $\|T\| = \max_{i=1,\ldots,d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|$. A aplicação $T \to \|T\|$ é uma norma no espaço vectorial das aplicações lineares de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}^d$. Se $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é uma outra aplicação linear temos $\|T \circ S\| \leq \|T\| \, \|S\|$.

Sendo U um aberto em $\mathbb{R}^d$ e $F : U \to \mathbb{R}^d$ diferenciável em $x_0 \in U$, vamos denotar por $F'(x_0)$ a derivada de F em x_0, isto é, $F'(x_0)$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}^d$ cuja matriz relativamente às bases canónicas é a matriz jacobiana de F em x_0.

Lema 7.4.2 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto e $F : U \to \mathbb{R}^d$ diferenciável. Dados $\epsilon > 0$ e $C \subset U$ um cubo semi-aberto à esquerda tais que $\|F'(x) - I\| \leq \epsilon$ para todo o $x \in C$, onde I designa a aplicação identidade em $\mathbb{R}^d$, então*

$$\lambda^*(F(C)) \leq (1 + \epsilon)^d \lambda(C).$$

Demonstração: Sendo ℓ a aresta de C, vamos demonstrar que $F(C)$ está contido num cubo de aresta $(1+\epsilon)\ell$. Comecemos por fixar $x_0 \in C$ tal que $C \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\|_\infty \leq \ell/2\}$, onde $\|\cdot\|_\infty$ é a norma do máximo em $\mathbb{R}^d$ ($\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,d} |x_i|$, para $x = (x_1, \ldots, x_n)$). Como para todo o $x \in C$, $\|F'(x) - I\| \leq \epsilon$, concluímos que $\|(F(x) - x) - (F(x_0) - x_0)\|_\infty \leq \epsilon \|x - x_0\|_\infty$, para $x \in C$, ou ainda, $\|F(x) - F(x_0)\|_\infty \leq (1+\epsilon)\|x - x_0\|_\infty \leq (1+\epsilon)\ell/2$, o que prova o pretendido. □

Lema 7.4.3 *Sejam U e V abertos em $\mathbb{R}^d$ e $g : U \to V$ uma bijecção com g e g^{-1} de classe C^1. Se $a > 0$ e $B \in \mathcal{B}(U)$ são tais que $|det J_g(x)| \leq a$ para todo o $x \in B$, então*

$$\lambda(g(B)) \leq a\lambda(B).$$

Demonstração: a) Comecemos por estabelecer a desigualdade anterior para $B \in \mathcal{B}(U)$ aberto em $\mathbb{R}^d$, tal que $\overline{B}$ é subconjunto compacto de U. Sendo g^{-1} de classe C^1 e $g(\overline{B})$ compacto, as derivadas parciais de g^{-1} são limitadas por uma constante $M > 0$ em $g(\overline{B})$. Assim, para todo o $x \in \overline{B}$, $\|(g^{-1})'(g(x))\| \leq dM$. Por outro lado, sendo $\overline{B}$ compacto, as derivadas parciais de g são aí uniformemente contínuas. Assim, para $\epsilon > 0$, fixo à partida, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \overline{B} \, : \, \|x - y\|_\infty \leq \delta \Rightarrow \|g'(x) - g'(y)\| \leq \frac{\epsilon}{dM}.$$

Sendo B aberto em $\mathbb{R}^d$, B é reunião numerável disjunta de cubos semi-abertos à esquerda, $C_i, i \in I$, cujas arestas podemos supôr serem no máximo iguais a 2δ (cf. Teorema 1.4.2). Designemos por C um desses cubos, e por x_0 o seu centro. Consideremos a aplicação $F : U \to \mathbb{R}^d$ definida por $F = (g^{-1})'(g(x_0)) \circ g$. Para $x \in U$, $F'(x) = (g^{-1})'(g(x_0)) \circ g'(x)$ e $(g^{-1})'(g(x)) \circ g'(x) = I$. Assim, $F'(x) - I = (g^{-1})'(g(x_0)) \circ (g'(x) - g'(x_0))$ e também $\|F'(x) - I\| \leq \|(g^{-1})'(g(x_0))\| \|(g'(x) - g'(x_0))\| \leq \epsilon$, para todo o $x \in C$. Pelo Lema 7.4.2 (notemos que $F(C)$ é mensurável pois F é invertível)

$$\lambda(F(C)) \leq (1+\epsilon)^d \, \lambda(C). \tag{7.4.4}$$

Por outro lado, sendo $g'(x)$ a inversa de $(g^{-1})'(g(x))$, $g'(x_0)(F(x)) = g(x)$, o que implica $g(C) = g'(x_0)(F(C))$. Pelo Lema 7.4.2 e por (7.4.4), obtemos $\lambda(g(C)) = |det J_g(x_0)| \lambda(F(C)) \leq |det J_g(x_0)| (1+\epsilon)^d \lambda(C) \leq a(1+\epsilon)^d \lambda(C)$. Como $B = \sum_{i \in I} C_i$, obtemos finalmente $\lambda(g(B)) = \sum_{i \in I} \lambda(g(C_i)) \leq \sum_{i \in I} a(1+\epsilon)^d \lambda(C_i) = a(1+\epsilon)^d \lambda(B)$.

b) Suponhamos agora que $B \in \mathcal{B}(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^d$. Seja (B_i) uma sucessão crescente de abertos em $\mathbb{R}^d$ com $\overline{B}_i \subset U$, $\overline{B}_i$ compacto e $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ (como $B = \sum_{i \in \mathbb{N}} C_i$ com (C_i) cubos semi-abertos à esquerda, podemos tomar $B_1 = int(C_1)$, $B_2 = B_1 \bigcup int(C_2)$,...). Por a), $\lambda(g(B_i)) \leq a\lambda(B_i)$, para todo o $i \in \mathbb{N}$, donde $\lambda(g(B)) = (\lambda g)(\lim B_i) = \lim (\lambda g)(B_i) \leq a \lim \lambda(B_i) = a\lambda(B)$.

c) Finalmente, seja $B \in \mathcal{B}(U)$ nas condições do enunciado. Para $\epsilon > 0$ fixo, sejam W um qualquer aberto em $\mathbb{R}^d$ com $B \subset W \subset U$ e $W_{a+\epsilon} = \{x \in W : |detJ_g(x)| < a+\epsilon\}$. Por b), $\lambda(g(W_{a+\epsilon})) \leq (a+\epsilon)\lambda(W_{a+\epsilon})$, e como $B \subset W_{a+\epsilon} \subset W$, $\lambda(g(B)) \leq \lambda(g(W_{a+\epsilon})) \leq (a+\epsilon)\lambda(W_{a+\epsilon}) \leq (a+\epsilon)\lambda(W)$, ou ainda, $\lambda(g(B)) \leq a\lambda(W)$.

Para concluir, basta notar que, pela regularidade da medida de Lebesgue (ver Exercício 2.9.32), $\lambda(g(B)) \leq a \inf\{\lambda(W) : W \text{ aberto em } \mathbb{R}^d, B \subset W\} = a\lambda(B)$. □

Demonstração do Teorema 7.3.1: a) Suponhamos em primeiro lugar que $\lambda(B) < +\infty$. Para $\epsilon > 0$ e $k = 1, 2, \ldots$, consideremos os conjuntos $B_k = \{y \in B : (k-1)\epsilon \leq |detJ_g(y)| < k\epsilon\}$. Pelo Lema 7.4.3, como $|detJ_g(y)| < k\epsilon$ para todo o $y \in B_k$, e $|detJ_{g^{-1}}(x)| \leq 1/((k-1)\epsilon)$ para todo o $x \in g(B_k)$, temos $\lambda(g(B_k)) \leq k\epsilon\lambda(B_k)$ e $\lambda(g^{-1}(g(B_k)) \leq \frac{1}{(k-1)\epsilon}\lambda(g(B_k))$, ou seja, $(k-1)\epsilon\lambda(h(B_k)) \leq \lambda(g(B_k)) \leq k\epsilon\lambda(B_k)$, ou ainda, $|\lambda(g(B_k)) - \int_{B_k} |detJ_g(x)|d\lambda| \leq \epsilon\lambda(B_k)$, para $k = 1, 2, \ldots$. Como $B = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k$, obtemos $|\lambda(g(B)) - \int_B |detJ_g(x)|d\lambda| \leq \epsilon\lambda(B)$, o que permite concluir.

b) Suponhamos agora que $\lambda(B) = +\infty$. Existe então uma sucessão (B_k) em $\mathcal{B}(U)$ com $B_k \uparrow B$ e $\lambda(B_k) < +\infty$ para todo o k. Para concluir basta utilizar a) e o teorema da convergência monótona. □

7.5 O produto de convolução em $\mathbb{R}^d$

O conjunto $\mathbb{R}^d$ pode ser identificado com o conjunto das medidas de Dirac em $\mathbb{R}^d$ através da aplicação $a \to \delta_a$, para $a \in \mathbb{R}^d$. A noção de produto de convolução de medidas que introduzimos a seguir, prolonga de forma adequada a operação adição em $\mathbb{R}^d$.

Definição 7.5.1 *Sejam μ e ν medidas finitas em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. O produto de convolução de μ por ν é a medida imagem de $\mu \otimes \nu$ pela aplicação $(x, y) \to x + y$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}^d$. Será denotado por $\mu \star \nu$.*

O produto de convolução $\mu \star \nu$ de duas medidas finitas é uma medida finita. Pelo Teorema 7.2.1 e pelo teorema de Fubini, para todo a função $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mensurável e não-negativa f, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \star \nu &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x+y) d\mu \otimes \nu(x, y) \\
&= \int \left(\int f(x+y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int \left(\int f(x+y) d\mu(x) \right) d\nu(y).
\end{aligned}$$

Além disso, para f de sinal não-constante, f é $\mu\star\nu$-integrável sse $(x,y)\to f(x+y)$ é $\mu\otimes\nu$-integrável. Neste caso, as fórmulas anteriores continuam válidas.

Para $a\in \mathbb{R}^d$ e $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\delta_a\star\mu(A)=\mu\star\delta_a(A)=\mu(A-a)$. δ_0 é assim elemento neutro para o produto de convolução.

Teorema 7.5.2 *O produto de convolução é associativo, comutativo e distributivo relativamente à adição de medidas.*

Teorema 7.5.3 *Se a medida μ tem f por densidade relativamente a λ, o produto de convolução $\mu\star\nu$ tem densidade relativamente a λ dada por*

$$(f\star\nu)(x)=\int f(x-y)d\nu(y),\ \lambda-q.t.p.$$

Demonstração: Para $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, temos $\mu\star\nu(A)=\int(\int \mathbb{I}_A(x+y)d\mu(x))d\nu(y)=\int(\int \mathbb{I}_A(x+y)f(x)d\lambda(x))d\nu(y)=\int(\int \mathbb{I}_A(z)f(z-y)d\lambda(z))d\nu(y)=\int_A\int f(z-y)d\nu(y)d\lambda(z)$, o que permite concluir. $\square$

Notemos que $f\star\nu$ é claramente mensurável em consequência do teorema de Fubini, uma vez que a aplicação $(x,y)\to f(x-y)$ sendo composição de aplicações mensuráveis é mensurável.

Definição 7.5.4 *Se f é uma função mensurável e μ é uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tais que o integral $\int f(x-y)d\mu(y)$ está definido em λ quase todo o ponto x de $\mathbb{R}^d$, então a função de x assim definida diz-se produto de convolução de f por μ e é denotada por $f\star\mu$.*

Se f é λ-integrável e não-negativa e μ é finita, então $f\star\mu$ é integrável. Se ν tem densidade g então a densidade de $\mu\star\nu$ escreve-se na forma $\int f(x-y)g(y)d\lambda(y)$, o que define ainda uma função integrável.

Definição 7.5.5 *Se f e g são funções $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mensuráveis e se o integral $\int f(x-y)g(y)d\lambda(y)$ está definido em λ quase todo o ponto x de $\mathbb{R}^d$, então a função de x assim definida diz-se produto de convolução de f por g e é denotada por $f\star g$.*

Notemos que se $f\star g$ existe, então $g\star f$ existe também e é igual a $f\star g$. Além disso $f\star g$ é mensurável.

Teorema 7.5.6 *Se $f\in L^1(\lambda)$, o produto $f\star g$ está definido para todo o $g\in L^p(\lambda)$ com $p\in[1,+\infty]$. Além disso, $f\star g\in L^p(\lambda)$ e $\|f\star g\|_p\le\|f\|_1\|g\|_p$.*

Demonstração: Basta supor que f e g são não-negativas. Para $p < +\infty$, temos $\|f \star g\|_p^p = \int(\int f(y)g(x-y)d\lambda(y))^p d\lambda(x) = \|f\|_1^p \int(\int(f(y)/\|f\|_1)g(x-y)d\lambda(y))^p d\lambda(x)$. Como a medida de densidade $f/\|f\|_1$ é de probabilidade podemos usar a desigualdade de Jensen e escrever $\|f \star g\|_p^p \leq \|f\|_1^p \int\int(f(y)/\|f\|_1)g^p(x-y)d\lambda(y)d\lambda(x) = \int f(y)/\|f\|_1 d\lambda(y) \int g^p(x)d\lambda(x) = \|f\|_1^p\|g\|_p^p$. Se $p = +\infty$, $f \star g$ está definida para todo o $x \in \mathbb{R}^d$ e $|f \star g(x)| \leq \|g\|_\infty\|f\|_1$. Logo, $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$. □

Uma propriedade importante do produto de convolução é o seu caracter regularizador. Um primeiro resultado nesse sentido é apresentado a seguir (ver Exercício 7.6.17). Para $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^d$, denotamos por $\tau_x f$ a aplicação definida, para $t \in \mathbb{R}^d$, por $\tau_x f(t) = f(t+x)$, a que chamamos "translação de f".

Lema 7.5.7 *Para $p \in [1, +\infty]$ e $f \in L^p(\lambda)$ fixos, a aplicação $x \to \tau_x f$ de $\mathbb{R}^d$ em $L^p(\lambda)$, é uniformemente contínua.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, qualquer, pretendemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $\|\tau_x f - \tau_y f\|_p < \epsilon$ se $\|x - y\| < \delta$. Sendo o conjunto das funções contínuas de suporte compacto denso em $L^p(\lambda)$ (cf. Teorema 5.5.4), existe g contínua de suporte compacto tal que $\|f - g\|_p < \epsilon/3$. Sendo g uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que, para $\|x - y\| < \delta$, se tem $|g(x) - g(y)| < \epsilon/(6\lambda(S))$, onde S denota o suporte de g. Como $\|\tau_x f - \tau_x g\|_p = \|f - g\|_p$ e $\|\tau_x g - \tau_x g\|_p \leq \epsilon\lambda((S-x) \cup (S-y))/(6\lambda(S)) \leq \epsilon/3$, obtemos $\|\tau_x f - \tau_y f\|_p = \|\tau_x f - \tau_y f\|_p \leq \|\tau_x f - \tau_x g\|_p + \|\tau_x g - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - \tau_y f\|_p \leq \|f - g\|_p + \epsilon/3 + \|f - g\|_p < \epsilon$. □

Teorema 7.5.8 *O produto de convolução dum elemento de $L^1(\lambda)$ por um elemento de $L^\infty(\lambda)$, é uma função uniformemente contínua e limitada.*

Demonstração: Sabemos já que $f \star g$ é limitada. Para concluir que é uniformemente contínua basta notar que, para $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|f \star g(x) - f \star g(y)| \leq \|g\|_\infty \int |\tau_x f(z) - \tau_y f(z)| d\lambda(z) = \|g\|_\infty \|\tau_x f - \tau_y f\|_1$ e usar o lema anterior. □

Do Teorema 7.5.6 concluímos, em particular, que se f e g então em $L^1(\lambda)$ então $f \star g$ está também em $L^1(\lambda)$. O produto de convolução é assim uma operação interna em $L^1(\lambda)$ que é associativa, comutativa, distributiva relativamente à adição, e além disso satisfaz $\alpha(f \star g) = (\alpha f) \star g = f \star (\alpha g)$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos então que $L^1(\lambda)$ é uma álgebra de Banach sobre $\mathbb{R}$ para o produto de convolução. Esta álgebra de Banach não tem elemento identidade, isto é, não existe $e \in L^1(\lambda)$ tal que $e \star f = f$, para todo o $f \in L^1(\lambda)$ (utilize o Exercício 4.7.6 para mostrar que existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ com $\lambda(A) < +\infty$, tal que $g \star \mathbb{1}_A \neq \mathbb{1}_A$, para todo o $g \in L^1(\lambda)$). No entanto, como veremos de seguida, $L^1(\lambda)$ possui "aproximações da identidade", isto é, existem sucessões de funções (e_n) em $L^1(\lambda)$ para as quais $f \star e_n \to f$ (num sentido a precisar), para todo o $f \in L^1(\lambda)$.

Vejamos como podemos construir aproximações da identidade. Seja ϕ uma função integrável não-negativa com $\int \phi(x)d\lambda(x) = 1$. Para $n \in \mathbb{N}$, definamos, para $x \in \mathbb{R}^d$, a função

$$\phi_{h_n}(x) = \phi(x/h_n)/h_n^d, \tag{7.5.9}$$

onde (h_n) é uma sucessão de números reais estritamente positivos que converge para zero quando $n \to +\infty$. Claramente $\int \phi_{h_n}(x)d\lambda(x) = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 7.5.10 *Para $f \in L^1(\lambda)$, a sucessão $f \star \phi_{h_n}$ converge para f em $L^1(\lambda)$, quando $n \to +\infty$.*

Demonstração: Para $x \in \mathbb{R}^d$, $f \star \phi_{h_n}(x) - f(x) = \int (f(x-y) - f(x))\phi_{h_n}(y)d\lambda(y)$, e $\|f \star \phi_{h_n} - f\|_1 \le \int\int |f(x-y) - f(x)|\phi_{h_n}(y)d\lambda(y)d\lambda(x) = \int \phi_{h_n}(y)\int |f(x-y) - f(x)|d\lambda(x)d\lambda(y) = \int \phi_{h_n}(y)\int |\tau_y f(x) - f(x)|d\lambda(x)d\lambda(y) = \int \phi_{h_n}(y)\|\tau_y f - f\|_1 d\lambda(y)$. Pelo Lema 7.5.7, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|y\| < \delta$ então $\|\tau_y f - f\|_1 < \epsilon/2$. Assim, $\|f \star \phi_{h_n} - f\|_1 \le \epsilon \int_{\|y\|<\delta} \phi_{h_n}(y)d\lambda(y)/2 + \int_{\|y\|\ge\delta} \phi_{h_n}(y)\|\tau_y f - f\|_1 d\lambda(y) \le \epsilon/2 + 2\|f\|_1 \int_{\|z\|\ge\delta/h_n} \phi(z)d\lambda(z)$. Para concluir, basta notar que, pelo teorema da convergência dominada, $\int_{\|z\|\ge\delta/h_n} \phi(z)d\lambda(z) < \epsilon/(4\|f\|_1)$, para n suficientemente grande. □

Teorema 7.5.11 *Para f limitada e uniformemente contínua, $f \star \phi_{h_n}$ converge uniformemente para f, quando $n \to +\infty$.*

Demonstração: Basta notar que sendo f limitada e uniformemente contínua, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|f \star \phi_{h_n} - f\|_\infty \le \epsilon/2 + 2\|f\|_\infty \int_{\|z\|\ge\delta/h_n} \phi(z)d\lambda(z)$. □

7.6 Exercícios

1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado, $(Y, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e $g : X \to Y$ $\mathcal{B}-\mathcal{A}$-mensurável. Mostre que μg^{-1} é uma medida em $(Y, \mathcal{B})$.

2. Mostre que qualquer medida de probabilidade ν sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ é medida imagem da medida de Lebesgue λ sobre $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. (Sugestão: para $F(y) = \nu(]-\infty, y])$, $y \in \mathbb{R}$, e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sup\{z \in \mathbb{R} : F(z) \le x\} = \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) > x\}$, mostre que $\nu = \lambda\, g^{-1}$).

3. Sejam λ a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ e g a função definida por $g(x) = mx + k$ com $m > 0$ e $k \in \mathbb{R}$. Determine $\lambda\, g^{-1}$.

4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e g uma aplicação de X num conjunto Y. Mostre que:

   (a) $\mathcal{B} = \{B \in Y : g^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ é uma σ-álgebra de partes de Y;

(b) g é $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-mensurável;

(c) Se μ é completa então μg^{-1} é completa;

(d) Se μg^{-1} é σ-finita então μ é σ-finita;

(e) Se g é injectiva, a recíproca de d) é também verdadeira.

5. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e $f \in \mathcal{M}_+$. Conclua que $f\mu$ é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$ mostrando que $f\mu(\emptyset) = 0$, $f\mu$ é aditiva e ascendentemente contínua.

6. Considere em $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ a medida contagem μ e seja ν uma qualquer medida sobre $\mathbb{N}$. Mostre que existe $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ tal que $\nu = f\mu$.

7. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada, não-decrescente, continuamente diferenciável com $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, e μ_F a medida de Stieltjes associada a F (ver Exercício 2.9.21).

(a) Para $-\infty < a \leq b < +\infty$, mostre que $\mu_F(]a, b]) = \int_{]a,b]} F' d\lambda$.

(b) Conclua que F' é λ-integrável e que $\mu_F = F'\lambda$.

8. Sejam λ a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente monótona e continuamente diferenciável. Mostre que $\lambda g^{-1} = |(g^{-1})'|\lambda$.

9. Sejam $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrável à Lebesgue e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mostre que $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(ax)$, é integrável e $\int g d\lambda = |a|^{-d} \int f d\lambda$.

10. Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^d$ e $g : U \to V$ bijectiva com g e g^{-1} de classe C^1. Mostre que se $B \in \overline{\mathcal{B}}(U)$ tem medida de Lebesgue nula então $g(B) \in \overline{\mathcal{B}}(V)$ e tem também medida de Lebesgue nula. Conclua que g é $\overline{\mathcal{B}}(V) - \overline{\mathcal{B}}(U)$-mensurável.

11. Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$, e $f, g : A \to \mathbb{R}^+$ definidas por $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $g(x, y) = \frac{1}{x^2}$. Mostre que:

(a) A é mensurável à Lebesgue;

(b) f é integrável à Lebesgue;

(c) g não é integrável à Lebesgue.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-3/2}$. Mostre que $\int f\, d\lambda = 2\pi$.

13. Mostre que $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} d\lambda = 2\pi$ (Sugestão: efectue uma mudança de variável para coordenadas polares). Conclua que $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} d\lambda = 1$.

14. Para $a \in \mathbb{R}^d$, mostre que $\delta_a \star \mu$ é a medida imagem de μ pela translação τ_a.

15. Seja (ϕ_{h_n}) a sucessão definida em (7.5.9). Mostre que se $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é mensurável e limitada, então $f \star \phi_{h_n}(x) \to f(x)$, em todo o ponto x de continuidade de f.

16. Sejam (ϕ_{h_n}) a sucessão definida em (7.5.9) e μ uma medida finita sobre $\mathbb{R}^d$. Mostre que

$$\int (\phi_{h_n} \star \mu)(x) h(x) d\lambda(x) \to \int h d\mu,$$

para toda a função h limitada e contínua sobre $\mathbb{R}^d$.

17. Para $m \in \mathbb{N}$, vamos denotar por C^m o conjunto das funções de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$ cujas derivadas parciais até à ordem m (inclusivé) existem e são contínuas. O subconjunto de C^m das funções de suporte compacto é denotado por C_c^m. Dados $f \in L^p$ e $g \in C_c^m$, para algum $p \in [1, +\infty]$ e $m \in \mathbb{N}$, mostre que $f \star g \in C^m$ e que, para $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial^\alpha (f \star g)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}(x) = f \star \frac{\partial^\alpha g}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}(x),$$

onde $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ e $\alpha_1 + \ldots + \alpha_d \leq m$.

7.7 Bibliografia

COHN, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

HALMOS, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

REVUZ, D. (1994). *Mesure et Intégration*, Hermann, Paris.

RUDIN, W. (1974). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Capítulo 8

Medidas com sinal

Sendo f uma função integrável definida no espaço mensurado $(X, \mathcal{A}, \mu)$, a função de conjunto definida, para $A \in \mathcal{A}$, por $\nu(A) = \int_A f d\mu$, satisfaz as propriedades que definem uma medida com excepção da não-negatividade. O estudo deste tipo de funções de conjunto, que faremos no presente capítulo, tem como principal objectivo a demonstração do Teorema de Radon-Nikodym.

8.1 Definição e primeiras propriedades

Tal como nos últimos capítulos, denotaremos por $(X, \mathcal{A})$ um qualquer espaço mensurável.

Definição 8.1.1 *Uma função de conjunto $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ diz-se uma <u>medida com sinal</u> se é σ-aditiva e $\nu(\emptyset) = 0$.*

Tendo em conta as observações feitas no parágrafo 2.1, concluímos que, sendo $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de X, uma medida com sinal é finitamente aditiva e toma apenas um dos valores $-\infty$ ou $+\infty$.

Uma medida é uma medida com sinal. Se ν é uma medida com sinal então $-\nu$ é também uma medida com sinal. Sendo μ uma medida em $(X, \mathcal{A})$ e f uma função μ-integrável ou μ-quase-integrável então

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \ A \in \mathcal{A}, \tag{8.1.2}$$

é uma medida com sinal.

Um mensurável $A \in \mathcal{A}$ diz-se de <u>medida com sinal finita</u> se $|\nu(A)| < +\infty$. A medida com sinal ν diz-se <u>finita</u> se todo o $A \in \mathcal{A}$ tem medida com sinal finita, e <u>σ-finita</u> se existir uma cobertura $(A_n) \subset \mathcal{A}$ de X com A_n de medida finita para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 8.1.3 *Se $A, B \in \mathcal{A}$ são tais que $A \subset B$ e $|\nu(B)| < +\infty$, então $|\nu(A)| < +\infty$.*

Demonstração: Como $B = (B - A) + A$, $\nu(B) = \nu(B - A) + \nu(A)$ e $|\nu(B)| < +\infty$, então as parcelas $\nu(B - A)$ e $\nu(A)$ são ambas finitas. □

Proposição 8.1.4 *Se $A, B \in \mathcal{A}$ são tais que $A \subset B$ e $|\nu(A)| < +\infty$, então $\nu(B-A) = \nu(B) - \nu(A)$.*

Proposição 8.1.5 *Se (A_n) é uma sucessão em $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos dois a dois, então $|\nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)| < +\infty$ sse $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| < +\infty$.*

Demonstração: Se $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| < +\infty$, então claramente $|\nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)| < +\infty$ uma vez que $|\nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)| = |\lim \sum_{n=1}^{k} \nu(A_n)| \leq \lim \sum_{n=1}^{k} |\nu(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)|$. Reciprocamente, consideremos as sucessões $A_n^+ = A_n$, se $\nu(A_n) \geq 0$, e $A_n^+ = \emptyset$, se $\nu(A_n) < 0$, e $A_n^- = \emptyset$, se $\nu(A_n) \geq 0$, e $A_n^- = \emptyset$, se $\nu(A_n) < 0$. Temos $A_n = A_n^+ + A_n^-$ e $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^-$. Assim, $\nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^+) + \nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^-)$ e, como $|\nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)| < +\infty$, também $|\nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^+)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n^+)| < +\infty$ e $|\nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^-)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n^-)| < +\infty$. Para concluir basta notar que $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n^+) + \nu(A_n^-)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n^+)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n^-)|$. □

Proposição 8.1.6 *Seja (A_n) uma sucessão em $\mathcal{A}$.*

a) Se (A_n) é crescente então $\lim \nu(A_n) = \nu(\lim A_n)$.

b) Se (A_n) é decrescente e se $|\nu(A_m)| < +\infty$ para algum natural m, então $\lim \nu(A_n) = \nu(\lim A_n)$.

Demonstração: Análoga à da correspondente propriedade para medidas. □

Notemos que no caso das medidas com sinal as convergências anteriores não são necessariamente monótonas uma vez que uma medida com sinal não é necessariamente monótona.

8.2 Decomposição de Hahn

Definição 8.2.1 *Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{A})$. Um conjunto $A \in \mathcal{A}$ diz-se: <u>positivo</u> se $\nu(E) \geq 0$ para todo o $E \in \mathcal{A}$ com $E \subset A$; <u>negativo</u> se $\nu(E) \leq 0$ para todo o $E \in \mathcal{A}$ com $E \subset A$; <u>nulo</u> se é negativo e positivo.*

O conjunto vazio é um conjunto nulo. Um conjunto positivo relativamente a ν é negativo relativamente a $-\nu$. Um subconjunto mensurável dum conjunto positivo (resp. negativo) é ainda positivo (resp. negativo).

A partir duma medida com sinal ν e dum seu conjunto positivo P, podemos definir uma medida em $\mathcal{A}$ por $\mu(A) = \nu(A \cap P)$, para $A \in \mathcal{A}$.

Proposição 8.2.2 *A reunião numerável de conjuntos positivos (resp. negativos) relativamente à medida com sinal ν é ainda um conjunto positivo (resp. negativo).*

Demonstração: Sejam (A_n) uma sucessão de conjuntos positivos e (B_n) uma sucessão em $\mathcal{A}$ com $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ e $B_n \subset A_n$. Dado $E \in \mathcal{A}$ com $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, temos $\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap E) \geq 0$, pois $B_n \cap E \subset A_n$ e A_n é positivo. $\square$

Podemos assim concluir que a classe dos conjuntos positivos e a dos conjuntos negativos são σ-anéis de partes de X uma vez que tais classe são obviamente estáveis para a diferença.

Lema 8.2.3 *Se $A \in \mathcal{A}$ é tal que $\nu(A) > 0$ então existe um conjunto positivo $B \subset A$ tal que $\nu(B) > 0$.*

Demonstração: Se A é positivo, basta tomar $B = A$. Caso contrário existe pelo menos um subconjunto de A de medida estritamente negativa. Seja k_1 o menor número natural para o qual existe $A_1 \subset A$ com $A_1 \in \mathcal{A}$ e $\nu(A_1) < -1/k_1$. Se $A - A_1$ é positivo, tomamos $B = A - A_1$ ($\nu(A) = \nu(B) + \nu(A_1) < \nu(B)$). Caso contrário, seja k_2 o menor número natural para o qual existe $A_2 \subset A - A_1$ com $A_2 \in \mathcal{A}$ e $\nu(A_2) < -1/k_2$. Se $A - (A_1 + A_2)$ é positivo, tomamos $B = A - (A_1 + A_2)$. Caso contrário, o processo repete-se obtendo-se uma sucessão $k_1 \leq k_2 \leq \ldots$ e uma sucessão de conjuntos disjuntos dois a dois $A_1, A_2, \ldots$, com $\nu(A_n) < -1/k_n$, onde k_n é o menor número natural para o qual existe $E \subset A - \sum_{i=1}^{n} A_i$ com $\nu(E) < -1/k_n$. Se em algum passo $A - \sum_{i=1}^{n} A_i$ é positivo, tomamos $B = A - \sum_{i=1}^{n} A_i$. Caso contrário tomamos $B = A - \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Como $\nu(A) = \nu(B) + \nu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)$, com $\nu(A) > 0$ e $\nu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) < 0$, então $|\nu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)| < +\infty$, e assim $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| < +\infty$ pela Proposição 8.1.5, o que implica que $\lim k_n = +\infty$. Claramente $B \subset A$ e $\nu(B) > \nu(A) > 0$. Provemos que B é positivo. Dado $E \in \mathcal{A}$, com $E \subset B \subset A - \sum_{i=1}^{n} A_i$, temos $\nu(E) \geq -1/(k_n - 1)$ (caso contrário, k_n não seria o menor número natural para o qual existe $E \subset A - \sum_{i=1}^{n} A_i$ com $\nu(E) < -1/k_n$) e assim $\nu(E) \geq \lim(-1/(k_n - 1)) = 0$. $\square$

Teorema 8.2.4 (decomposição de Hahn) *Existem um conjunto positivo P e um conjunto negativo N com $P \cup N = X$ e $P \cap N = \emptyset$. O par (P, N) diz-se <u>decomposição de Hahn de X</u> em relação a ν. Além disso, se (P_1, N_1) e (P_2, N_2) são decomposições de Hahn de X relativamente a ν, então $P_1 \triangle P_2$ e $N_1 \triangle N_2$ são nulos.*

Demonstração: Suponhamos que $\nu(A) < +\infty$, para todo o $A \in \mathcal{A}$, e sejam $\alpha = \sup\{\nu(A) : A \text{ é positivo}\}$ e (A_n) uma sucessão de conjuntos positivos com $\nu(A_n) \to \alpha$.

Pela Proposição 8.2.2, o conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ é positivo e $\nu(A) \leq \alpha$. Além disso, como $A - A_n \subset A$ e $\nu(A) = \nu(A_n) + \nu(A - A_n) \geq \nu(A_n) \to \alpha$, então $\nu(A) \geq \alpha$, e assim $\nu(A) = \alpha$. Tomemos então $P = A$ e $N = A^c$. N é negativo, pois se existisse $E \in \mathcal{A}$ com $E \subset N$ e $\nu(E) > 0$, então, pelo Lema 8.2.3, existiria também $D \subset E$ positivo com $\nu(D) > 0$, e nesse caso $\nu(A \cup D) = \nu(A) + \nu(D) > \nu(A) = \alpha$, o contrariaria a definição de α.

Sejam agora (P_1, N_1) e (P_2, N_2) decomposições de Hahn de X relativamente a ν. Como $P_1 - P_2 \subset P_1$ e $P_1 - P_2 \subset P_2^c = N_2$, então para $E \in \mathcal{A}$ com $E \subset P_1 - P_2$ temos $\nu(E) \geq 0$ e $\nu(E) \leq 0$, isto é, $P_1 - P_2$ é nulo. De forma análoga se prova que $P_2 - P_1$, $N_1 - N_2$ e $N_2 - N_1$ são conjuntos nulos, o que permite concluir que $P_1 \triangle P_2$ e $N_1 \triangle N_2$ são nulos. □

Notemos que se $Z \in \mathcal{A}$ é um conjunto nulo e (P, N) é uma decomposição de Hahn de X relativamente a ν, então $(P \cup Z, N - Z)$ e $(P - Z, N \cup Z)$ são também decomposições de Hahn de X relativamente a ν.

Se ν é a medida com sinal definida por (8.1.2), então (P, N), com $P = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ e $N = \{x \in X : f(x) < 0\}$, é uma decomposição de Hahn de X relativamente a ν.

8.3 Decomposição de Jordan

Vamos usar a decomposição de Hahn deduzida no parágrafo anterior para mostrar que uma medida com sinal pode ser escrita como diferença de duas medidas concentradas em conjuntos disjuntos (ver Exercício 2.9.11).

Definição 8.3.1 *Duas medidas μ e ν sobre $(X, \mathcal{A})$ dizem-se alheias, e escrevemos, $\mu \perp \nu$, se existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$.*

Se μ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$ e A e B em $\mathcal{A}$ são tais que $\mu(A \cap B) = 0$, então as medidas $\mu_1(E) = \mu(E \cap A)$ e $\mu_2(E) = \mu(E \cap B)$, para $E \in \mathcal{A}$, são medidas alheias.

Uma medida finita μ definida em $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ diz-se discreta (ou puramente atómica) se existe um conjunto numerável C tal que $\mu(C^c) = 0$. O menor dos conjuntos C com as propriedades anteriores diz-se suporte de μ. Claramente o suporte de μ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^d$ para os quais $\mu(\{x\}) > 0$. Uma medida discreta é alheia relativamente à medida de Lebesgue em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 8.3.2 (decomposição de Jordan) *Se ν é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{A})$ então existem medidas ν^+ e ν^- em $(X, \mathcal{A})$ tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$. As medidas ν^+ e ν^- são univocamente determinadas por ν e $\nu = \nu^+ - \nu^-$ diz-se a decomposição de Jordan de ν.*

Demonstração: Seja (P, N) uma decomposição de Hahn de X relativamente a ν. Tomemos $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$ e $\nu^-(A) = -\nu(A \cap N)$, para $A \in \mathcal{A}$. Claramente $\nu^+ \perp \nu^-$ e $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Para estabelecer a unicidade da decomposição de Jordan, comecemos por mostrar que para qualquer decomposição de ν da forma $\nu = \nu_1 - \nu_2$ com $\nu_1 \perp \nu_2$, as medidas ν_1 e ν_2 são definidas como atrás, a partir duma decomposição de Hahn de X relativamente a ν. Sendo ν_1 e ν_2 alheias, existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\nu_1(B) = \nu_2(B^c) = 0$. Para $E \in \mathcal{A}$ com $E \subset B$ temos $\nu(E) = \nu_1(E) - \nu_2(E) = -\nu_2(E) \leq 0$, e para $F \in \mathcal{A}$ com $F \subset B^c$ temos $\nu(F) = \nu_1(F) - \nu_2(F) = \nu_1(F) \geq 0$. B é assim negativo e B^c é positivo relativamente a ν, ou ainda, (B^c, B) é uma decomposição de Hahn de X relativamente a ν. Além disso, para $A \in \mathcal{A}$, $\nu_1(A) = \nu_1(A \cap B^c) = \nu_1(A \cap B^c) + \nu_2(A \cap B^c) = \nu(A \cap B^c)$ e $\nu_2(A) = \nu_2(A \cap B^c) = -(\nu_1(A \cap B) - \nu_2(A \cap B)) = -nu(A \cap B)$. Para concluir a demonstração, basta agora demonstrar que se (P, N) e (P', N') são decomposições de Hahn de X relativamente a ν, então $\nu(A \cap P) = \nu(A \cap P')$ e $\nu(A \cap N) = \nu(A \cap N')$, para todo o $A \in \mathcal{A}$. Com efeito, $\nu(A \cap P) = \nu(A \cap ((P - P') + P')) = \nu(A \cap (P - P')) + \nu(A \cap P') = \nu(A \cap P')$, pois $A \cap (P - P') \subset P \cap N'$, e $\nu(A \cap N) = \nu(A \cap ((N - N') + N')) = \nu(A \cap (N - N')) + \nu(A \cap N') = \nu(A \cap N')$, pois $A \cap (N - N') \subset N \cap P'$. $\square$

Corolário 8.3.3 (da demonstração) *Se (P, N) é uma decomposição de Hahn de X relativamente a ν então $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$ e $\nu^-(A) = -\nu(A \cap N)$ para todo o $A \in \mathcal{A}$.*

Definição 8.3.4 *Se ν é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{A})$, as medidas ν^+, ν^- e $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ dizem-se variação positiva de ν , variação negativa de ν e variação de ν, respectivamente.*

Tendo em conta o corolário anterior, a decomposição de Jordan da medida ν definida por (8.1.2) é dada por $\nu^+ = f^+\mu$ e $\nu^- = f^-\mu$. A variação de ν é dada por $|\nu| = |f|\mu$.

Proposição 8.3.5 *Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{A})$. Então:*

a) Uma das medidas ν^+ ou ν^- é finita;

b) Se ν é finita (resp. σ-finita) então ν^+, ν^- e $|\nu|$ são também finitas (resp. σ-finitas);

c) Se ν^+ e ν^- são finitas ou $|\nu|$ é finita (resp. σ-finitas) então ν também o é.

Demonstração: a) Se ν é uma medida com sinal, sabemos que $\nu(A) > -\infty$, para todo o $A \in \mathcal{A}$, ou $\nu(A) < +\infty$, para todo o $A \in \mathcal{A}$. Como $\nu = \nu^+ - \nu^-$, no primeiro caso ν^- é finita enquanto que no segundo ν^+ é finita. As alíneas b) e c) são consequências imediatas de a). $\square$

No resultado seguinte apresentam-se representações alternativas para ν^+, ν^- e $|\nu|$. Tais representações mostram claramente que a decomposição de Jordan duma medida com sinal depende apenas de ν e não da decomposição de Hahn considerada.

Proposição 8.3.6 *Se ν é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{A})$ então, para todo o $A \in \mathcal{A}$:*

a) $\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \subset A\}$;

b) $\nu^-(A) = \sup\{-\nu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \subset A\}$;

c) $|\nu|(A) = \sup\{\sum_{i=1}^n |\nu(A_i)| : A = \sum_{i=1}^n A_i,\ n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{A}\}$.

Demonstração: Sendo (P, N) uma decomposição de Hahn de X relativamente a ν, para qualquer subconjunto B de A, com $A, B \in \mathcal{A}$, temos $\nu(B) = \nu^+(B) - \nu^-(B) \leq \nu^+(B) \leq \nu^+(A)$. Além disso, $P \cap A \in \mathcal{A}$, com $P \cap A \subset A$ e $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$, o que prova a). De forma análoga se estabelece b). Sendo agora $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, uma qualquer partição de $A \in \mathcal{A}$, temos $|\nu|(A) = \sum_{i=1}^n |\nu|(A_i) \geq \sum_{i=1}^n |\nu(A_i)|$. Por outro lado, $|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A) = \nu(A \cap P) - \nu(A \cap N) = |\nu(A \cap P)| + |\nu(A \cap N)|$, o que permite concluir. $\square$

8.4 Teorema de Radon-Nikodym

Um dos objectivos principais do curso é, sem dúvida, dar a conhecer o teorema de Radon-Nikodym. Fá-lo-emos neste parágrafo. Além das suas aplicações à Análise, algumas das quais estudaremos nos próximos parágrafos, este resultado é também usado na Teoria das Probabilidades, sendo, por exemplo, de importância fundamental na formalização da noção de probabilidade condicionada.

O teorema de Radon-Nikodym dá-nos uma caracterização das medidas que admitem uma representação integral da forma (8.1.2) onde μ é uma medida fixada à partida. Conhecemos já exemplos de medidas que não admitem uma tal representação. Esse é o caso das medida discretas sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$, com μ a medida de Lebesgue. No entanto, se μ for a medida contagem toda medida discreta admite uma representação integral.

Definição 8.4.1 *Se μ e ν são medidas com sinal em $(X, \mathcal{A})$, dizemos que* <u>*ν é absolutamente contínua relativamente a μ*</u>*, e escrevemos $\nu \ll \mu$, se para todo o $A \in \mathcal{A}$, $|\mu|(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.*

Proposição 8.4.2 *Sejam μ e ν são medidas com sinal em $(X, \mathcal{A})$. As condições seguintes são equivalentes:*

i) $\nu \ll \mu$;

ii) $\nu^+ \ll \mu$ *e* $\nu^- \ll \mu$;

iii) $|\nu| \ll |\mu|$.

Demonstração: Mostraremos apenas que $i)$ implica $ii)$. Seja $A \in \mathcal{A}$, tal que $|\mu|(A) = 0$. Sendo (P, N) uma decomposição de X relativamente a ν, então $|\mu|(A \cap P) = 0$ e

$|\mu|(A \cap N) = 0$, o que, por hipótese, implica $\nu(A \cap P) = 0$ e $\nu(A \cap N) = 0$, ou ainda, $\nu^+(A) = 0$ e $\nu^-(A) = 0$. $\square$

Se ν é finita a continuidade absoluta de ν relativamente a μ pode ser expressa nos termos seguintes:

Teorema 8.4.3 *Se μ e ν são medidas com sinal em $(X, \mathcal{A})$ com ν finita e $\nu \ll \mu$, então*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathcal{A} : |\mu|(A) < \delta \Rightarrow |\nu|(A) < \epsilon.$$

A implicação recíproca vale para ν qualquer.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que existe $\epsilon > 0$ e uma sucessão (A_n) em $\mathcal{A}$, tal que $|\mu|(A_n) < 1/2^n$ e $|\nu|(A_n) \geq \epsilon$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Tomando $A = \limsup A_n$, temos $|\mu|(A) \leq |\mu|(\bigcup_{k \geq n} A_k) \leq \sum_{k \geq n} |\mu|(A_k) \leq \sum_{k \geq n} 1/2^k = 1/2^n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assim $|\mu|(A) = 0$. No entanto, sendo ν finita, $|\nu|(A) = \lim |\nu|(\bigcup_{k \geq n} A_k) \geq \limsup |\nu|(A_n) \geq \epsilon$, o que contradiz a hipótese. $\square$

Se ν é a medida com sinal definida por (8.1.2), ν é absolutamente contínua relativamente a μ. A questão que agora colocamos e cuja resposta é dada pelo teorema de Radon-Nikodym, é a de saber qual a relação que deve existir entre a medida μ e a medida com sinal ν para que ν se possa escrever, em função de μ, na forma (8.1.2). Bastará que ν seja absolutamente contínua relativamente a μ? Como veremos, pouco mais será necessário impôr.

Lema 8.4.4 *Se μ e ν são medidas finitas tais que $\nu \ll \mu$ e ν não é identicamente nula, então existe um conjunto $A \in \mathcal{A}$ e $\epsilon > 0$ tais que $\mu(A) > 0$ e A é positivo para a medida com sinal $\nu - \epsilon\mu$.*

Demonstração: Consideremos a decomposição de Hahn (P_n, N_n) de X relativamente à medida com sinal $\nu - \mu/n$. Basta agora demonstrar que $\mu(P_n) > 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que tal não é verdadeiro. Assim $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty P_n) = 0$ e também $\nu(\bigcup_{n=1}^\infty P_n) = 0$, pois $\nu \ll \mu$. Por outro lado, como $\nu(N_n) - \mu(N_n)/n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\nu(\bigcap_{n=1}^\infty N_n) \leq \nu(N_n) \leq \mu(N_n)/n \leq \mu(X)/n \to 0$. Assim $\nu \equiv 0$, pois $X = \bigcup_{n=1}^\infty P_n + \bigcap_{n=1}^\infty N_n$, o que contradiz o facto de ν não ser identicamente nula. $\square$

Teorema 8.4.5 (de Radon-Nikodym) *Sejam μ e ν medidas finitas tais que $\nu \ll \mu$. Então existe uma função mensurável não-negativa f de $(X, \mathcal{A})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que, para todo o $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \int_A f d\mu$. f é única μ-q.t.p.*

Demonstração: Comecemos por estabelecer a unicidade de f. Para tal notemos que se $\nu(A) = \int_A g d\mu$, $A \in \mathcal{A}$, para alguma função mensurável não-negativa g, então

$\int_A (f-g)d\mu = 0$, para todo o $A \in \mathcal{A}$, o que implica que $f = g$, μ-q.t.p. (cf. Exercício 4.7.8). Nos pontos a), b) e c) seguintes, estabelecemos a existência de f nas condições do enunciado. Sejam $K = \{f \in M_+ : \int_A f d\mu \leq \nu(A)$, para todo o $A \in \mathcal{A}\}$ e $\alpha = \sup\{\int f d\mu : f \in K\}$ ($\alpha \leq \nu(X) < +\infty$). a) Comecemos por mostrar que existe $f_0 \in K$ tal que $\int f_0 d\mu = \alpha$. Sejam (f_n) em K com $\lim \int f_n d\mu = \alpha$, e $f_0 = \sup f_n$. Por definição de supremo, $g_n = \sup_{k \leq n} f_k \uparrow f_0$, e, para $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f_0 d\mu = \lim \int_A g_n d\mu$. Por outro lado, como $A = \bigcup_{j=1}^n \{x \in A : g_n(x) = f_j(x)\} = \sum_{j=1}^n B_j$ com $B_j \subset A_j$, então $\int_A g d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{B_j} g_n d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{B_j} f_j d\mu \leq \sum_{j=1}^n \nu(B_j) = \nu(\sum_{j=1}^n B_j) = \nu(A)$, e assim $\int_A f_0 d\mu \leq \nu(A)$, ou seja, f_0 pertence assim a K. Além disso, como $\int f_0 d\mu \geq \int f_n d\mu$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\int f_0 d\mu \geq \lim \int f_n d\mu = \alpha$. b) Sendo f_0 integrável, uma vez que $\int f_0 d\mu \leq \nu(X) < +\infty$, sabemos que existe f finita com $f = f_0$ μ-q.t.p.. A função f satisfaz as propriedades anteriormente estabelecidas para f_0. c) Para concluir, mostramos agora que a medida $\nu_0(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu$, definida para $A \in \mathcal{A}$, é identicamente nula. Como ν_0 e μ são finitas e $\nu_0 \ll \mu$, então pelo lema anterior, se ν_0 não fosse identicamente nula, existiriam $A \in \mathcal{A}$ e $\epsilon > 0$, com $\mu(A) > 0$ e A positivo para a medida $\nu_0 - \epsilon\mu$. Nesse caso, para $g = f - \epsilon \mathbb{I}_A$, teriamos $g \in K$, pois para $B \in \mathcal{A}$, $\int_B g d\mu = \int_B f d\mu + \epsilon\mu(A \cap B) \leq \int_B f d\mu + \nu_0(A \cap B) = \int_{B - A\cap B} f d\mu + \nu(A \cap B) \leq \nu(B - A \cap B) + \nu(A \cap B) = \nu(B)$, e $\int g d\mu = \int f d\mu + \epsilon\mu(A) = \alpha + \epsilon\mu(A) > \alpha$, o que contradiz a definição de α. □

Corolário 8.4.6 *Se μ e ν são medidas σ-finitas com $\nu \ll \mu$, então existe uma função mensurável não-negativa f de $(X, \mathcal{A})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que, para todo o $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \int_A f d\mu$. f é única μ-q.t.p.*

Demonstração: Sendo μ e ν σ-finitas, existe (A_n) em $\mathcal{A}$, com $\mu(A_n) < +\infty$, $\nu(A_n) < +\infty$ e $\sum_{n=1}^\infty A_n = X$. Aplicando o teorema anterior a $(A_n, A_n \cap \mathcal{A})$ e às medidas $\mu_{|A_n}$ e $\nu_{|A_n}$, sabemos que existe f_n de A_n em $\mathbb{R}$, não-negativa e $A_n \cap \mathcal{A}$-mensurável, tal que $\nu_{|A_n}(B) = \int_B f_n d\mu_{|A_n}$, para todo o $B \in A_n \cap \mathcal{A}$, ou ainda, $\nu(A \cap A_n) = \int_{A \cap A_n} \overline{f}_n d\mu$, para todo o $A \in \cap\mathcal{A}$, onde $\overline{f}_n(x) = f_n(x)$, se $x \in A_n$, e $\overline{f}_n(x) = 0$, se $x \notin A_n$. A função $f = \sum_{n=1}^\infty \overline{f}_n \mathbb{I}_{A_n}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, não-negativa com valores em $\mathbb{R}$ e $\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A \cap A_n} \overline{f}_n d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A \cap A_n) = \nu(A)$, para todo o $A \in \mathcal{A}$. Finalmente, a unicidade de f é consequência da unicidade de cada uma das aplicações f_n. □

Os dois resultados seguintes, que apresentamos sem demonstração, são extensões do teorema de Radon-Nikodym a medidas com sinal. A dedução de tais resultados é baseada na decomposição de Jordan duma medida com sinal.

Corolário 8.4.7 *Se μ é uma medida σ-finita e ν é uma medida com sinal σ-finita com $\nu \ll \mu$, então existe uma função integrável ou quase-integrável f de $(X, \mathcal{A})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que, para todo o $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \int_A f d\mu$. f é única μ-q.t.p.*

Corolário 8.4.8 *Se μ é uma medida σ-finita e ν é uma medida com sinal com $\nu \ll \mu$, então existe uma função integrável ou quase-integrável f de $(X, \mathcal{A})$ em $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ tal que, para todo o $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \int_A f d\mu$. f é única μ-q.t.p.*

Atendendo ao Exercício 8.8.8, a hipótese de σ-finitude sobre μ não pode ser enfraquecida.

Definição 8.4.9 *Sejam μ uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$ e ν uma medida com sinal sobre $(X, \mathcal{A})$, tais que $\nu \ll \mu$. Chamamos derivada de Radon-Nikodym de ν relativamente a μ a qualquer função $\mathcal{A}$-mensurável e integrável ou quase-integrável f tal que $\nu(A) = \int_A f d\mu$, para todo o $A \in \mathcal{A}$. f é denotada por $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.*

Dos resultados anteriores concluímos que se μ é uma medida σ-finita então existe a derivada de Radon-Nikodym de ν relativamente a μ. Uma tal derivada é não-negativa sse ν é uma medida e é μ-integrável sse ν é finita.

8.5 Continuidade absoluta das medidas reais e finitas

Denotando por $\mathcal{M}$ o conjunto das medidas finitas sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e por $\mathcal{F}$ o conjunto das funções F de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ limitadas, não-decrescentes, contínuas à direita com $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, sabemos que existe uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$. Com efeito, a cada medida $\mu \in \mathcal{M}$ podemos associar $F_\mu \in \mathcal{F}$ definida por $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$, para $x \in \mathbb{R}$, e a cada função $F \in \mathcal{F}$ podemos associar $\mu_F \in \mathcal{F}$ definida por $\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a)$, para $a \leq b$ (cf. Exercício 2.9.21).

Do Exercício 7.6.7 sabemos que quando F é continuamente diferenciável, μ_F é absolutamente contínua relativamente a λ. No entanto, se F for apenas contínua também sabemos que μ_F pode não ser absolutamente contínua relativamente a λ (ver Exercícios 2.9.30 e 2.9.31). Vamos neste parágrafo caracterizar as medidas de $\mathcal{M}$ que são absolutamente contínuas relativamente à medida de Lebesgue λ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ em termos da função de $\mathcal{F}$ que lhes está associada.

Definição 8.5.1 *Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se absolutamente contínua se*

$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \, \forall]s_i, t_i[, i = 1, \ldots, n$ *disjuntos* :

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - s_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |F(t_i) - F(s_i)| < \epsilon.$$

Uma função absolutamente contínua é contínua. Mais, é uniformemente contínua.

Teorema 8.5.2 *Se μ é uma medida finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, então $\mu \ll \lambda$ sse F_μ é absolutamente contínua.*

Demonstração: Suponhamos que $\mu \ll \lambda$. Pelo Teorema 8.4.3, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ é tal que $\lambda(A) < \delta$ então $\mu(A) < \epsilon$. Sejam $]s_i, t_i[$, $i = 1, \ldots, n$, n intervalos disjuntos tais que $\sum_{i=1}^{n}(t_i - s_i) < \delta$. Assim, $\lambda(\sum_{i=1}^{n}]s_i, t_i[) < \delta$, e então $\mu(\sum_{i=1}^{n}]s_i, t_i[) < \epsilon$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n}\mu(]s_i, t_i]) < \epsilon$, ou ainda, $\sum_{i=1}^{n}|F_\mu(t_i) - F_\mu(s_i)| < \epsilon$. Reciprocamente, se F_μ é absolutamente contínua, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja a família $]s_i, t_i[$, $i = 1, \ldots, n$, de intervalos disjuntos dois a dois com $\sum_{i=1}^{n}(t_i - s_i) < \delta$, então $\sum_{i=1}^{n}|F_\mu(t_i) - F_\mu(s_i)| < \epsilon/2$. Dado agora $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ com $\lambda(A) < \delta$, sabemos, por definição de medida exterior, que existe $A_0 = \sum_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i]$ com $A \subset A_0$ e $\lambda(A_0) < \delta$. Assim, para $n \in \mathbb{N}$, como $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, concluímos que $\sum_{i=1}^{n}|F_\mu(b_i) - F_\mu(a_i)| < \epsilon/2$, ou equivalentemente, $\mu(\sum_{i=1}^{n}]a_i, b_i]) < \epsilon/2$. Assim, $\mu(A) \leq \mu(A_0) = \lim \mu(\sum_{i=1}^{n}]a_i, b_i]) \leq \epsilon/2 < \epsilon$. Pelo Teorema 8.4.3, concluímos que $\mu \ll \lambda$. $\square$

Existe assim uma correspondência biunívoca entre o subconjunto das medidas de $\mathcal{M}$ que são absolutamente contínuas relativamente à medida de Lebesgue e o subconjunto de $\mathcal{F}$ das funções absolutamente contínuas.

Tendo em conta o resultado anterior, podemos apresentar a seguinte caracterização das funções absolutamente contínuas de $\mathcal{F}$.

Corolário 8.5.3 *$F \in \mathcal{F}$ é absolutamente contínua sse existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável e integrável tal que $F(x) = \int_{]-\infty,x]} f d\lambda$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Se $F \in \mathcal{F}$ é absolutamente contínua, então $\mu_F \ll \lambda$, pelo teorema anterior. Pelo teorema de Radon-Nikodym sabemos que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável e integrável tal que $\mu_F(A) = \int_A f d\lambda$, para todo o $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Em particular, tomando $A =]-\infty, x]$ obtemos o resultado. Reciprocamente, se $F(x) = \int_{]-\infty,x]} f d\lambda$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, então $\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a) = \int_{]a,b]} f d\lambda$, para todo o $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, ou ainda, pelo lema da igualdade de medidas, $\mu_F(A) = \int_A f d\lambda$, para todo o $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Assim, $\mu_F \ll \lambda$, o que, pelo teorema anterior, permite concluir que $F_{\mu_F} = F$ é absolutamente contínua. $\square$

Terminamos este breve estudo sobre a continuidade absoluta das medidas reais e finitas, chamando a atenção para um resultado importante mas cuja demonstração remetemos para o Capítulo 9. Um tal resultado, conhecido como teorema da diferenciação de Lebesgue, estabelece que se μ é uma medida finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ com $\mu \ll \lambda$, então F_μ possui derivada em λ quase todo o ponto x e $\dfrac{d\mu}{d\lambda} = F'_\mu$ (ver também Rudin, 1974, pg. 176). A derivada de Radon-Nikodym pode assim ser interpretada com a derivada duma função real de variável real, o que reforça a designação de "derivada" dada à função cuja existência é assegurada pelo teorema de Radon-Nikodym.

8.6 Decomposição de Lebesgue

Teorema 8.6.1 (decomposição de Lebesgue) *Se μ e ν são medidas σ-finitas em $(X, \mathcal{A})$, então $\nu = \nu_0 + \nu_1$ onde ν_0 e ν_1 são medidas em X tais que $\nu_0 \perp \mu$ e $\nu_1 \ll \mu$. A decomposição anterior de ν, a que chamamos decomposição de Lebesgue de ν em relação a μ, é única.*

Demonstração: A medida $\gamma = \mu + \nu$ é σ-finita e $\mu \ll \gamma$. Pelo Corolário 8.4.6 existe $f : X \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{A}$-mensurável tal que $\mu(A) = \int_A f d\gamma$, para todo o $A \in \mathcal{A}$. Sejam $E = \{x : f(x) > 0\}$ e $F = \{x : f(x) = 0\}$. Claramente, $E \cup F = X$, $E \cap F = \emptyset$ e $\mu(F) = 0$. Para $A \in \mathcal{A}$, definamos as medidas $\nu_0(A) = \nu(A \cap F)$ e $\nu_1(A) = \nu(A \cap E)$. Temos $\nu = \nu_0 + \nu_1$ e como $\nu_0(F^c) = \nu(\emptyset) = 0$ então $\nu_0 \perp \mu$. Além disso, se $\mu(A) = 0$ então $f \mathbb{I}_A = 0$ γ-q.t.p., ou ainda, $f \mathbb{I}_{E \cap A} = 0$ γ-q.t.p., e portanto $\gamma(E \cap A) = 0$. Assim $\nu(E \cap A) = 0$, pois $\nu \ll \gamma$, ou seja, $\nu_1(A) = 0$. Provámos assim que $\nu_1 \ll \gamma$.

Suponhamos agora que

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 = \nu_0^* + \nu_1', \tag{8.6.2}$$

com $\nu_0 \perp \mu$, $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_0' \perp \mu$ e $\nu_1' \ll \mu$. Existe então $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\nu_0(A) = \nu_0'(A) = 0 \quad \text{e} \quad \nu_1(A^c) = \nu_1'(A^c). \tag{8.6.3}$$

De (8.6.2) e (8.6.3), para $B \in \mathcal{A}$, temos $\nu_0(B) = \nu_0(B \cap A) + \nu_0(B \cap A^c) = \nu_0(B \cap A^c) = \nu_0(B \cap A^c) + \nu_1(B \cap A^c) = \nu_0'(B \cap A^c) + \nu_1'(B \cap A^c) = \nu_0'(B \cap A^c) = \nu_0'(B \cap A) + \nu_0'(B \cap A^c) = \nu_0'(B)$. De forma análoga se mostra que $\nu_1 = \nu_1'$. $\square$

A generalização do teorema anterior ao casos das medidas com sinal pode ser obtida decompondo as medidas nas respectivas variações.

Definição 8.6.4 *Duas medidas com sinal μ e ν em $(X, \mathcal{A})$ dizem-se alheias, e escrevemos, $\mu \perp \nu$, se $|\mu| \perp |\nu|$.*

Teorema 8.6.5 *Se μ e ν são medidas com sinal σ-finitas em $(X, \mathcal{A})$ então $\nu = \nu_0 + \nu_1$ onde ν_0 e ν_1 são medidas com sinal em X tais que $\nu_0 \perp \mu$ e $\nu_1 \ll \mu$. A decomposição anterior é única.*

Demonstração: A medida ν admite a decomposição $\nu = \nu^+ - \nu^-$, onde ν^+ e ν^- são σ-finitas. Assim pelo teorema da decomposição de Lebesgue, $\nu^+ = \nu_0' + \nu_1'$ e $\nu^- = \nu_0'' + \nu_1''$, com $\nu_0' \perp \mu$, $\nu_1' \ll \mu$, $\nu_0'' \perp \mu$ e $\nu_1'' \ll \mu$, pois $|\mu|$ é σ-finita. Atendendo a que uma das medidas ν^+ ou ν^- é finita, podemos ainda escrever a igualdade $\nu = (\nu_0' - \nu_0'') + (\nu_1' - \nu_1'')$, onde $\nu_0' - \nu_0'' \perp \mu$ e $\nu_1' - \nu_1'' \ll \mu$. A unicidade da decomposição obtem-se como no Teorema 8.6.1. $\square$

No caso particular em que $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ podemos apresentar um resultado mais preciso que o anterior.

Teorema 8.6.6 *Se ν é uma medida finita em $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, então existem medidas ν_{ac}, ν_d e ν_s em $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ tais que $\nu = \nu_{ac} + \nu_d + \nu_s$, onde $\nu_{ac} \ll \lambda$, ν_d é discreta e $\nu_s \perp \lambda$ com $\nu_s(\{x\}) = 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^d$. A decomposição anterior é única.*

Demonstração: Pelo teorema da decomposição de Lebesgue, $\nu = \nu_0 + \nu_1$ com $\nu_0 \perp \lambda$ e $\nu_1 \ll \lambda$. Seja C o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^d$ tais que $\nu_0(\{x\}) \neq 0$. Um tal conjunto é quando muito numerável (ver Exercício 2.9.22). Tomando $\nu_2(A) = \nu_0(A \cap C)$ e $\nu_3(A) = \nu_0(A \cap C^c)$, para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, obtemos $\nu_0 = \nu_2 + \nu_3$ com $\nu_2 \perp \lambda$ e $\nu_3 \perp \lambda$. Além disso, ν_2 é discreta pois $\nu_2(C^c) = \nu_0(\emptyset) = 0$, e $\nu_3(\{x\}) = \nu_0(\{x\} \cap C^c) = 0$.

Para estabelecer a unicidade da decomposição, basta mostrar que a decomposição de ν_0 é única. Suponhamos então que

$$\nu_0 = \nu_2 + \nu_3 = \nu_2' + \nu_3', \tag{8.6.7}$$

onde ν_2 e ν_2' são discretas e ν_3 e ν_3' são discretas e alheias à medida de Lebesgue. Existem então C e C' quando muito numeráveis com $\nu_2(C^c) = \nu_2'(C'^c) = 0$. Sendo ν_3 e ν_3' singulares temos, para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\nu_2(A) = \nu_2(A \cap (C \cup C')) = \sum_{x \in A \cap (C \cup C')} \nu_2(\{x\}) = \sum_{x \in A \cap (C \cup C')} \nu_2'(\{x\}) = \nu_2'(A \cap (C \cup C')) = \nu_2'(A)$. De (8.6.7) concluímos agora que $\nu_3 = \nu_3'$, atendendo a que ν_0 é finita. □

Uma medida μ que satisfaz $\mu(\{x\}) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^d$, diz-se difusa. Se além disso é alheia à medida de Lebesgue dizemos que μ é singular. O teorema anterior estabelece assim a decomposição duma medida finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ como soma duma medida absolutamente contínua, duma medida discreta e duma medida singular.

Quando a componente singular de ν relativamente a λ é identicamente nula, o teorema anterior dá-nos um processo explícito de cálculo do integral duma função f ν-integrável:

$$\int f d\nu = \int f g d\lambda + \sum_{x \in C} f(x) \nu(\{x\}),$$

onde g é a densidade de ν relativamente a λ e C é o suporte de ν_d. No caso real, C não é mais do que o conjunto dos pontos de descontinuidade de F_ν (ou de F_{ν_d}).

8.7 Teorema da representação de Riesz em L^p

Uma aplicação importante do teorema de Radon-Nikodym é a representação integral das funcionais lineares limitadas em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, com $p \in [1, +\infty[$.

Se B é um espaço de Banach real (ou mais geralmente um espaço vectorial normado), uma funcional linear em B é por definição uma aplicação linear de B em $\mathbb{R}$. Uma funcional linear φ em B diz-se limitada se existir $C > 0$ tal que $|\varphi(f)| \leq C\|f\|$, para todo o $f \in B$ (esta última propriedade é equivalente à continuidade de φ). O conjunto das funcionais lineares limitadas em B, que denotamos por B', é um espaço vectorial real, dito dual de B. Além disso, é um espaço normado. Com efeito, a aplicação $\varphi \to \|\varphi\|'$ definida por $\|\varphi\|' = \sup\{|\varphi(f)| : \|f\| \leq 1\}$, é uma norma em B'.

Se $f \in L^1(\mu)$ a aplicação $\varphi : f \to \int f d\mu$ é, como sabemos, uma funcional linear. Além disso, é limitada uma vez que $|\varphi(f)| \leq \int |f| d\mu = \|f\|_1$. Mais geralmente, se $f \in L^p(\mu)$, para $p \in [1, +\infty[$, então dado $g \in L^q(\mu)$ com $q \in]1, +\infty]$, onde q é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a aplicação φ de $L^p(\mu)$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(f) = \int fg d\mu, \tag{8.7.1}$$

é uma funcional linear limitada em $L^p(\mu)$. Além disso, $\|\varphi\|' = \|g\|_q$.

A questão que agora colocamos, é a de saber se uma funcional linear limitada em $L^p(\mu)$ pode sempre ser escrita na forma integral (8.7.1) para alguma função g. A resposta a esta questão é afirmativa sob certas condições na medida μ que são precisadas no teorema seguinte.

Teorema 8.7.2 (da representação de Riesz) *Para $p \in [1, +\infty[$, seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado com μ σ-finita se $p = 1$ e μ qualquer se $p \in]1, +\infty[$. Se φ é uma funcional linear limitada em $L^p(\mu)$ então existe $g \in L^q(\mu)$, com $q \in]1, +\infty]$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que φ é dada por* (8.7.1).

Demonstração: Restringir-nos-emos apenas ao caso em que μ é σ-finita (para μ qualquer se $p \in]1, +\infty[$, ver Cohn, 1980, pg. 149–152).

a) Suponhamos em primeiro lugar que $\mu(X) < +\infty$, e consideremos a função de conjunto $\nu(A) = \varphi(\mathbb{1}_A)$, definida para $A \in \mathcal{A}$. Pela continuidade de φ, ν é uma medida com sinal finita, uma vez que $|\nu(A)| = |\varphi(\mathbb{1}_A)| \leq C\|\mathbb{1}_A\|_p = C(\mu(A))^{1/p}$, para $A \in \mathcal{A}$, onde $C > 0$ é tal que $|\varphi(f)| \leq C\|f\|_p$, para todo o $f \in L^p(\mu)$. Além disso, $\nu \ll \mu$, e assim, pelo Corolário 8.4.7, existe g mensurável de $(X, \mathcal{A})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\nu(A) = \int_A g d\mu$, ou ainda, $\varphi(\mathbb{1}_A) = \int \mathbb{1}_A g d\mu$, para todo o $A \in \mathcal{A}$. Pela linearidade de φ, para f escalonada temos também

$$\varphi(f) = \int fg d\mu. \tag{8.7.3}$$

Para $p \in [1, +\infty[$, verifiquemos agora que $g \in L^q(\mu)$, onde $q \in]1, +\infty]$ é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $p \in]1, +\infty[$, seja (g_n) uma sucessão de funções escalonadas não-negativas tal que $g_n \uparrow |g|$. Então $\int |g_n|^q d\mu \leq \int |g| g_n^{q-1} d\mu = \int \operatorname{sgn}(g) g\, g_n^{q-1} d\mu = \varphi(\operatorname{sgn}(g) g_n^{q-1}) \leq C\|\operatorname{sgn}(g) g_n^{q-1}\|_p = C\|g_n\|_q^{q-1}$, ou ainda, $\|g_n\|_q \leq C$, o que permite concluir que $\int |g|^q d\mu < +\infty$, isto é, $g \in L^q(\mu)$. Se $p = 1$, mostremos em particular que $\mu(\{x : |g(x)| > C\}) = 0$. Se tal não acontecesse, para a função escalonada $\operatorname{sgn}(g) \mathbb{I}_{\{x:|g(x)|>C\}}$ teriamos $|\varphi(\operatorname{sgn}(g) \mathbb{I}_{\{x:|g(x)|>C\}})| = \int \operatorname{sgn}(g) \mathbb{I}_{\{x:|g(x)|>C\}} g d\mu = \int |g| \mathbb{I}_{\{x:|g(x)|>C\}} d\mu > C\mu(\{x : |g(x)| > C\}) = C\|\operatorname{sgn}(g) \mathbb{I}_{\{x:|g(x)|>C\}}\|_1$, o que é falso.

Argumentos de densidade (cf. Teorema 5.5.2) permitem finalmente concluir que a igualdade (8.7.3) é também válida para todo o $f \in L^p(\mu)$.

b) Suponhamos agora que μ é σ-finita. Seja (A_n) uma sucessão em $\mathcal{A}$ tal que $\mu(A_n) < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, e $f \in L^p(A_n, A_n \cap \mathcal{A}, \mu_{|A_n})$, consideremos a funcional linear limitada $\varphi_n(f) = \varphi(\overline{f} \mathbb{I}_{A_n})$, onde $\overline{f}(x) = f(x)$, se $x \in A_n$, e $\overline{f}(x) = 0$, se $x \notin A_n$. Pela primeira parte da demonstração, existe $g_n \in L^q(A_n, A_n \cap \mathcal{A}, \mu_{|A_n})$ tal que $\varphi(\overline{f} \mathbb{I}_{A_n}) = \int \overline{f} \mathbb{I}_{A_n} g_n d\mu$. Consideremos agora as funções $\overline{g}_n(x) = g_n(x)$, se $x \in A_n$, e $\overline{g}_n(x) = 0$, se $x \notin A_n$, e $g = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{g}_n$. Como $g \in L^q(\mu)$ (cf. Teorema 5.5.1) e $\varphi(f) = \int f g d\mu$, para todo o $f \in L^p(\mu)$ (usar a continuidade de φ e a convergência $f \mathbb{I}_{\sum_{n=1}^{k} A_n} \to f$ em $L^p(\mu)$), a demonstração está concluída. $\square$

Em consequência da teorema anterior, a aplicação T de $L^q(\mu)$ em $L^p(\mu)'$ definida por $T(g) = \varphi$, onde φ é dada por (8.7.1), é uma aplicação é linear sobrejectiva. Além disso, $\|T(g)\|' = \|g\|_q$, isto é, T preserva a norma (T é uma isometria). T é então um isomorfismo isométrico entre os espaços $L^q(\mu)$ e $L^p(\mu)'$. Os espaços normados $L^q(\mu)$ e $L^p(\mu)'$ podem ser assim identificados. Por simplicidade de linguagem dizemos que $L^q(\mu)$ é o dual de $L^p(\mu)$.

8.8 Exercícios

1. Sejam μ e ν medidas com sinal em $(X, \mathcal{A})$ tais que $\mu(A) < +\infty$ e $\nu(A) < +\infty$ para todo o $A \in \mathcal{A}$, ou $\mu(A) > -\infty$ e $\nu(A) > -\infty$ para todo o $A \in \mathcal{A}$. Mostre que $\mu + \nu$ é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{A})$.

2. Se $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ é integrável ou quase-integrável, mostre que $\nu(A) = \int_A f d\mu$, $A \in \mathcal{A}$, é uma medida com sinal.

3. Se ν é uma medida com sinal e $\nu = \nu_1 - \nu_2$ onde ν_1 e ν_2 são medidas finitas, mostre que $\nu^+(A) \leq \nu_1(A)$ e $\nu^-(A) \leq \nu_2(A)$, para todo o $A \in \mathcal{A}$.

4. Seja ν uma medida com sinal finita em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ e F_ν a função real de variável real definida por $F_\nu(x) = \nu(]-\infty, x])$, para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) F_ν é limitada, contínua à direita e $\lim_{x \to -\infty} F_\nu(x) = 0$;

   (b) F_ν caracteriza ν.

   (Sugestão: utilize a decomposição de Jordan de ν e o Exercício 2.9.21).

5. Sejam λ, μ e ν medidas com sinal em em $(X, \mathcal{A})$. Mostre que:
   (a) Se $\mu \ll \lambda$ e $\nu \perp \lambda$ então $\mu \perp \nu$.
   (b) Se $\lambda \ll \mu$ e $\lambda \perp \mu$ então $\lambda = 0$.
6. Sejam λ, μ e ν medidas em $(X, \mathcal{A})$ com μ e ν nas condições do Exercício 1. Mostre que:
   (a) Se $\mu \ll \lambda$ e $\nu \ll \lambda$ então $\mu + \nu \ll \lambda$;
   (b) Se $\mu \perp \lambda$ e $\nu \perp \lambda$ então $\mu + \nu \perp \lambda$.
7. Considere em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a medida definida por $\nu(A) = \int_A |x| d\lambda(x)$ para mostrar que a condição de finitude de ν é essencial no Teorema 8.4.3.
8. Sejam λ e μ as medidas de Lebesgue e de contagem em $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Mostre que:
   (a) $\lambda \ll \mu$;
   (b) Não existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{B}([0,1])$-mensurável tal que $\lambda(A) = \int_A f d\mu$, para todo o $A \in \mathcal{B}([0,1])$;
   (c) Porque não há contradição com o teorema de Radon-Nikodym?
9. Sejam λ, μ e ν medidas σ-finitas sobre $(X, \mathcal{A})$. Mostre que:
   (a) Se $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \lambda$ então $\nu \ll \lambda$ e $\dfrac{d\nu}{d\lambda} = \dfrac{d\nu}{d\mu}\dfrac{d\mu}{d\lambda}$ λ-q.t.p.;
   (b) Se $\mu \ll \lambda$ e $\nu \ll \lambda$ então $\mu + \nu \ll \lambda$ e $\dfrac{d(\mu+\nu)}{d\lambda} = \dfrac{d\mu}{d\lambda} + \dfrac{d\nu}{d\lambda}$, λ-q.t.p..
10. Sejam ν uma medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e f uma função não-negativa ν-integrável. Defina-se a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_{]-\infty,x]} f d\nu$, para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:
    (a) F é uma função limitada, não-decrescente, contínua à direita com $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
    (b) F é contínua em $x \in \mathbb{R}$ se $\nu(\{x\}) = 0$;
    (c) $\mu_F \ll \nu$ e $\frac{d\mu_F}{d\nu} = f$, sendo μ_F a medida finita sobre $\mathbb{R}$ associada a F (cf. Exercício 2.9.21).
11. Sendo P uma probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, mostre que existem probabilidades P_1, P_2 e P_3 com P_1 absolutamente contínua, P_2 discreta e P_3 singular, e números reais não-negativos α_1, α_2 e α_3 com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, tais que $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$.
12. Sejam f e g funções reais de variável real definidas por
    $$f(x) = \sqrt{1-x}\,\mathbb{I}_{]-\infty,1]}(x) \text{ e } g(x) = x^2\,\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x),$$
    e μ e ν medidas em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definidas por $\mu = f\lambda$ e $\nu = g\lambda$. Determine a decomposição de Lebesgue de ν relativamente a μ.
13. Seja μ a medida finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ associada à função F definida por $F(x) = 0$ se $x < 0$, $F(x) = x + 1$ se $0 \leq x < 1$ e $F(x) = 3$ se $x \geq 1$. Determine a decomposição de Lebesgue de μ relativamente à medida de Lebesgue sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e calcule $\int x^2 d\mu$.
14. Uma medida μ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ diz-se *quase-discreta* se existe um subconjunto numerável C de $\mathbb{R}$ tal que $\mu(C^c) = 0$. Se μ é quase-discreta, mostre que:

(a) $S = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$, onde $\mathcal{C}$ é a classe dos subconjuntos numeráveis de $\mathbb{R}$ com complementar de medida μ nula;

(b) $S \in \mathcal{C}$;

(c) μ é σ-finita sse $\mu(\{x\}) < +\infty$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

15. Se ν é uma medida σ-finita em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, mostre que existem medidas ν_{ac}, ν_{qd} e ν_s em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tais que $\nu = \nu_{ac} + \nu_{qd} + \nu_s$, onde $\nu_{ac} \ll \lambda$, ν_{qd} é quase-discreta e $\nu_s \perp \lambda$ com $\nu_s(\{x\}) = 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre ainda que a decomposição anterior é única.

    (Sugestão: retome a demonstração do Teorema 8.6.6).

8.9 Bibliografia

Cohn, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

Fernandez, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

Halmos, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

Rudin, W. (1974). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Capítulo 9

O teorema da diferenciação de Lebesgue

Tendo como motivação próxima a observação com que terminámos o §8.5, estudamos neste curto capítulo a diferenciabilidade da função $x \to \int_{]-\infty,x]} f d\lambda$, onde f é integrável à Lebesgue.

9.1 Preliminares

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável à Riemann, sabemos que F definida, para $x \in [a,b]$, por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é quase certamente diferenciável, e $F'(x) = f(x)$, se f é contínua em x. Será esta propriedade válida para o integral de Lebesgue? Isto é, sendo f integrável à Lebesgue, existirão e serão iguais a $f(x)$ os limites

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\lambda(]x, x+h])} \int_{]x,x+h]} f(t) d\lambda(t)$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\lambda(]x-h, x])} \int_{]x-h,x]} f(t) d\lambda(t)?$$

Mais geralmente, sendo $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ em $\mathcal{L}^1(\lambda)$ e (E_n) uma sucessão de conjuntos mensuráveis que converge para x num sentido a precisar, ter-se-á

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\lambda(E_n)} \int_{E_n} f(y) d\lambda(y) = f(x)?$$

Comecemos por analisar o caso em que $E_n = B(x, h_n)$ onde (h_n) é uma sucessão de números reais estritamente positivos que converge para zero quando n tende para infinito.

Para $f \in L^1(\lambda)$ e $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $D_n f$ a função de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$ definida, para $x \in \mathbb{R}^d$, por

$$\begin{aligned} D_n f(x) &= \frac{1}{\lambda(B(x,h_n))} \int_{B(x,h_n)} f(y) d\lambda(y) \\ &= f \star \phi_{h_n}(x), \end{aligned}$$

onde $\phi_{h_n}(x) = \phi(x/h_n)/h_n^d$, com $\phi = \mathbb{I}_{B(0,1)}/\lambda(B(0,1))$ (ver (7.5.9)).

Pelos Teoremas 7.5.8 e 7.5.11, $D_n f$ é contínua e, sendo f limitada e uniformemente contínua, $D_n f$ converge uniformemente para f, quando $n \to +\infty$. Em particular $\lim D_n f(x) = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}^d$. De seguida provaremos que este resultado continua válido, a menos dum conjunto de medida nula, para f em $\mathcal{L}^1(\lambda)$. Para tal usaremos o facto de qualquer função integrável à Lebesgue poder ser aproximada por uma função contínua de suporte compacto, bem como a desigualdade maximal de Hardy-Littlewood que estabelecemos no próximo parágrafo.

9.2 Desigualdade maximal de Hardy-Littlewood

Para $f \in L^1(\lambda)$, definamos a aplicação

$$Mf(x) = \sup\{D_n|f|(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

para $x \in \mathbb{R}^d$. Mf toma valores em $[0, +\infty]$ e é $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mensurável, pois para $a \in \mathbb{R}$, $\{x : Mf(x) > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x : D_n|f|(x) > a\}$. Esta função não é necessariamente integrável. No entanto, é válida para ela uma desigualdade análoga à desigualdade de Tchebychev-Markov.

Lema 9.2.1 (de Vitali) *Se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ possui uma cobertura $\{B_j, j \in J\}$ com B_j bola aberta de raio r_j e $\{r_j : j \in J\}$ limitado, podemos extrair uma sub-família $\{B_k\}$, finita ou numerável, constituída por bolas disjuntas duas a duas tal que*

$$\lambda(E) \leq 5^d \sum_k \lambda(B_k).$$

Demonstração: Ver Revuz (1994), pg. 195–196. □

Lema 9.2.2 (desigualdade maximal de Hardy-Littlewood) *Existe uma constante A estritamente positiva tal que para todo o $\alpha > 0$ e todo o $f \in L^1(\lambda)$,*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) \geq \alpha\}) \leq A\alpha^{-1}\|f\|_1.$$

Demonstração: Para $\alpha > 0$, seja $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$. Para todo o $x \in E_\alpha$ existe uma bola aberta $B(x, h_{n_x}) \equiv B_x$ tal que $\int_{B_x} |f| d\lambda > \alpha\lambda(B_x)$. A família $(B_x, x \in E_\alpha)$ é uma cobertura de E_α nas condições do lema anterior. Podemos então extrair de tal família uma sub-família (B_k) finita ou numerável, tal que $\lambda(E_\alpha) \leq 5^d \sum_k \lambda(B_k) \leq 5^d\alpha^{-1} \sum_k \int_{B_k} |f| d\lambda = 5^d\alpha^{-1} \int_{\sum_k B_k} |f| d\lambda \leq 5^d\alpha^{-1}\|f\|_1$. O lema está demonstrado com $A = 5^d$. $\square$

Do lema anterior concluímos também que Mf é quase certamente finita.

9.3 Teorema da diferenciação de Lebesgue

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema da diferenciação de Lebesgue.

Teorema 9.3.1 (da diferenciação de Lebesgue) *Para todo o* $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$,

$$\lim_{n\to+\infty} D_n f = f, \ \lambda - q.t.p.$$

Demonstração: Sejam $\alpha > 0$, qualquer, e A a constante cuja existência é garantida pela desigualdade maximal de Hardy-Littlewood. Para $\epsilon > 0$, qualquer, seja g contínua de suporte compacto tal que $\|f-g\|_1 < \epsilon/(2\alpha^{-1}(A+1))$. Para $x \in \mathbb{R}^d$, temos $|D_n f(x) - D_n g(x)| \leq \int_{B(x,h_n)} |f-g| d\lambda/\lambda(B(x,h_n)) \leq D_n|f-g|(x) \leq M|f-g|(x)$, e $|D_n f(x) - f(x)| \leq |D_n f(x) - D_n g(x)| + |D_n g(x) - f(x)| \leq M|f-g|(x) + |D_n g(x) - f(x)|$. Tomando limites, obtemos $\limsup |D_n f(x) - f(x)| \leq M|f-g|(x) + |D_n g(x) - f(x)|$, e assim $\{x : \limsup |D_n f(x) - f(x)| > \alpha\} \subset \{x : M|f-g|(x) > \alpha/2\} \cup \{x : |g(x) - f(x)| > \alpha/2\}$. Pelas desigualdades de Tchebychev-Markov e de Hardy-Littlewood, temos $\lambda(\{x : \limsup |D_n f(x) - f(x)| > \alpha\}) \leq 2A\alpha^{-1}\|f-g\|_1 + 2\alpha^{-1}(A+1)\|f-g\|_1 < \epsilon$. Sendo $\epsilon > 0$, qualquer, concluímos que $\lambda(\{x : \limsup |D_n f(x) - f(x)| \neq 0\}) = 0$, ou seja, $\lim D_n f = f$, λ-q.t.p.. $\square$

O teorema da diferenciação de Lebesgue permanece válido se f é <u>localmente integrável</u>, isto é, se $\int_K |f| d\lambda < +\infty$, para todo o subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$. Com efeito, se B é uma qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^d$, a função $f_{|B}$ é integrável e assim para quase todo o ponto $x \in B$, $\lim D_n f_{|B}(x) = f_{|B}(x)$. Basta agora notar que para n suficientemente grande $B(x, h_n) \subset B$.

Vejamos agora como podemos generalizar o teorema anterior a outras sucessões (E_n) de borelianos.

Definição 9.3.2 *Chamamos <u>conjunto de Lebesgue</u> duma função* $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, *ao conjunto dos pontos* $x \in \mathbb{R}^d$ *tais que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda(B(x,h_n))} \int_{B(x,h_n)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y) = 0,$$

para toda a sucessão (h_n) de números reais estritamente positivos que converge para zero quando n tende para infinito. Denotamos por L_f um tal conjunto.

Teorema 9.3.3 *Para $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, $\lambda(L_f^c) = 0$.*

Demonstração: Para $q \in \mathbb{Q}$, sendo a função $|f - q|$ localmente integrável, existe $N_q \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ com $\lambda(N_q) = 0$, tal que para $x \notin N_q$, $\lim \int_{B(x,h_n)} |f(y) - q| d\lambda(y)/\lambda(B(x, h_n)) = |f(x) - q|$, para todo a sucessão (h_n) de números reais estritamente positivos que converge para zero. Seja $N = \cup_{q\in\mathbb{Q}} N_q$. Se $x \notin N$ e $|f(x)| < +\infty$, temos $\limsup \int_{B(x,h_n)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y)/\lambda(B(x, h_n)) \leq 2|f(x) - q|$, para todo o $q \in \mathbb{Q}$, o que permite concluir que $\limsup \int_{B(x,h_n)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y)/\lambda(B(x, h_n)) = 0$. Assim $N^c \cap \{x : |f(x)| < +\infty\} \subset L_f$, o que prova o pretendido. □

Definição 9.3.4 *Dizemos que uma sucessão (E_n) de borelianos de $\mathbb{R}^d$ <u>se contrai suavemente</u> para um ponto $x \in \mathbb{R}^d$, se existe $c > 0$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe uma bola aberta $B(x, r_n)$ satisfazendo as condições:*

$$E_n \subset B(x, r_n),\ \lim r_n = 0 \ \text{e}\ \lambda(E_n) \geq c\lambda(B(x, r_n)).$$

Por exemplo, uma sucessão de cubos (abertos, fechados ou semi-abertos) centrados em x cuja aresta tende para zero, contrai-se suavemente para x.

Teorema 9.3.5 *Se $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ e $x \in L_f$, então para toda a sucessão (E_n) de borelianos de $\mathbb{R}^d$ que se contrai suavemente para x temos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda(E_n)} \int_{E_n} f(y) d\lambda(y) = f(x).$$

Demonstração: Basta ter em conta a desigualdade $|\int_{E_n} f(y) d\lambda(y)/\lambda(E_n) - f(x)| \leq \int_{E_n} |f(y) - f(x)| d\lambda(y)/\lambda(E_n) \leq \int_{B(x,r_n)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y)/(c\lambda(B(x, r_n)))$, onde $c > 0$ e $(B(x, r_n))$ estão nas condições da Definição 9.3.4, e o facto de $x \in L_f$. □

Voltemos à questão com que iniciámos este capítulo. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável à Lebesgue, concluímos então que o integral indefinido $F(x) = \int_{]-\infty,x]} f d\lambda$, é quase em todo o ponto derivável e $F' = f$, λ-q.t.p., uma vez que as sucessões de intervalos $(]x, x + h_n])$ e $(]x - h_n, x])$ contraem-se suavemente para x para toda a sucessão (h_n) de números reais estritamente positivos que converge para zero.

9.4 Bibliografia

FERNANDEZ, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

REVUZ, D. (1994). *Mesure et Intégration*, Hermann, Paris.

RUDIN, W. (1974). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Capítulo 10

A transformada de Fourier

Tendo em mente o interesse da teoria das funções características para a disciplina de Teoria das Probabilidades, abordamos neste capítulo apenas um dos aspectos da teoria das transformadas de Fourier: o da transformada de Fourier de medidas finitas em $\mathbb{R}^d$.

10.1 Integração de funções complexas

Como bem sabemos, o conjunto dos números complexos pode ser identificado com o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pontos do plano, associando-se a cada complexo $z = x + i\,y$ o par ordenado (x, y). A x chamamos parte real de z e escrevemos $x = Re(z)$ e a y parte imaginária de z que denotamos por $y = Im(z)$. Considerando em $\mathbb{R}^2$ a norma euclideana e em $\mathbb{C}$ a norma do módulo ($|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$), concluímos facilmente que os abertos de cada um dos conjuntos podem ser também identificados, o mesmo acontecendo relativamente às σ-álgebras de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ e $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Toda a função complexa f definida num conjunto X pode escrever-se na forma $f = Re(f) + iIm(f)$, onde $Re(f)$ e $Im(f)$ são funções reais definidas, para $x \in X$, por $Re(f)(x) = Re(f(x))$ e $Im(f)(x) = Im(f(x))$. As observações preliminares anteriores implicam que uma função f definida num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ com valores em $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ é mensurável sse a função de $(X, \mathcal{A})$ em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ definida por $(Re(f), Im(f))$ é mensurável, ou ainda, sse as funções $Re(f)$ e $Im(f)$ definidas de $(X, \mathcal{A})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ são mensuráveis. Além disso, tendo em conta os Teoremas 3.2.3 e 3.3.1, concluímos que o produto e a soma de funções complexas mensuráveis, o produto dum complexo por uma função complexa mensurável, o limite duma sucessão de funções complexas mensuráveis, são ainda funções mensuráveis.

Tendo em conta o que atrás foi dito, a definição de integral duma função complexa definida num espaço mensurado $(X, \mathcal{A}, \mu)$, surge agora de forma natural:

Definição 10.1.1 *Uma função complexa $\mathcal{A}$-mensurável f diz-se μ-integrável se $Re(f)$ e $Im(f)$ o forem, e nesse caso, o seu integral é o número complexo definido por $\int f d\mu = \int Re(f) d\mu + i \int Im(f) d\mu$.*

Tal como para o integral de funções reais temos:

Teorema 10.1.2 *Uma função complexa f é μ-integrável sse $|f|$ o for, e nesse caso $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.*

Demonstração: A equivalência entre a integrabilidade de f e do seu módulo, resulta das desigualdades $|Re(f)| \leq |f|$, $|Im(f)| \leq |f|$ e $|f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$. Além disso, se $\int f d\mu \neq 0$ e $z = \int f d\mu / |\int f d\mu|$, então $|\int f d\mu| = z^{-1} \int f d\mu = \int z^{-1} f d\mu = \int Re(z^{-1} f) d\mu \leq \int |z^{-1} f| d\mu = \int |f| d\mu$. □

Teorema 10.1.3 *a) O conjunto das funções complexas μ-integráveis é um espaço vectorial complexo (com a soma e produto escalar definidos da forma habitual).*

b) A aplicação $f \to \int f d\mu$ desse espaço em $\mathbb{C}$ é linear.

Demonstração: Ter em conta o teorema anterior e a linearidade do integral para funções reais. □

Antes de terminarmos este curto parágrafo sobre a integração de funções complexas, observemos que outros resultados que enunciámos relativos ao integral de funções reais, são também válidos para funções complexas. Tal é, por exemplo, o caso dos importantes teoremas da convergência dominada e de Fubini, que podem ser estabelecidos a partir dos correspondentes teoremas para funções reais, considerando separadamente as partes reais e imaginárias das funções intervenientes.

10.2 Definição e primeiras propriedades

Neste e nos próximos parágrafos o conjunto de base é $\mathbb{R}^d$ munido da σ-álgebra de Borel e as medidas que consideramos estão definidas nesta σ-álgebra. A medida de Lebesgue será, como habitualmente, denotada por λ. Para $x = (x_1, \ldots, x_d)$ e $y = (y_1, \ldots, y_d)$ em $\mathbb{R}^d$, denotamos por $< x, y >$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^d$, isto é, $<x, y>= \sum_{j=1}^d x_j y_j$.

Definição 10.2.1 *A transformada de Fourier duma medida finita μ é a função de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{C}$ definida por*

$$\widehat{\mu}(u) = \int e^{i<u,x>} d\mu(x), \ \ \textit{para } u \in \mathbb{R}^d.$$

Se f é uma função mensurável não-negativa e λ-integrável, chamamos transformada de Fourier de f, que denotamos por $\widehat{f}$, à transformada de Fourier da medida $f\lambda$, isto é,

$$\widehat{f}(u) = \int e^{i<u,x>} f(x) d\lambda(x), \ \ \textit{para } u \in \mathbb{R}^d.$$

Notemos que como $|e^{i<u,x>}| = 1$, os integrais anteriores estão bem definidos.

Proposição 10.2.2 *Seja μ uma medida finita sobre $\mathbb{R}^d$. Então $\widehat{\mu}$ é uma função limitada e contínua com $\widehat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração: Como $|e^{i<u,x>}| = 1$, então $|\widehat{\mu}(u)| \leq \int |e^{i<u,x>}| d\mu = \mu(\mathbb{R}^d)$ e $\widehat{\mu}(0) = \int 1 d\mu = \mu(\mathbb{R}^d)$. Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, a aplicação $u \to e^{i<u,x>}$ é contínua e limitada. Sendo μ finita, a continuidade de $\widehat{\mu}$ é consequência do Exercício 4.7.14. □

Corolário 10.2.3 *A transformada de Fourier duma função não-negativa e λ-integrável f, é limitada e contínua com $\widehat{f}(0) = \int f d\lambda$.*

Exemplos: 1. Se δ_a é a medida de Dirac no ponto $a \in \mathbb{R}^d$, então $\widehat{\delta_a}(u) = e^{i<u,a>}$, para $u \in \mathbb{R}^d$.

2. Se $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, para $x \in \mathbb{R}$, então $\widehat{f}(u) = e^{-u^2/2}$, para $u \in \mathbb{R}$ (ver Exercício 10.5.4).

10.3 Injectividade

Propomos-nos, neste parágrafo, mostrar que a transformada de Fourier duma medida finita caracteriza essa medida. Para o efeito, consideremos, para $\sigma > 0$, a função de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$ definida, para $u \in \mathbb{R}^d$, por

$$g_\sigma(u) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^d} e^{-\|u\|^2/(2\sigma^2)}.$$

Comecemos por calcular a sua transformada de Fourier.

Lema 10.3.1 *A transformada de Fourier de g_σ é dada, para $u \in \mathbb{R}^d$, por*

$$\widehat{g}_\sigma(u) = e^{-\sigma^2\|u\|^2/2}.$$

Demonstração: Como $g_\sigma(u) = g_1(u/\sigma)/\sigma^d$ e $g_1(u) = \prod_{j=1}^d e^{-u_j^2/2}/\sqrt{2\pi}$, para $u = (u_1, \ldots, u_d)$, então, pelos Exercícios 10.5.2, 10.5.3 e 10.5.4, obtemos sucessivamente $\widehat{g}_\sigma(u) = \widehat{g}_1(\sigma u) = \prod_{j=1}^d e^{-\sigma^2 u_j^2/2} = e^{-\sigma^2\|u\|^2/2}$. □

Lema 10.3.2 *Seja μ uma medida finita. Então, para $x \in \mathbb{R}^d$, temos*

$$(g_\sigma \star \mu)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{\mu}(u)\, e^{-i<u,x>-\sigma^2\|u\|^2/2} d\lambda(u).$$

Demonstração: As funções g_σ e $\widehat{g}_\sigma$ estão relacionadas pela igualdade $g_\sigma(x) = \widehat{g}_{1/\sigma}(-x)/(\sigma\sqrt{2\pi})^d$, para $x \in \mathbb{R}^d$. Assim, pelo teorema de Fubini, $(g_\sigma \star \mu)(x) = \int \widehat{g}_{1/\sigma}(y-x)d\mu(y)/(\sigma\sqrt{2\pi})^d = \int\int e^{i<y-x,z>} g_{1/\sigma}(z)d\lambda(z)d\mu(y)/(\sigma\sqrt{2\pi})^d = \int e^{-\sigma^2\|z\|^2/2}$ $e^{-i<x,z>} \int e^{i<y,z>}\, d\mu(y)d\lambda(z)/(2\pi)^d = \int \widehat{\mu}(z)\, e^{-i<z,x>-\sigma^2\|z\|^2/2} d\lambda(z)/(2\pi)^d$. □

Teorema 10.3.3 *A transformada de Fourier $\widehat{\mu}$ duma medida finita caracteriza μ, isto é, duas medidas finitas com a mesma transformada de Fourier são iguais.*

Demonstração: Pelo lema anterior, se conhecermos $\widehat{\mu}$ conhecemos $g_\sigma \star \mu$, para todo o $\sigma > 0$. Pelo Exercício 7.6.16, conhecemos também $\int h d\mu$ para toda a função h limitada e contínua sobre $\mathbb{R}^d$ uma vez que $\int h d\mu = \lim_{\sigma\to 0} \int (g_\sigma \star \mu)(x)h(x)d\lambda(x)$. Tendo em conta o teorema do prolongamento, basta agora mostrar que sendo A um rectângulo semi-aberto à esquerda, a sua medida, $\mu(A)$, pode ser expressa a partir de integrais do tipo anterior. Tal é verdade uma vez que dado um rectângulo semi-aberto à esquerda, sabemos que existe uma sucessão (h_n) de funções limitadas e contínuas com $0 \le h_n \le 1$ e $h_n \to \mathbb{1}_A$ (cf. Exercício 3.6.9), o que, pelo teorema da convergência dominada, permite escrever $\mu(A) = \lim \int h_n d\mu$. □

Corolário 10.3.4 *A transformada de Fourier $\widehat{f}$ duma função integrável e não-negativa caracteriza f (λ-q.t.p.).*

10.4 Fórmula de inversão

Da demonstração do Teorema 10.3.3 sabemos que

$$\int h d\mu = \frac{1}{(2\pi)^d} \lim_{\sigma\to 0} \int h(x) \int \widehat{\mu}(u)\, e^{-i<u,x>-\sigma^2\|u\|^2/2} d\lambda(u)d\lambda(x), \qquad (10.4.1)$$

para todo a função h limitada e contínua sobre $\mathbb{R}^d$. Esta igualdade dá-nos uma fórmula de inversão das transformadas de Fourier de medidas finitas.

Como veremos de seguida, se $\widehat{\mu}$ é integrável podemos fazer melhor.

Teorema 10.4.2 *Se μ é uma medida finita cuja transformada de Fourier $\widehat{\mu}$ é λ-integrável, então μ admite uma densidade contínua e limitada relativamente à medida de Lebesgue dada, para $x \in \mathbb{R}^d$, por*

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{\mu}(u)\, e^{-i<u,x>} d\lambda(u).$$

Demonstração: Comecemos por notar que g dada pela fórmula anterior é uma função real, que, pela integrabilidade de $\widehat{\mu}$, é limitada e contínua. Além disso, se h é uma função de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$ contínua de suporte compacto, a fórmula (10.4.1) e o teorema da convergência dominada, permitem escrever $\int h d\mu = \int hg d\lambda$. Se A é um rectângulo semi-aberto à esquerda, sabemos que existe uma sucessão (h_n) de funções contínuas de suporte compacto com $h_n \to \mathbb{1}_A$ e $0 \leq h_n \leq \mathbb{1}_E$, onde E é um rectângulo fechado que contém a aderência de A (cf. Exercício 3.6.9). Novamente pelo teorema da convergência dominada, obtemos $\mu(A) = \lim \int h_n d\mu = \lim \int h_n g d\lambda = \int_A g d\lambda$. É agora claro que g é não-negativa. Finalmente, pelo lema da igualdade de medidas, concluímos que $\mu(A) = \int_A g d\lambda$, para todo o $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, o que prova o pretendido. □

Corolário 10.4.3 *Se f é uma função não-negativa e λ-integrável cuja transformada de Fourier $\widehat{f}$ é λ-integrável, então*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{f}(u)\, e^{-i<u,x>} d\lambda(u), \lambda - q.t.p.$$

10.5 Exercícios

1. Mostre que a transformada de Fourier do produto de convolução de duas medidas finitas μ e ν sobre $\mathbb{R}^d$, é o produto das duas transformadas de Fourier: $\widehat{\mu \star \nu} = \widehat{\mu}\,\widehat{\nu}$. Conclua que se f e g são funções não-negativas e λ-integráveis, então $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.
2. Sejam f λ-integrável e não-negativa, e g a função definida, para $x \in \mathbb{R}^d$, por $g(x) = f(x/\sigma)$, onde $\sigma \neq 0$. Mostre que $\widehat{g}(u) = |\sigma|^d \widehat{f}(\sigma u)$, para todo o $u \in \mathbb{R}^d$.
3. Sejam $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$, funções λ-integráveis e não-negativas, e $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \prod_{i=1}^d f_i(x_i)$, para $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Mostre que $\widehat{f} = \prod_{i=1}^d \widehat{f_i}$.
4. Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, para $x \in \mathbb{R}$ (ver Exercício 7.6.13). Mostre que $\widehat{f}$ é real e derivável e que $(\widehat{f}\,)'(u) = -u\widehat{f}(u)$, para $u \in \mathbb{R}$ (Sugestão: utilize o Exercício 4.7.15). Conclua que $\widehat{f}(u) = e^{-u^2/2}$, para $u \in \mathbb{R}$.

10.6 Bibliografia

Cohn, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

Jacod, J. (1999). *Théorie de l'Intégration*, Université Paris VI, Paris.

Rudin, W. (1974). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Bibliografia Geral

CHAE, S.B. (1980). *Lebesgue Integration*, Marcel Dekker, New York.

COHN, D.L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

DIEUDONNÉ, J. (1978). Intégration et mesure, In: *Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900*, Vol. 2, Hermann, Paris.

FERNANDEZ, P.J. (1976). *Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro.

GOMES, R.L., BARROS, L. (1946). *Medida de Jordan*, Junta de Investigação Matemática.

HALMOS, P.R. (1950). *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York.

JACOD, J. (1999). *Théorie de l'Intégration*, Université Paris VI, Paris.

KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V. (1961). *Functional Analysis*, Vol. 2, Graylock Press, New York.

LANG, S. (1993). *Real and Functional Analysis*, Springer, New York.

LIMA, E.L. (1995). *Curso de Análise*, Vol. 1, 8^aed., IMPA, Rio de Janeiro.

LIMA, E.L. (1989). *Curso de Análise*, Vol. 2, 3^aed., IMPA, Rio de Janeiro.

LOÈVE, M. (1977). *Probability Theory I*, Springer-Verlag, New York.

MUNROE, M.E. (1953). *Introduction to Measure and Integration*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge.

POZO, M.A.J. (1989). *Medida, Integración y funcionales*, Editorial Pueblo y Educación, Habana.

REVUZ, D. (1994). *Mesure et Intégration*, Hermann, Paris.

RUDIN, W. (1974). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

WEINHOLTZ, A.B. (1996). *Integral de Riemann e de Lebesgue em* $\mathbb{R}^n$, Textos de Matemática, Universidade de Lisboa.

WEIR, A.J. (1974). *General Integration and Measure*, Vol. 2, Cambridge University Press.

WHEEDEN, R.L., ZYGMUND, A. (1977). *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York.

Índice Remissivo