

Carlos Tenreiro

Notas de  
Métodos Quantitativos

Coimbra, 2004



## Nota prévia

Estas notas têm como objectivo principal servirem de texto de apoio às aulas da disciplina de Métodos Quantitativos leccionada a alunos do segundo ano da licenciatura em Administração Pública da Faculdade de Direito da Universidade de Coimbra.

A abordagem à Estatística que seguimos no curso e que aqui apresentamos, é fortemente influenciada pelo livro de D.S. Moore e G.P. McCabe, *Introduction to the Practice of Statistics*, editado pela W.H. Freeman and Company. Acreditamos que esta abordagem é a que mais se ajusta, não só à formação matemática dos alunos que frequentam a disciplina, mas principalmente aos objectivos duma disciplina de Métodos Quantitativos inserida numa licenciatura em Administração Pública.

Durante o curso, cálculos e gráficos foram muitas das vezes executados com o auxílio da aplicação informática SPSS (Statistical Packages for Social Sciences) disponível a partir do Centro de Informática da Universidade de Coimbra.

Apesar dos assuntos tratados nestas notas corresponderem, no essencial, ao que foi leccionado, as matérias completas foram expostas nas aulas.

Carlos Tenreiro



# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
0.1 O que é a Estatística? . . . . .	1
0.2 O que vamos aprender? . . . . .	3
0.3 Para que nos serve a Estatística? . . . . .	4
0.4 Bibliografia . . . . .	7
<b>I Análise Descritiva de Dados</b>	<b>9</b>
<b>1 Distribuição duma variável</b>	<b>11</b>
1.1 Indivíduos e variáveis . . . . .	11
1.2 Representação gráfica duma distribuição . . . . .	14
1.2.1 Gráficos para variáveis qualitativas . . . . .	14
1.2.2 Gráficos para variáveis quantitativas . . . . .	18
1.2.3 Características gráficas mais relevantes . . . . .	25
1.3 Características numéricas duma distribuição . . . . .	30
1.3.1 Medidas de tendência central . . . . .	30
1.3.2 Medidas de dispersão . . . . .	37
1.3.3 Gráfico de extremos-e-quartis . . . . .	44
1.4 Alteração da unidade de medida . . . . .	48
1.5 Bibliografia . . . . .	53
<b>2 A distribuição normal</b>	<b>55</b>
2.1 Curvas densidade . . . . .	55
2.2 Média e desvio-padrão duma curva densidade . . . . .	58
2.3 Curvas e distribuições normais . . . . .	59
2.4 Regra 68-95-99.7 . . . . .	61
2.5 Cálculos envolvendo a distribuição normal . . . . .	64
2.6 Julgando a assunção de normalidade . . . . .	70

2.7	Bibliografia . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Associação entre duas variáveis</b>	<b>75</b>
3.1	Gráfico de dispersão . . . . .	75
3.2	Coefficiente de correlação linear . . . . .	81
3.3	Recta de regressão . . . . .	87
3.4	Gráfico de resíduos . . . . .	92
3.5	O tempo como variável independente . . . . .	99
3.6	Bibliografia . . . . .	105
<b>II</b>	<b>A caminho da Inferência Estatística</b>	<b>107</b>
<b>4</b>	<b>A recolha dos dados</b>	<b>109</b>
4.1	A importância duma adequada recolha de dados . . . . .	109
4.2	Planeamento de experiências . . . . .	110
4.3	Planeamento de estudos por amostragem . . . . .	114
4.4	Viés, variabilidade e distribuição amostral . . . . .	119
4.5	Bibliografia . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Introdução à probabilidade</b>	<b>125</b>
5.1	Experiência e acontecimentos aleatórios . . . . .	125
5.2	Acontecimentos e conjuntos . . . . .	127
5.3	Atribuição de probabilidade . . . . .	131
5.3.1	Definição clássica de probabilidade . . . . .	131
5.3.2	Frequência relativa e probabilidade . . . . .	133
5.3.3	Definição frequentista de probabilidade . . . . .	136
5.3.4	Probabilidade via curvas densidade . . . . .	139
5.4	Propriedades da probabilidade . . . . .	142
5.5	Independência de acontecimentos . . . . .	145
5.6	Bibliografia . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Variáveis aleatórias</b>	<b>151</b>
6.1	Noção de variável aleatória . . . . .	151
6.2	Distribuição de probabilidade . . . . .	152
6.3	Média e variância duma variável aleatória . . . . .	161
6.4	Propriedades da média e da variância . . . . .	164
6.5	Lei dos grandes números . . . . .	167
6.6	Lei dos grandes números e inferência estatística . . . . .	171

6.7	Bibliografia . . . . .	172
<b>7</b>	<b>Distribuições amostrais para proporções e médias</b>	<b>173</b>
7.1	Distribuição amostral dum estatística . . . . .	173
7.2	Distribuição amostral de $\hat{p}$ . . . . .	174
7.2.1	Variável aleatória binomial . . . . .	175
7.2.2	Média e desvio-padrão de $\hat{p}$ . . . . .	180
7.2.3	Aproximação normal para a distribuição de $\hat{p}$ . . . . .	181
7.3	Distribuição amostral de $\bar{x}$ . . . . .	188
7.3.1	Distribuição de frequência de $\bar{x}$ : dois exemplos . . . . .	188
7.3.2	Média e desvio-padrão de $\bar{x}$ . . . . .	192
7.3.3	O teorema do limite central . . . . .	193
7.4	Bibliografia . . . . .	198
<b>III</b>	<b>Inferência Estatística</b>	<b>199</b>
<b>8</b>	<b>Intervalos de confiança para proporções e médias</b>	<b>201</b>
8.1	Inferência estatística . . . . .	201
8.2	Estimação por intervalos de confiança . . . . .	202
8.3	Intervalos de confiança para uma proporção . . . . .	205
8.4	Intervalos de confiança para uma média . . . . .	210
8.5	Como escolher o tamanho da amostra . . . . .	217
8.5.1	Caso da estimação dum proporção . . . . .	217
8.5.2	Caso da estimação dum média . . . . .	220
8.6	Bibliografia . . . . .	221
<b>9</b>	<b>Testes de hipóteses para proporções e médias</b>	<b>223</b>
9.1	Generalidades sobre testes de hipóteses . . . . .	223
9.2	Testes de hipóteses para proporções . . . . .	227
9.3	Testes de hipóteses para médias . . . . .	231
9.4	Teste de igualdade de duas proporções . . . . .	235
9.5	Teste de igualdade de duas médias . . . . .	240
9.6	Comparação de médias em amostras emparelhadas . . . . .	246
9.7	Bibliografia . . . . .	249
<b>Tabelas</b>		<b>251</b>
	Tabela A: Distribuição normal standard . . . . .	253
	Tabela B: Números aleatórios . . . . .	257

Tabela C: Coeficientes binomiais . . . . .	261
Tabela D: Distribuição de Student . . . . .	265
<b>Bibliografia Geral</b>	<b>269</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>270</b>



# Introdução

*O que é a Estatística? O que vamos aprender? Para que nos serve?*

## 0.1 O que é a Estatística?

A palavra “estatística” deriva do latim “status” que significa “estado”, “situação”. Vejamos o que o WEBSTER’S DICTIONARY diz sobre a palavra “estatística” nas suas edições de 1828 e 1996:

1828<sup>1</sup>: *uma colecção de factos relativos ao estado da sociedade, à condição das pessoas no país, à sua saúde, longevidade, economia doméstica, orientação política, ao estado do país, etc.*

1996<sup>2</sup>: *a ciência que trata da recolha, classificação, análise e interpretação de factos ou dados numéricos, e que, pela utilização da teoria matemática da probabilidade, procura e estabelece regularidades em conjuntos mais ou menos dispersos de elementos.*

Reparemos no significado atribuído à palavra “estatística” na edição de 1828 deste dicionário, em que ela serve para designar, não uma disciplina científica ou um conjunto de técnicas utilizadas para interpretar um conjunto de dados, mas tão só um conjunto de factos ou dados relevantes para a organização dos estados. Actualmente, utilizamos o plural **estatísticas** com um significado próximo do anterior. Mais precisamente, usamo-lo para designar um conjunto de dados numéricos, agrupados e classificados, referentes aos factos em estudo, ou ainda, descrições quantitativas duma realidade ou domínio. Reparemos na evolução do significado da palavra “estatística” patente na edição de 1996, onde se faz referência não só ao papel **descritivo** da disciplina quando se refere a classificação, análise e interpretação de dados numéricos, mas também ao seu

---

<sup>1</sup>In: [http://65.66.134.201/cgi-bin/webster/webster.exe?search\\_for\\_texts\\_web1828=statistics](http://65.66.134.201/cgi-bin/webster/webster.exe?search_for_texts_web1828=statistics)

<sup>2</sup>Webster’s Dictionary, Random House, New York, 1996.

papel **inferencial** quando se menciona a **teoria da probabilidade** como instrumento matemático que permite a procura de regularidades ou padrões.

Estes dois aspectos são também referidos nos dicionários seguintes:

PETIT ROBERT (1993)<sup>3</sup>: *estudo metódico de factos sociais, através de procedimentos numéricos (classificação, descrição, inventariação, recenseamento), destinado a informar e ajudar os governos (1832); campo da matemática aplicada que utiliza o cálculo das probabilidades para formular hipóteses a partir de acontecimentos reais e fazer previsões.*

DICIONÁRIO DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA (2001)<sup>4</sup>: *Estudo metódico que tem por objecto a observação de certo número de factos sociais, de uma realidade e a respectiva ordenação, análise e interpretação dos dados numéricos obtidos. – Estatística Descritiva: a que pesquisa e reúne dados numéricos, calcula médias, índices. – Estatística Matemática: a que utiliza o cálculo das probabilidades.*

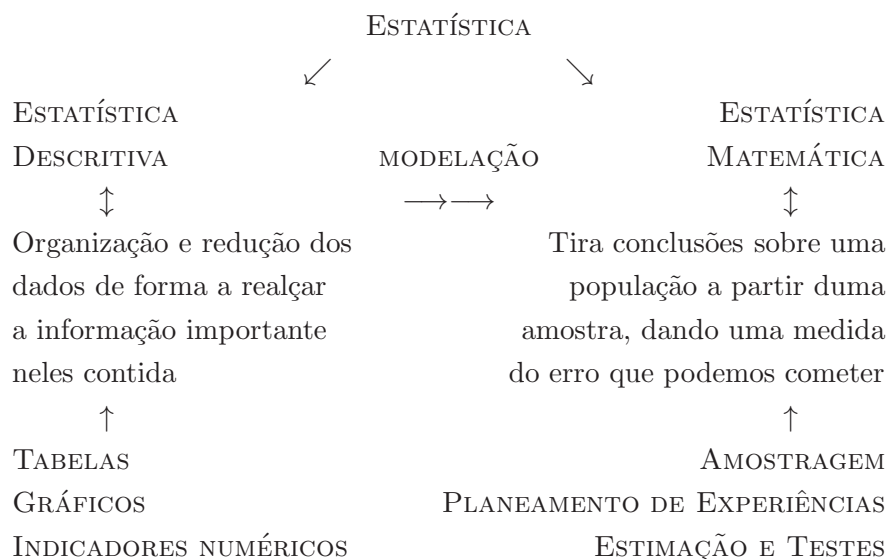
Para clarificar o papel inferencial da estatística, pensemos no que se passa nas vésperas duma eleição para a Assembleia da República em que várias **sondagens** são realizadas para prever as votações dos vários partidos no acto eleitoral que se avizinha. Contrariamente aos **censos** ou **recenseamentos** em que todos os indivíduos da população são inquiridos, na realização duma sondagem apenas uma pequena parcela da população, a que chamamos **amostra**, é inquirida. No caso das sondagens eleitorais a **população** ou **universo da sondagem** é idealmente constituída por todos os cidadãos eleitores. Os resultados obtidos na amostra são depois usados para estimar a verdadeira percentagem de votantes em cada um dos partidos. Se a recolha da amostra, isto é, se a **amostragem** for feita de forma adequada, é ainda possível quantificar a confiança que podemos ter na previsão efectuada.

O esquema seguinte resume o que acabámos de dizer. Além dos objectivos de cada uma das áreas da Estatística acima referidas, incluímos também os instrumentos utilizados em cada uma delas.

Apesar do processo de exploração dos dados, na busca de padrões e de observações que fogem a esses padrões, não coincidir necessariamente com o da sua descrição, a Estatística Descritiva é também referida na literatura como Análise Exploratória de Dados. Estatística Indutiva e Estatística Inferencial são designações correntemente usadas em alternativa a Estatística Matemática.

<sup>3</sup>Le nouveau Petit Robert, Dictionnaires Le Robert, Paris, 1993.

<sup>4</sup>Dicionário da língua portuguesa contemporânea da Academia das Ciências de Lisboa, Verbo, Lisboa, 2001.



Objectivos e métodos da Estatística

De forma sucinta podemos dizer que a **Estatística** é uma área da matemática aplicada que se ocupa da recolha, tratamento e interpretação de **dados** numéricos, e que usa a teoria da probabilidade para inferir sobre a população de onde esses dados foram recolhidos.

## 0.2 O que vamos aprender?

Pretendendo concretizar um pouco mais as diversas etapas descritas no esquema anterior, e, simultaneamente, dar uma ideia sobre os assuntos que abordaremos na disciplina de Métodos Quantitativos, consideremos o exemplo seguinte de aplicação da Estatística à medicina.

**Exemplo 0.2.1** Num estudo sobre os efeitos psico-somáticos na recuperação de jovens anoréxicas, pretende-se saber se o tratamento habitualmente usado dá melhores resultados em regime ambulatorio do que em regime de internamento hospitalar (para mais detalhes sobre este exemplo ver Pestana e Velosa, 2002, pág. 34–36). Do quadro seguinte consta o peso, em quilogramas, de jovens anoréxicas, no início do tratamento e passado quatro semanas. Um grupo recebe o tratamento em internamento hospitalar (H) na companhia de um familiar e o outro recebe o tratamento residindo com a família (F). Apesar deste conjunto de dados não ser muito extenso, os dados são difíceis de ler e de interpretar mesmo para um conhecedor da anorexia. É assim importante estudarmos técnicas estatísticas para organizar, apresentar de forma clara e resumir os

1	H	36.5	37.2	17	H	37.7	38.7	33	F	39.3	45.4
2	H	38.5	38.8	18	H	37.6	37.0	34	F	36.1	34.7
3	H	36.9	36.9	19	H	39.7	40.4	35	F	37.4	41.6
4	H	37.4	37.1	20	H	38.1	38.0	36	F	34.8	34.8
5	H	36.2	34.6	21	H	39.6	37.5	37	F	42.7	46.0
6	H	40.2	46.9	22	H	34.7	34.3	38	F	33.3	43.0
7	H	43.0	44.6	23	H	36.3	37.4	39	F	36.5	34.1
8	H	34.6	42.3	24	H	39.8	45.5	40	F	37.0	35.2
9	H	36.7	33.3	25	H	37.7	38.6	41	F	37.2	43.3
10	H	36.5	37.2	26	H	36.1	37.9	42	F	35.2	41.1
11	H	38.5	43.8	27	H	38.3	38.3	43	F	37.8	41.9
12	H	40.4	43.2	28	H	36.6	39.6	44	F	40.7	42.5
13	H	36.8	37.3	29	H	39.6	39.3	45	F	39.0	41.5
14	H	34.7	32.8	30	F	38.0	43.1	46	F	39.5	44.4
15	H	31.7	41.2	31	F	37.7	42.7				
16	H	36.4	32.3	32	F	39.0	41.4				

Tabela 0.2.2: Peso em Kg de jovens anoréxicas

dados anteriores, de modo que deles sobressaia a informação mais relevante. Estamos naturalmente a falar da utilização de **tabelas**, **gráficos** e **indicadores numéricos**.

Pretendendo saber se o tratamento ambulatório é, ou não, mais eficaz que o hospitalar, de modo a que o possamos indicar a outros doentes, necessitamos de técnicas que nos permitam decidir por uma ou outra forma de tratamento, e ao mesmo tempo quantificar o erro que poderemos estar a cometer quando tomamos essa decisão. Referimo-nos desta vez aos **testes de hipóteses**.

Um ponto fundamental de todo este procedimento de inferência, é a forma como as jovens foram escolhidas para integrar o estudo, de modo a avaliarmos o alcance do mesmo (isto é, para que universo de jovens anoréxicas podem os seus resultados e conclusões ser considerados válidos), ou ainda, a forma como as jovens foram divididas pelos dois grupos de tratamento. Estamos neste caso a levantar a questão da **amostragem** e do **planeamento da experiência**. Todas estas questões serão por nós estudadas em capítulos futuros.

### 0.3 Para que nos serve a Estatística?

A Estatística é hoje uma ferramenta essencial aos profissionais das mais diversas áreas de actividade. É-o para aqueles que a usam para fundamentar ou realizar estudos nas áreas da medicina, das ciências da terra, das engenharias, da psicologia, da pedagogia, etc, mas é-o também para aqueles que precisam de interpretar, preferivelmente de forma crítica, informação estatística, quer esta se apresente de forma gráfica ou

não-gráfica. Atendendo à natureza das funções que poderá desempenhar (ver as publicações “Cursos e Perfis Profissionais”<sup>5</sup> e “Prospecto 2003/04 da Universidade de Coimbra”<sup>6</sup> editadas pela Universidade de Coimbra), este poderá ser também o caso dum licenciado em Administração Pública. São diversas as tarefas que tem de desempenhar na sua actividade profissional em que conhecimentos na área da Estatística poderão ser uma mais-valia real.

**Exemplo 0.3.1** Para ilustrar a necessidade de conhecimentos na área da Estatística, por mais elementares que sejam, dum qualquer cidadão na interpretação duma simples **sondagem de opinião**, fica o exemplo da sondagem eleitoral publicada pelo semanário *Expresso* em 16 de Setembro de 1995, cujos resultado apresentamos nos quadro e figura seguintes:

Partidos	Intenção de voto
CDU	8.8%
PS	41.8%
PSD	33.7%
CDS/PP	9.1%
Outros	6.6%

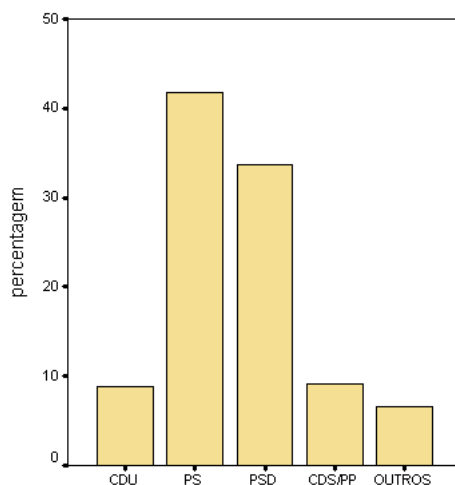
Ficha técnica:

Universo da sondagem – eleitorado de Portugal Continental;

Amostragem – de tipo aleatório, estratificada segundo a região e o “habitat”;

Dimensão da amostra – 1006 indivíduos;

Margem de erro máxima – 3.1%, com um grau de probabilidade de 95%.



<sup>5</sup> *Cursos e perfis profissionais*, Gab. de Apoio a Saídas Profissionais, Universidade de Coimbra, 2002.

<sup>6</sup> *Prospecto 2003/04 da Universidade de Coimbra*, Universidade de Coimbra, 2003.

Uma sondagem é, como veremos, um caso particular duma classe mais vasta de problemas a que em Estatística se dá o nome de estimação por **intervalos de confiança**.

O gráfico de barras e o quadro são de interpretação simples dando-nos, de forma gráfica e não-gráfica, respectivamente, as intenções de voto previstas para cada um dos partidos políticos indicados. As questões principais prendem-se com a compreensão da ficha técnica. Nesta identifica-se o universo da sondagem ou população, ou seja, o conjunto total de indivíduos para os quais os resultados da sondagem são aplicáveis. Neste caso o universo da sondagem não é constituído por todos os cidadãos eleitores, uma vez que nem os eleitores dos Açores e da Madeira, nem os cidadãos portugueses emigrados, foram incluídos no estudo. Sobre a amostra é dito que foram inquiridos 1006 indivíduos e que é de tipo aleatório e estratificada segundo a região e o “habitat”. Identifica-se desta maneira o método que foi usado para recolher a amostra, conhecido por amostragem aleatória estratificada. Como veremos mais à frente, trata-se de um dos métodos de recolher amostras que permitem quantificar o grau de confiança que podemos ter nas conclusões tiradas a partir dessas amostras. Ficamos também a saber que a verdadeira percentagem de votantes na CDU pertence ao intervalo  $[8.8 - 3.1, 8.8 + 3.1] = [5.7, 11.9]$  com uma probabilidade de 95%. Isto quer dizer que se se recolhessem várias amostras, cada uma delas com 1006 indivíduos, pelo método de amostragem referido, poderíamos construir outros tantos intervalos do tipo anterior, diferentes de amostra para amostra, 95% dos quais conteriam a verdadeira percentagem de votantes na CDU. Conclusões análogas poderiam ser tiradas para os outros partidos. Reparemos que esta quantificação da confiança nas previsões da sondagem, tem a ver, não com as previsões particulares apresentadas, pois estas podem estar, ou não, correctas, mas com o que se passaria se a sondagem fosse repetida um grande número de vezes. Por outras palavras, a quantificação da confiança nos resultados duma sondagem tem a ver com o método utilizado para produzir as previsões. Voltaremos mais tarde a todas estas questões.

Por curiosidade, apresentamos na tabela seguinte intervalos para as intenções de voto que decorrem da sondagem anterior e os resultados nacionais obtidos (ver página da Comissão Nacional de Eleições no endereço <http://www.cne.pt/>):

Partidos	Intenção de voto	Votação
CDU	[5.7%, 11.9%]	8.57%
PS	[38.7%, 44.9%]	43.76%
PSD	[30.6%, 36.8%]	34.12%
CDS/PP	[6.0%, 12.2%]	9.05%

## **0.4 Bibliografia**

Ferreira, I., Gonçalves, V.P. (1996). *Métodos Quantitativos*, Texto Editora.

Martins, M.E.G., Cerveira, A.G. (2000). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*, Universidade Aberta.

Pestana, D.D., Velosa, S.F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian.





## Parte I

# Análise Descritiva de Dados



# Capítulo 1

## Distribuição dum variável

*Indivíduos e variáveis. Variáveis qualitativas e variáveis quantitativas. Distribuição dum variável. Frequências absolutas, relativas e percentuais. Tabela de frequências. Gráfico de barras. Gráfico circular. Gráfico de caule-e-folhas. Histograma. Distribuições simétricas e assimétricas, unimodais e bimodais. Média e mediana. Variância e desvio-padrão. Mínimo, máximo e amplitude. Quartis e amplitude interquartil. Observações discordantes. Gráfico de extremos-e-quartis. Alteração da unidade de medida.*

### 1.1 Indivíduos e variáveis

A informação contida no quadro da Figura 1.1.1 diz respeito a 30 cidadãos nacionais que nos **censos** de 1991 responderam ao questionário que lhes foi entregue (*in* Ferreira e Gonçalves, 1996, pág. 89).

Qualquer conjunto de dados como este, contém informação acerca dum grupo de **indivíduos**, informação essa que está organizada em **variáveis**.

No caso particular da Figura 1.1.1, temos informação sobre 6 variáveis (residência, idade, estado civil, número de filhos, rendimento mensal, sexo), observadas em 30 indivíduos. Por **indivíduo** queremos designar qualquer objecto descrito por um conjunto de dados. Os indivíduos podem ser pessoas, animais, ou coisas. As **variáveis** são características que observamos nos diversos indivíduos, variando os seus valores de indivíduo para indivíduo.

Sendo a informação da Figura 1.1.1 relativa a uma parte dos cidadãos nacionais que nos censos de 1991 responderam ao questionário entregue, dizemos que tal informação é relativa a uma **amostra** desse conjunto mais vasto de cidadãos. Ao número de indivíduos da amostra, chamamos **dimensão da amostra**. No caso presente, temos

Código	Residência	Idade	Estado civil	N.º de filhos	Rendimento	Sexo
1	Coimbra	36	cas	2	232 250\$	M
2	Lisboa	42	div	4	153 242\$	F
3	Porto	28	cas	1	51 340\$	M
4	Porto	18	cas	1	55 250\$	F
5	Braga	30	sol	0	265 234\$	M
6	Faro	25	cas	1	71 340\$	F
7	Coimbra	32	cas	2	132 000\$	F
8	Lisboa	16	sol	0	0\$	M
9	Porto	26	cas	1	71 340\$	F
10	Coimbra	32	cas	2	245 250\$	M
11	Lisboa	17	sol	0	0\$	F
12	Porto	22	cas	1	81 400\$	M
13	Coimbra	39	cas	2	130 000\$	F
14	Lisboa	16	sol	0	0\$	F
15	Porto	25	cas	3	342 340\$	F
16	Braga	62	viu	2	332 250\$	M
17	Lisboa	38	div	0	63 428\$	F
18	Faro	23	cas	1	92 340\$	M
19	Braga	31	cas	2	155 750\$	F
20	Lisboa	56	div	5	327 453\$	F
21	Porto	28	cas	1	45 340\$	M
22	Coimbra	42	cas	2	282 250\$	M
23	Lisboa	18	sol	0	0\$	M
24	Porto	27	cas	1	71 340\$	F
25	Coimbra	35	cas	3	112 500\$	F
26	Lisboa	20	sol	0	85 230\$	F
27	Porto	35	cas	4	71 340\$	M
28	Braga	52	cas	2	110 250\$	F
29	Faro	46	viu	3	150 234\$	M
30	Lisboa	45	cas	1	75 000\$	F

Figura 1.1.1: Dados relativos aos censos de 1999

uma amostra de dimensão 30.

Algumas variáveis como “residência”, “sexo” ou “estado civil”, apenas distribuem os indivíduos em categorias de acordo com qualidades desses mesmos indivíduos. Tais variáveis dizem-se por isso **qualitativas**. Os valores ou modalidades assumidos por uma variável qualitativa são assim identificadores de qualidades, modalidades ou atributos do indivíduo observado. No caso da variável “sexo” da Figura 1.1.1, em vez das letras M e F para designar masculino e feminino, poderíamos utilizar números como 1 e 2 desde que indiquemos qual a modalidade que é representada pelo número 1. Estes números expressam apenas um atributo do indivíduo observado, não fazendo sentido realizar sobre tais números operações numéricas como, por exemplo, o cálculo duma média. Apesar de neste caso a utilização das letras M e F ser mais sugestiva, casos há em que é mais fácil utilizar números como identificadores dos valores assumidos por

uma variável qualitativa.

Outras variáveis como “idade”, “número de filhos” ou “rendimento mensal”, tomam valores numéricos com os quais faz sentido realizar operações aritméticas. Fará, por exemplo, sentido calcular o rendimento médio dos indivíduos observados. A estas variáveis chamamos **variáveis quantitativas**.

A figura seguinte mostra o aspecto do ficheiro SPSS *censos.sav* que comporta a informação incluída no quadro da Figura 1.1.1. Reparemos que não só na variável “sexo” foram usadas etiquetas para representar as suas modalidades. Tal acontece também com as variáveis “residência” e “estado civil”. No caso da variável “residência”, usámos as etiquetas 1, 2, 3, 4, e 5, para representar as cidades “Braga”, “Porto”, “Coimbra”, “Lisboa” e “Faro”, respectivamente.

The screenshot shows the SPSS Data Editor window for the file 'censos.sav'. The window title is 'censos.sav - SPSS Data Editor'. The menu bar includes File, Edit, View, Data, Transform, Analyze, Graphs, Utilities, Window, and Help. The toolbar contains various icons for file operations and data manipulation. The main area displays a data table with the following columns: 'reside', 'idade', 'estcivil', 'nfilhos', 'rendin', 'sexo', and 'var'. The table contains 30 rows of data, with the first row highlighted. The status bar at the bottom indicates 'SPSS Processor is ready'.

	reside	idade	estcivil	nfilhos	rendin	sexo	var
1	3	36	2	2	232250	1	
2	4	42	3	4	153242	2	
3	2	28	2	1	51340	1	
4	2	18	2	1	55250	2	
5	1	30	1	0	265234	1	
6	5	25	2	1	71340	2	
7	3	32	2	2	132000	2	
8	4	16	1	0	0	1	
9	2	26	2	1	71340	2	
10	3	32	2	2	245250	1	
11	4	17	1	0	0	2	
12	2	22	2	1	81400	1	
13	3	39	2	2	130000	2	
14	4	16	1	0	0	2	
15	2	25	2	3	342340	2	
16	1	62	4	2	332250	1	
17	4	38	3	0	63428	2	
18	5	23	2	1	92340	1	
19	1	31	2	2	155750	2	
20	4	56	3	5	327453	2	
21	2	28	2	1	45340	1	
22	3	42	2	2	282250	1	
23	4	18	1	0	0	1	
24	2	27	2	1	71340	2	
25	3	35	2	3	112500	2	
26	4	20	1	0	85230	2	
27	2	35	2	4	71340	1	
28	1	52	2	2	110250	2	
29	5	46	4	3	150234	1	
30	4	45	2	1	75000	2	
31							
32							

Ficheiro censos.sav

## 1.2 Representação gráfica duma distribuição

O **padrão de variação** duma variável, a que chamaremos **distribuição da variável**, é uma informação importante sobre essa variável. A **distribuição duma variável** dá-nos conta **dos valores que a variável toma, bem como a frequência com que os toma**. Os métodos de representação de dados que vamos estudar nos parágrafos seguintes, permitir-nos-ão descrever a distribuição da variável em estudo, pondo em evidência as suas principais características.

### 1.2.1 Gráficos para variáveis qualitativas

Os valores que uma variável qualitativa toma são etiquetas ou rótulos para as modalidades ou categorias respeitantes a essa variável. Um modo de resumir os dados observados para uma variável qualitativa é contar o número de vezes que ocorre cada um dos valores assumidos pela variável. Esse número é dito **efectivo, frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência** desse valor.

**Exemplo 1.2.1** Centrando a nossa atenção na variável “residência” da Figura 1.1.1, apresentamos na tabela seguinte o resultado de tais contagens. Além da frequência de cada uma das modalidades que a variável “residência” assume, a tabela apresenta também as chamadas **frequência relativa** e **frequência percentual**. É por isso dita **tabela de frequências**.

	frequência	frequência relativa	frequência percentual
Braga	4	,133	13,3
Porto	8	,267	26,7
Coimbra	6	,200	20,0
Lisboa	9	,300	30,0
Faro	3	,100	10,0
Total	30	1,000	100,0

Vejamos como, em geral, efectuamos o cálculo das frequências relativa e percentual. Começemos pela **frequência relativa** que se obtém dividindo a frequência (absoluta) pelo número de observações:

$$\text{frequência relativa} = \frac{\text{frequência}}{\text{número de observações}}$$

A frequência relativa é por isso um número maior ou igual que 0 e menor ou igual que 1. A **frequência percentual**, exprime-se em percentagem, e não é mais do que a frequência relativa multiplicada por 100:

$$\text{frequência percentual} = \text{frequência relativa} \times 100 \%$$

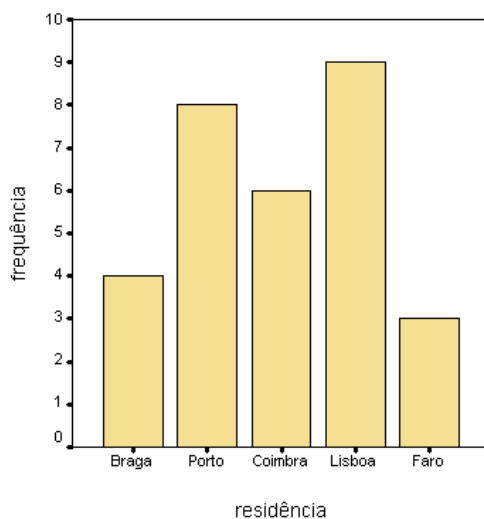
A informação contida numa tabela de frequência pode ser apresentada graficamente através dum **gráfico de barras**.

#### Construção dum gráfico de barras:

- ⊙ marcar no eixo dos  $xx$  dum sistema de eixos coordenados os valores ou modalidades assumidos pela variável em estudo;
- ⊙ colocar por cima desses valores barras verticais de altura igual à sua frequência, à sua frequência relativa ou à sua frequência percentual.

Notemos que num gráfico de barras a espessura das barras não tem qualquer significado. Apenas a altura o tem.

**Exemplo 1.2.1** (cont.) A informação contida na Tabela 1.2.1 dá origem ao **gráfico de barras** de frequências absolutas seguinte:



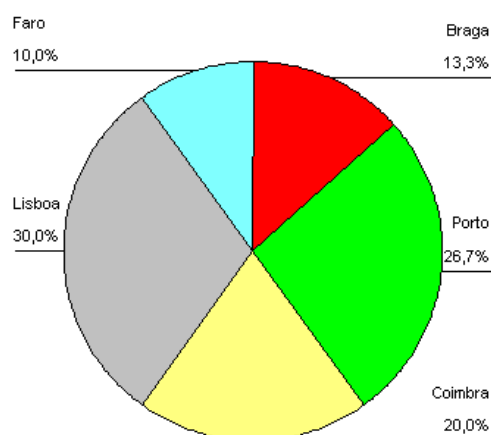
Uma representação alternativa muito corrente é a representação em **gráfico circular**. Esta representação tem por base o círculo.

**Construção dum gráfico circular:**

- ⊙ dividir o círculo em tantos sectores quantos os valores ou modalidades que a variável toma;
- ⊙ os ângulos desses sectores são obtidos multiplicando a frequência relativa respectiva por 360 graus:

$$\text{ângulo dum sector} = \text{frequência relativa} \times 360^\circ$$

**Exemplo 1.2.1** (cont.) Para a variável “residência” da Figura 1.1.1 obtemos o gráfico circular de frequências percentuais seguinte:



Os ângulos de cada um dos sectores marcados no gráfico anterior são apresentados na tabela seguinte. Na primeira coluna o ângulo é calculado a partir do valor aproximado da frequência relativa dado na Tabela 1.2.1 (nesta tabela os valores foram aproximados às milésimas). Na segunda coluna o mesmo cálculo é feito utilizando o valor exacto da frequência relativa.

	ângulo (aproxi.)	ângulo (exacto)
Braga	47.88	48.00
Porto	96.12	96.00
Coimbra	72.00	72.00
Lisboa	108.00	108.00
Faro	36.00	36.00
Total	360	360

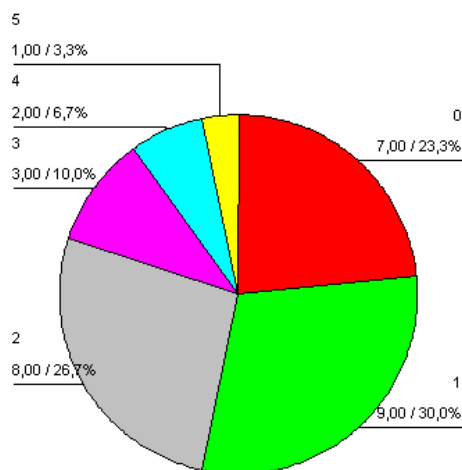
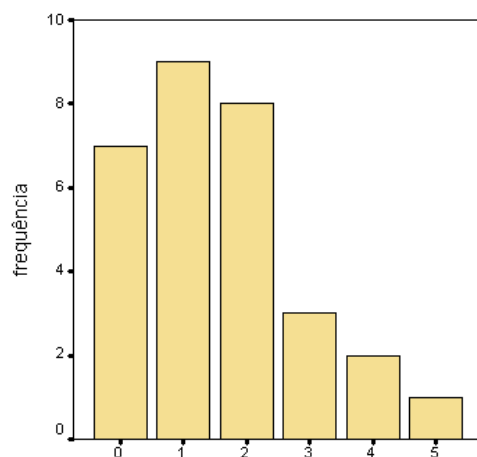
A discrepância encontrada para os valores dos dois primeiros ângulos é devida aos **erros de arredondamento** presentes na frequência relativa. Sempre que efectuamos



cálculos utilizando uma calculadora, é preferível trabalhar com os valores exactos ou guardar na memória da máquina os resultados de cálculos anteriores. Em particular, se esses resultados são números com muitas casas decimais, estamos, ao proceder assim, a diminuir possíveis erros de arredondamento futuros.

Os gráficos anteriores permitem uma percepção rápida sobre a distribuição da variável em estudo. No entanto, eles não são essenciais para compreendermos a distribuição duma variável qualitativa uma vez que esta é normalmente fácil de apreender a partir exclusivamente da tabela de frequências. A importância da representação gráfica na descrição da distribuição duma variável será mais relevante no caso das variáveis quantitativas.

Apesar de apresentarem algumas limitações relativamente às representações gráficas específicas para variáveis quantitativas que estudamos no parágrafo seguinte, os gráficos



Gráficos de barras e circular para a variável "numero de filhos"

de barras e circular são também usados para descrever a distribuição de variáveis quantitativas que assumem um pequeno número de valores distintos. Tal é, por exemplo, o caso da variável “número de filhos” da Figura 1.1.1 (ver figuras anteriores).

## 1.2.2 Gráficos para variáveis quantitativas

Uma representação gráfica muito utilizada para descrever a distribuição de uma variável quantitativa é o diagrama ou **gráfico de caule-e-folhas**. Vejamos como construir um gráfico de caule-e-folhas.

### Construção dum gráfico de caule-e-folhas:

- ⊙ separar cada observação num **caule**, formado pelos algarismos dominantes do número, e numa **folha**, formada pelos restantes algarismos;
- ⊙ colocar os caules numa coluna por ordem crescente de cima para baixo, e desenhar uma linha vertical à direita dessa coluna de números;
- ⊙ colocar à direita de cada caule as respectivas folhas, por ordem crescente da esquerda para a direita.

**Exemplo 1.2.2** Consideremos o seguinte conjunto de dados relativo ao peso em gramas de 42 ratos diabéticos (dados *in* Pestana e Velosa, 2002, pág. 115):

40, 46, 45, 46, 43, 47, 52, 39, 45, 42, 42, 44, 40, 41, 51, 42, 41, 38, 45, 48, 39  
49, 38, 38, 42, 48, 49, 40, 38, 46, 42, 38, 51, 48, 44, 48, 40, 44, 38, 41, 45, 52

A variável em estudo é o “peso” e os indivíduos são os ratos observados. Seguindo o procedimento acima descrito, fazemos a representação dos dados anteriores através dum gráfico de caule-e-folhas. Neste caso a separação das observações em caule e folha é simples. O caule é o algarismo das dezenas, enquanto que a folha é o algarismo das unidades. Os três passos atrás descritos dão origem aos gráficos seguintes, sendo o último deles o gráfico de caule-e-folhas da variável em estudo:

```

3 |
1) 4 |
    5 |

```

```

          3 | 989888888
2)       4 | 065637524012158928906284804415
          5 | 2112

          3 | 888888899
3)       4 | 000011122222344455556667888899
          5 | 1122

```

Reparemos que cada caule tem aqui uma **amplitude** de 10 unidades. Isto quer dizer que o número representado pelo caule 3 é  $3 \times 10 = 30$ . Além disso, cada folha representa uma só observação.

O gráfico anterior dá uma pobre ideia da distribuição da variável na parte central do mesmo. Neste caso é habitual separar cada caule em semi-caules. No caso do exemplo anterior, isto corresponderia a considerar os semi-caules 3, 3, 4, 4, 5 e 5, e a associar ao primeiro semi-caule as folhas 0, 1, 2, 3 e 4, e ao segundo semi-caule as folhas 5, 6, 7, 8 e 9. Eis o gráfico de caule-e-folhas resultante:

```

          3 | 888888899
          4 | 0000111222223444
          4 | 55556667888899
          5 | 1122

```

Por vezes justifica-se ainda dividir cada caule em 5 subcaules. Ao primeiro subcaule associávamos as folhas 0 e 1, ao segundo as folhas 2 e 3, ao terceiro as folhas 4 e 5, ao quarto as folhas 6 e 7, e, finalmente, ao quinto subcaule associávamos as folhas 8 e 9.

Quando esta tarefa é executada por um *software* estatístico, a separação das observações em caule e folhas é feita de modo automático. No caso do SPSS o gráfico produzido é o segundo dos gráficos anteriores. O SPSS inclui no gráfico a amplitude de cada caule, a informação de que cada folha corresponde a uma observação, e também a frequência de cada caule.

```

peso Stem-and-Leaf Plot
Frequency   Stem & Leaf
      8,00   3 . 88888899
     16,00   4 . 0000111222223444
     14,00   4 . 55556667888899
      4,00   5 . 1122

Stem width:      10
Each leaf:      1 case(s)

```

Casos há em que não é óbvia a separação das observações em caule e folhas. O exemplo seguinte ilustra este facto.

**Exemplo 1.2.3** Para testar uma nova farinha para pintos, de um grupo de 40 pintos com um dia seleccionaram-se 20 aos quais foi administrada a nova farinha - grupo experimental -, tendo aos restantes sido dada a ração habitual - grupo de controlo. Passadas três semanas os pintos foram pesados tendo-se obtido os seguintes ganhos no peso (em gramas) (dados *in* Martins e Cerveira, 2000, pág. 67):

Grupo de controlo				Grupo experimental			
383	325	360	351	362	443	404	376
285	343	405	468	438	407	392	424
352	414	326	392	409	313	464	406
356	386	313	279	421	423	475	398
348	452	363	432	434	336	417	322

Pretendendo-se representar a distribuição dos pesos dos pintos do grupo de controlo por um gráfico de caule-e-folhas, surgem duas possibilidades para separar as observações em caule e folhas. Tomando a observação 383 para exemplificar, podemos optar por considerar 3 o caule e 83 a folha, ou, em alternativa, considerar 38 o caule e 3 a folha. A segunda opção é desapropriada uma vez que levaria a um gráfico com demasiados caules e poucas folhas por caule. Tomando então a primeira opção, somos conduzidos ao gráfico seguinte em que cada caule tem uma amplitude de 100:

```

2 | 79 85
3 | 13 25 26 43 48 51 52 56 60 63 83 86 92
4 | 05 14 32 52 68

```

Para facilitar a leitura representamos cada folha por um só algarismo o que neste caso corresponde a desprezarmos o algarismo das unidades. Obtemos então o gráfico de caule-e-folhas simplificado:

```

2 | 78
3 | 1224455566889
4 | 01356

```

Reparemos que, contrariamente aos gráficos anteriores, neste gráfico simplificado não são registadas as verdadeiras observações uma vez que estas aparecem truncadas.

Tal como no Exemplo 1.2.2 podemos ainda dividir cada caule em semi-caules:

```

2 | 78
3 | 12244
3 | 55566889
4 | 013
4 | 56

```

Para cada um dos grupos de controlo e experimental apresentamos a seguir os gráficos de caule-e-folhas produzidos pelo SPSS:

peso Stem-and-Leaf Plot for Grupo de controlo			peso Stem-and-Leaf Plot for Grupo experimental		
Frequency	Stem &	Leaf	Frequency	Stem &	Leaf
2,00	2 .	78	1,00	Extremes	(=<313)
5,00	3 .	12244	2,00	3 .	23
8,00	3 .	55566889	4,00	3 .	6799
3,00	4 .	013	11,00	4 .	00001222334
2,00	4 .	56	2,00	4 .	67
Stem width:	100		Stem width:	100	
Each leaf:	1 case(s)		Each leaf:	1 case(s)	

Gráficos de caule-e-folhas, por grupos de alimentação

Reparemos que a observação 313 do grupo experimental é marcada de forma especial sendo rotulada de “extrema”. Como teremos oportunidade de estudar um pouco mais à frente, isto quer dizer que este valor é suspeito de não seguir o padrão revelado pelas restantes observações. Poder-se-á, por exemplo, tratar dum erro de observação, dum valor incorrectamente registado, ou dum valor incorrectamente incluído no conjunto de dados. Diremos por isso que se trata dum **observação discordante**. Devido à influência que tais observações podem ter, por si só, no resultado de diversas metodologias estatísticas, este tipo de observações exige uma análise especial. Em particular, estes valores devem ser confirmados ou corrigidos antes de continuarmos o estudo. No caso de ser um valor incorrectamente incluído no conjunto de dados, ele deve ser excluído.

Uma das aplicações mais interessantes dos gráficos de caule-e-folhas, é a possibilidade de comparar dois conjuntos de observações conjugando os gráficos de caule-e-folhas respectivos. O gráfico seguinte permite uma comparação simples dos grupos de controlo e experimental, revelando evidências de que a nova farinha é preferível à antiga. Para que esta comparação seja válida é importante que o número de observações em cada um dos grupos seja aproximadamente o mesmo. O SPSS não executa este tipo gráfico.

Grupo de controlo		Grupo experimental
87	2	
44221	3	1
98866555	3	6799
310	4	00001222334
65	4	67

Gráficos de caule-e-folhas paralelos

Por razões que decorrem da construção dum gráfico de caule-e-folhas, em particular pelo facto de todas as observações estarem nele representadas, este tipo de gráfico revela-se desapropriado para grandes conjuntos de dados (reparemos que é possível contornar esta limitação associando a uma folha várias observações). Neste caso é habitual utilizar uma outra representação gráfica a que chamamos **histograma de frequências** ou simplesmente **histograma**.

#### Construção dum histograma de frequências:

- ⊙ dividir as observações em **classes** justapostas de igual amplitude e calcular o efectivo de cada classe;
- ⊙ marcar as classes no eixo dos  $xx$  dum sistema de eixos coordenados;
- ⊙ por cima de cada classe colocar uma barra que cubra toda a classe e cuja altura é igual ou proporcional à frequência (à frequência relativa ou à frequência percentual) da classe.

Apesar das classes poderem, em geral, ter amplitudes ou tamanhos diferentes, vamos, por simplicidade, considerar sempre classes com iguais amplitudes. Um histograma é assim um gráfico idêntico ao gráfico de barras mas em que as barras surgem justapostas, sem qualquer espaço entre elas a não ser que uma das classes consideradas não tenha qualquer efectivo.

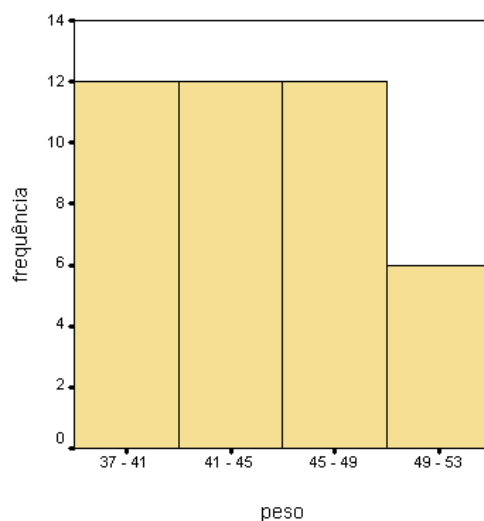
**Exemplo 1.2.2** (cont.) Retomemos os dados relativos ao peso dos ratos diabéticos e façamos a sua representação através dum histograma. Tomando como referência o gráfico de caule-e-folhas executado pelo SPSS para este mesmo conjunto de dados em que foram usados 4 caules, comecemos por dividir os dados em 4 classes. Como as observações variam entre 38 e 52 gramas, vamos considerar as seguintes classes de amplitude 4 gramas:

$]37, 41[$ ,  $[41, 45[$ ,  $[45, 49[$ ,  $[49, 53[$ .

As frequências de cada uma das classes são apresentadas na tabelas de frequências seguinte:

classes	frequência	percentagem
[37, 41[	12	28.6
[41, 45[	12	28.6
[45, 49[	12	28.6
[49, 53]	6	14.3
Total	42	100.1

O histograma produzido pelo SPSS para as classes anteriores tem o aspecto seguinte:

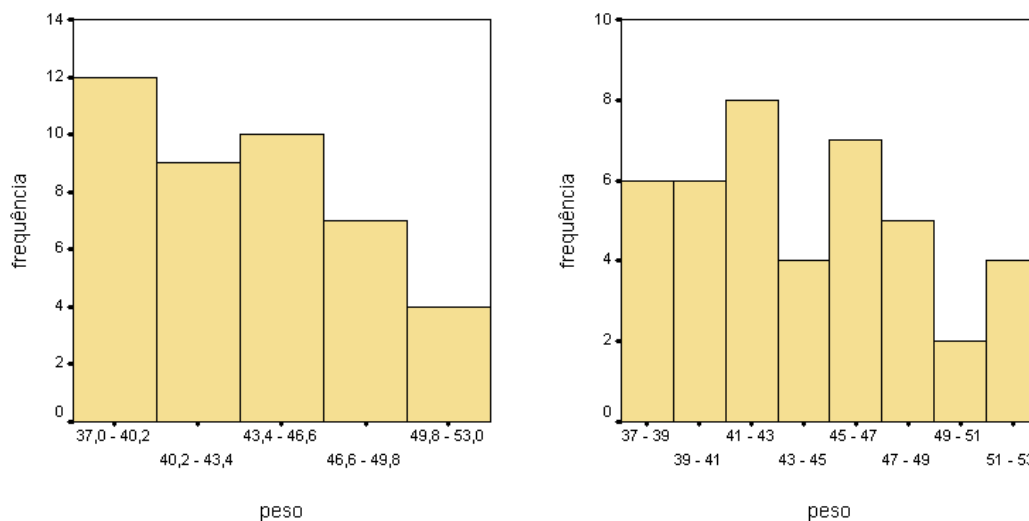


A soma das frequências percentuais (indicadas na tabela anterior por percentagens por simplicidade de linguagem) de todas as classes deveria ser igual a 100%. Tal não acontece devido a **erros de arredondamento**, uma vez que cada uma das percentagens associadas a cada classe, estando arredondada às décimas, introduz um erro na soma. Neste caso particular, 28.6 e 14.3 são aproximações por excesso de  $12/46$  e  $6/42$ , respectivamente. Casos há, em que erros de arredondamento por defeito e por excesso se compensam permitindo obter uma soma de 100. Por exemplo, um arredondamento às centésimas das percentagens de cada classe dá origem a:  $28.57 + 28.57 + 28.57 + 14.29 = 100$ . Reparemos que 28.57 é uma aproximação por defeito de  $12/42$ , enquanto que 14.29 é uma aproximação por excesso de  $6/42$ .

Tal como no gráfico de caule-e-folhas, em que não há uma regra ideal para calcular o número de caules ou semi-caules a considerar, também para o histograma não há nenhuma regra universalmente aceite sobre o número de classes em que devemos dividir as observações. Refira-se no entanto que um número demasiado elevado de classes conduz a um histograma muito irregular com poucas observações em cada classe, enquanto que

um número demasiado pequeno de classes conduz a um histograma demasiado suave com muitas observações em cada classe.

Os gráficos seguintes são histogramas obtidos por divisão das observações em 5 e em 8 classes, respectivamente. Refira-se apenas que o gráfico com 8 classes é o que é feito de forma automática pelo SPSS.



Apesar dos histogramas anteriores descreverem o mesmo conjunto de dados, fica claro que o aspecto do histograma é bastante influenciado pela escolha do número de classes a considerar. Tal influência é maior quando o número de observações é pequeno. Este é o caso do exemplo presente.

De uma forma geral, **quando o número de observações é pequeno, a representação em gráfico de caule-e-folhas revela-se mais informativa do que a representação em histograma.** Quanto mais não seja pelo facto de que num gráfico de caule-e-folhas o valor das observações é incluído no gráfico. Quando comparamos qualquer dos histogramas anteriores com o gráfico de caule-e-folhas construído no Exemplo 1.2.2, constatamos que a observação anterior é particularmente adequada a este exemplo.

Tal como nos gráficos de caule-e-folhas, podemos usar histogramas para comparar duas distribuições de dados. Para ser mais fácil e fiável a comparação dos gráficos respectivos, devemos considerar em ambos intervalos de variação com igual amplitude, quer no eixo dos  $xx$ , quer no eixo dos  $yy$ . Além disso, como a área total das barras que definem o histograma é um aspecto importante na comparação dos dois gráficos, ambos os histogramas devem ter a mesma área total. Para construir histogramas com área total igual a 1, a que chamaremos **histogramas normalizados**, no eixo dos  $yy$  devemos marcar a frequência relativa dividida pela amplitude de cada classe. Os histogramas normalizados são, em particular, importantes quando pretendemos comparar



histogramas obtidos a partir de conjuntos de dados com tamanhos diferentes ou quando a amplitude das classes num dos histogramas não é igual à amplitude das classes no outro histograma.

Reparemos também que num histograma normalizado a frequência relativa dum qualquer das classes que o compõem é igual à **área** da porção do histograma correspondente a essa classe. Duma forma geral, a frequência relativa dum qualquer intervalo que marquemos no eixo dos  $xx$  é aproximadamente igual à área da porção do histograma que tem por base esse intervalo.

Os histogramas produzidos pelo SPSS são, por defeito, histogramas de frequências absolutas. Para obtermos o **histograma normalizado** respectivo, em vez de no eixo dos  $yy$  marcarmos as frequências absolutas, devemos marcar as frequências absolutas divididas por um número designado no SPSS por **factor de escala**. No caso **histograma normalizado** o factor de escala a considerar é dado por:

$$\text{factor de escala} = \text{número de observações} \times \text{amplitude de cada classe.}$$

Quando a amplitude das classe nos histogramas que pretendemos comparar é a mesma, podemos optar por construir **histogramas de frequências relativas ou de frequências percentuais**, isto é, no eixo dos  $yy$  é marcada a frequência relativa ou a frequência percentual, respectivamente. Apesar destes histogramas poderem ter áreas diferentes de 1, as áreas dos histogramas correspondentes a cada um dos conjuntos de dados são as mesmas.

Para obtermos um **histograma de frequências relativas** no SPSS, devemos tomar:

$$\text{factor de escala} = \text{número de observações.}$$

Para obtermos um **histograma de frequências percentuais** no SPSS, devemos tomar:

$$\text{factor de escala} = \text{número de observações}/100.$$

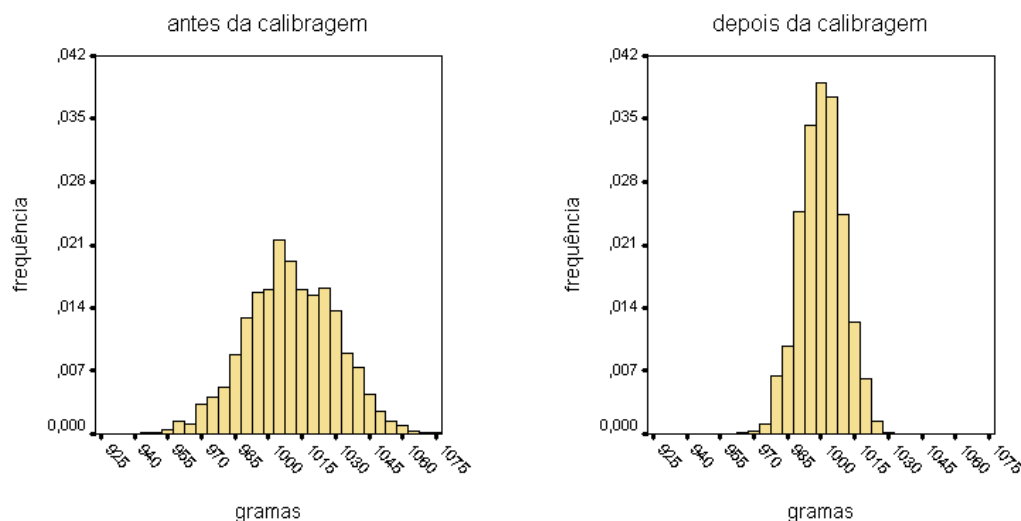
### 1.2.3 Características gráficas mais relevantes

A representação gráfica dum variável não é um fim em si mesma. Ela tem como objectivo primeiro a compreensão da distribuição dessa variável, ou seja, a compreensão dos dados. Algumas características importantes dessa distribuição são, por exemplo,

a **forma**, o **centro**, a **dispersão** ou **variabilidade** e a presença de **observações discordantes**.

Relativamente ao **centro** e à **dispersão** da distribuição, veremos na próxima secção como caracterizá-los numericamente. Por agora, fiquemos com a ideia que o **centro da distribuição** pode ser descrito pelo seu ponto médio, isto é, um valor abaixo do qual estão metade das observações e acima do qual está a outra metade. A **dispersão** ou **variabilidade da distribuição** pode ser descrita pela distância entre a mais pequena e a maior das observações.

**Exemplo 1.2.4** Para ilustrar graficamente estes dois conceitos, consideremos os histogramas normalizados seguintes relativos à distribuição dos pesos (em gramas) de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina antes e depois de ter sido calibrada (em cada uma das situações foram recolhidas amostras de dimensão 1130). Para ser mais fácil e fiável a comparação dos dois gráficos, considerámos em ambos o mesmo intervalo de variação para o peso e o mesmo intervalo no eixo dos  $yy$ .

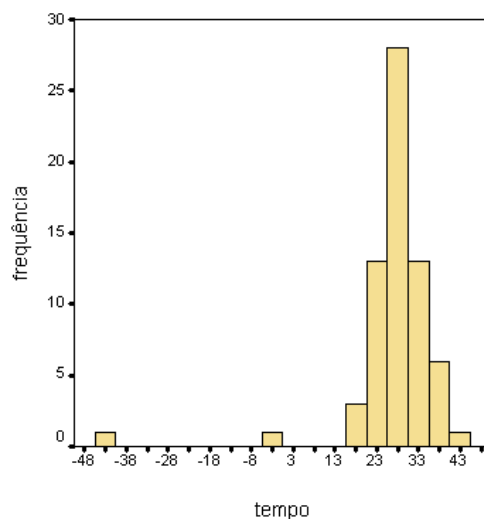


Estes gráficos revelam que o centro da distribuição do peso dos pacotes de açúcar antes da calibragem da máquina estava acima dos 1000 gramas (peso indicado no rótulo dos pacotes). Dizemos, por isso, que há um **enviesamento**, neste caso por excesso, relativamente ao peso de referência. Este enviesamento parece ter sido corrigido com a calibragem da máquina. Por outro lado, é claro também que o segundo gráfico revela uma menor dispersão dos pesos dos pacotes produzidos depois da calibragem, indicando uma maior precisão da máquina.

Como já referimos, além do centro e da dispersão duma distribuição, outra característica importante duma distribuição que pode ser analisada a partir dum gráfico de

caule-e-folhas ou dum histograma, é a identificação de **observações discordantes**, isto é, observações suspeitas de não seguirem o padrão revelado pelas restantes observações. Na próxima secção daremos uma regra numérica que nos permite identificar observações discordantes. Por agora, no que respeita à sua detecção gráfica, é relevante o facto destas observações serem caracterizadas por serem excepcionalmente grandes ou pequenas relativamente às restantes observações.

**Exemplo 1.2.5** O conjunto de dados que consideramos para ilustrar a presença de observações discordantes, é relativo a 66 medições feitas por Newcomb em 1882 para estimar a velocidade da luz (*in* Moore e McCabe, 2003, pág. 8). Mais precisamente, Newcomb mediu o tempo, expresso numa apropriada unidade de medida, que a luz levou a percorrer 7400 metros. No histograma seguinte, que resume as observações feitas, sobressaem as duas observações mais à esquerda que podemos considerar tratar-se de observações discordantes.



Pretendendo apresentar uma aproximação para a velocidade da luz, surge de forma natural a ideia de considerar a média das observações realizadas. A média das 66 observações é 26.21. Newcomb decidiu considerar a mais pequena das observações como discordante, não a tendo incluído no cálculo da média. A média das restantes 65 observações é 27.29. É clara a **influência** que, por si só, esta observação tem no cálculo da média. Este facto foi talvez a principal razão para que ela tenha sido excluída.

Finalmente, falemos da **forma da distribuição** que não é mais do que a forma ou padrão revelados pelo histograma ou pelo gráfico de caule-e-folhas respectivos. No caso deste último, estamos a admitir que o rodamos 90 graus no sentido contrário dos ponteiros do relógio. A distribuição pode ser aproximadamente **simétrica** quando os

gráficos são aproximadamente simétricos relativamente ao centro da distribuição, ou **assimétrica** quando uma das “caudas” dos gráficos é muito maior do que a outra. No caso da cauda direita (valores grandes) ser muito maior do que a esquerda (valores pequenos), dizemos que temos uma **assimetria positiva**. Quando é a cauda esquerda que é mais longa que a direita, diremos que ocorre uma **assimetria negativa**.

Exemplos de distribuições simétricas são-nos dados nas figuras do Exemplo 1.2.4. Além de simétricas estas distribuições têm uma forma aproximada de “sino”. A mesma forma tem a distribuição dos dados do Exemplo 1.2.2, cujo gráfico de caule-e-folhas apresentamos a seguir rodado de 90 graus em sentido contrário aos ponteiros do relógio:

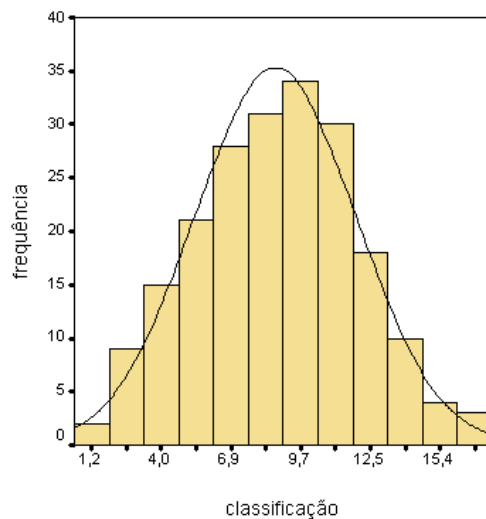
```

peso Stem-and-Leaf Plot
Frequency  Stem & Leaf
          3 .  888888899
          4 .  0000111222223444
          4 .  55556667888899
          5 .  1122

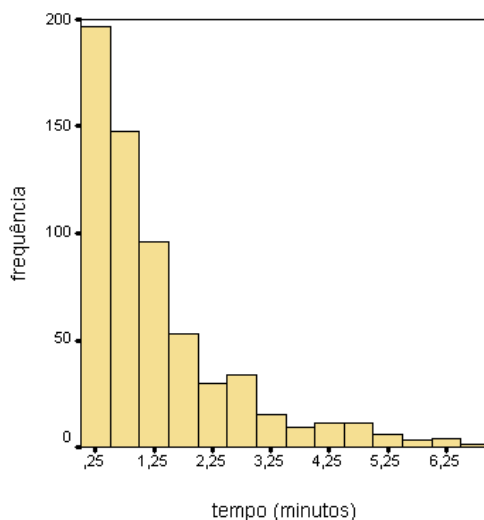
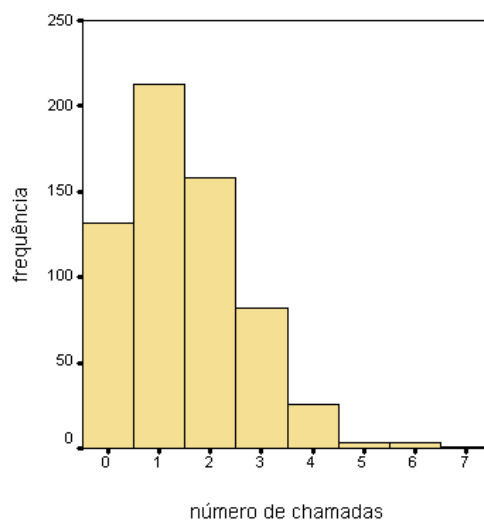
Stem width:      10
Each leaf:       1 case(s)

```

**Exemplo 1.2.6** Aproximadamente simétrica é também a distribuição das classificações obtidas por 205 alunos numa frequência de Análise Matemática:

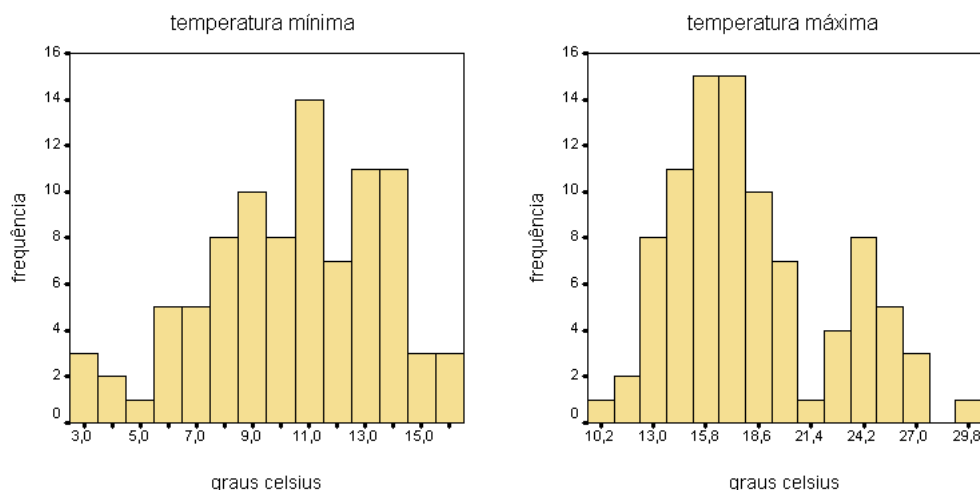


**Exemplo 1.2.7** Assimetrias marcadas são reveladas pela distribuição do número de chamadas telefónicas por minuto que chegam a uma central telefónica dum determinado serviço público, ou pela distribuição do tempo (em minutos) que medeia a chegada de dois clientes consecutivos a uma caixa dum hipermercado. Dos gráficos seguinte constatamos que tais distribuições são positivamente assimétricas.



Uma característica comum a todas as distribuições anteriores é a dos gráficos respectivos terem um único “pico” ou **moda**. Tais distribuições são por isso ditas **unimodais**. A moda corresponde à observação ou a uma zona de observações mais frequentes. No exemplo seguinte encontramos uma distribuição com duas modas, dita por isso **bimodal**.

**Exemplo 1.2.8** Nos histogramas seguintes descrevem-se as distribuições das temperaturas mínima e máxima ocorridas em Coimbra no Outono de 2000 (dados do Instituto Geofísico da UC). A distribuição da temperatura mínima revela uma assimetria negativa, enquanto que a da temperatura máxima é claramente bimodal.



## 1.3 Características numéricas duma distribuição

Na secção anterior, estudámos formas de resumir graficamente a distribuição duma variável quantitativa. Nesse contexto falámos do **centro** e da **dispersão** duma distribuição. Nesta secção vamos estudar medidas do centro e da dispersão ou variabilidade duma distribuição. Tal como os gráficos, estes resumos numéricos são muito importantes na descrição e interpretação dum conjunto de dados.

### 1.3.1 Medidas de tendência central

A **média** é a medida mais utilizada do centro duma distribuição. Se denotarmos por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  os  $n$  valores observados, a média respectiva não é mais do que a soma de todos esses valores dividida pelo número total de observações. A média denota-se por  $\bar{x}$  e, de acordo com a definição anterior, é calculada a partir da fórmula seguinte onde o símbolo  $\sum x_i$  representa a soma de todos os valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

O cálculo da média só é simples de ser executado sem auxílio dum computador quando número de observações é pequeno, ou quando, sendo grande, o número de

observações distintas é pequeno. Neste último caso, se denotarmos por  $y_1, y_2, \dots, y_k$  os valores distintos que ocorrem em  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , e por  $n_1, n_2, \dots, n_k$  o número de vezes que cada um desses valores ocorre, a fórmula anterior para o cálculo da média reduz-se a

**Cálculo da média:**

$$\bar{x} = \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_k y_k}{n} = \frac{\sum n_i y_i}{n}.$$

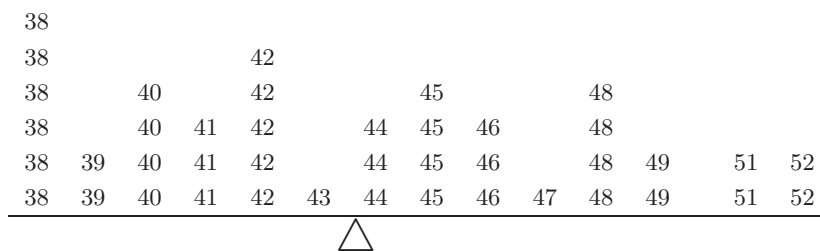
**Exemplo 1.3.1** Retomemos os dados relativos ao peso dos ratos diabéticos apresentados no Exemplo 1.2.2 (pág. 18). Neste conjunto de 42 observações surgem várias observações repetidas. Neste caso, o cálculo da média é simples de ser executado a partir da tabela de frequências da variável peso

$y_i$	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	51	52	$\Sigma$
$n_i$	6	2	4	3	5	1	3	4	3	1	4	2	2	2	42
$y_i n_i$	228	78	160	123	210	43	132	180	138	47	192	98	102	104	1835

Utilizando a segunda das fórmulas anteriores, obtemos

$$\bar{x} = \frac{6 \times 38 + 2 \times 39 + \dots + 2 \times 52}{42} = \frac{1835}{42} \approx 43.690.$$

A média pode ser interpretada geometricamente de forma simples. Lançando mão das observações anteriores, imaginemos que as colocamos sobre uma barra graduada. A média  $\bar{x}$  é o ponto da barra que a mantém em equilíbrio.



Se em vez das observações tivermos acesso ao respectivo histograma, podemos também dizer que a média é o ponto do eixo dos  $xx$  que mantém a “figura em equilíbrio”.

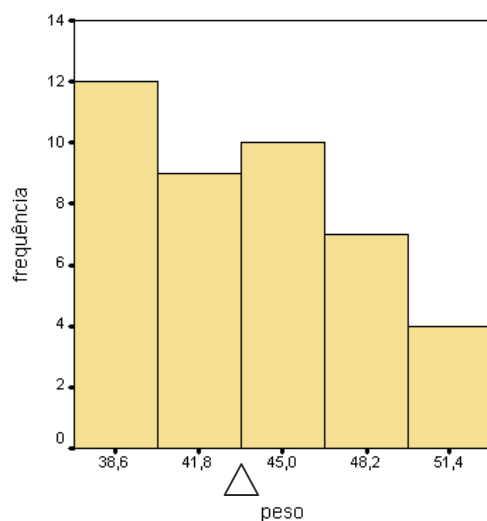


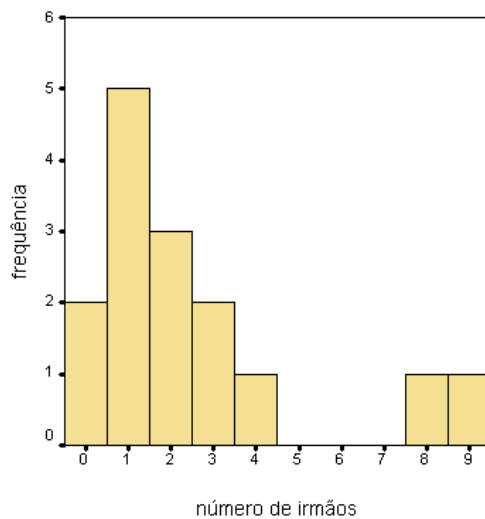
Figura 1.3.2: Localização gráfica da média

A média é uma boa medida do centro da distribuição quando esta é simétrica. No entanto, como vimos no Exemplo 1.2.5, a média é muito sensível à presença no conjunto das observações de valores muito grandes ou muito pequenos. Dizemos então que a média é uma medida pouco **resistente** ou **robusta** do centro da distribuição.

No exemplo seguinte, este facto é mais uma vez realçado.

**Exemplo 1.3.3** Os valores seguintes dizem respeito ao número de irmãos de cada um dos 15 alunos duma turma (*in* Martins e Cerveira, 2000, pág. 85):

1, 2, 0, 1, 0, 4, 1, 3, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 9





Tendo em conta o que dissemos atrás, e sendo as observações 8 e 9 significativamente maiores que as restantes, antes de efectuarmos qualquer cálculo devemos certificar-nos se se tratam, ou não, de observações discordantes. Devemos por isso confirmar estes valores.

Admitindo que os valores são verdadeiros, surge o problema de saber se na presença de tais observações num conjunto de dados tão pequeno, a média é ainda uma boa medida do centro da distribuição. A média das 15 observações é igual  $38/15 \approx 2.53$ . Dizer que os alunos da turma têm em média 2.53 irmãos, isto é, mais de dois irmãos, parece distorcer a realidade pois dos 15 alunos apenas 5 têm mais de 2 irmãos. A presença das observações 8 e 9 faz deslocar a média para a direita de forma muito significativa. Com efeito, se em vez das observações 8 e 9 tivessem sido observados os valores 3 e 4, por exemplo, a média seria igual a  $28/15 \approx 1.87$ . Nesse caso, para descrever o centro da distribuição talvez seja preferível usar uma medida do centro da distribuição que não seja tão sensível a valores muito grandes ou muito pequenos.

A **não robustez** da **média** como medida do centro da distribuição, é uma propriedade negativa da média. Para contornar esta dificuldade, uma outra medida do centro da distribuição é utilizada em alternativa à média. Trata-se da **mediana**. A **mediana** é o **ponto médio** da distribuição, isto é, é um valor tal que metade das observações são menores ou iguais a ele e a outra metade são maiores ou iguais a ele. A mediana é habitualmente representada pela letra  $M$ .

#### Cálculo da mediana:

- ⊙ ordenar as observações da mais pequena para a maior;
- ⊙ se o número  $n$  de observações é ímpar, a mediana é a observação que está no centro da lista das observações ordenadas; a mediana está assim colocada na posição  $(n + 1)/2 = n/2 + 1/2$  dessa lista;
- ⊙ se o número  $n$  de observações é par, a mediana é a média das duas observações que estão no centro da lista das observações ordenadas; como estas observações estão colocadas nas posições  $n/2$  e  $n/2 + 1$  da lista, dizemos que a mediana está colocada na posição  $n/2 + 1/2 = (n + 1)/2$  dessa lista.

Reparemos que quando o número  $n$  de observações é par, o número  $(n + 1)/2$  é sempre um número fraccionário. Dizer que a mediana está colocada na posição  $(n + 1)/2$  da lista das observações ordenadas é apenas uma simplificação de linguagem. O que

queremos efectivamente dizer é que a mediana é a média das duas observações que estão colocadas nas posições  $n/2$  e  $n/2 + 1$  da lista. Como veremos, esta forma de dizer, além da simplificação evidente de linguagem, trará outras vantagens.

**Exemplo 1.3.3** (cont.) Para calcular a mediana das observações

1, 2, 0, 1, 0, 4, 1, 3, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 9

começemos por ordená-las por ordem crescente:

0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 8, 9.

Sendo o número de observações ímpar,  $n = 15$ , a mediana é a observação central, isto é, é a observação colocada na posição  $(15 + 1)/2 = 8$ . Assim  $M = 2$ . Reparemos que, contrariamente à média, se em vez das observações 8 e 9 tivessem sido observados os valores 3 e 4, a mediana anterior não se alterava. O mesmo aconteceria se alguma, ou ambas, das observações 8 ou 9 fosse substituída por uma observação grande, por muito grande que ela fosse. Com efeito, a mediana não é sensível às observações que são muito maiores ou muito menores que as restantes. Por isso, dizemos que **a mediana** é uma **medida robusta** do centro da distribuição.

No exemplo anterior constatámos que a média é superior à mediana. Vimos que tal acontece porque, contrariamente à mediana, a média é muito sensível à presença no conjunto das observações de valores grandes. Em geral, sempre que, tal como para a distribuição do número de irmãos, a distribuição é positivamente assimétrica, a média é maior que a mediana. Por razões análogas, se a distribuição é negativamente assimétrica a média é inferior à mediana. Finalmente, se a distribuição é aproximadamente simétrica, a média e a mediana são valores próximos um do outro.

**Exemplo 1.2.2** (cont., pág. 22) O gráfico de caule-e-folhas e o histograma (ver pág. 19, 23) relativos à distribuição do peso dos ratos, apesar de não revelarem uma simetria clara da distribuição do peso dos ratos, também não revelam uma assimetria marcada, quer negativa, quer positiva, dessa distribuição. Calculemos a mediana da distribuição dos pesos dos ratos, e verifiquemos que, tal como dissemos atrás, obtemos para mediana um valor próximo do peso médio dos ratos que vimos ser igual a  $\bar{x} \approx 43.69$ . Como o número de observações é par,  $n = 42$ , a mediana está colocada na posição  $(42 + 1)/2 = 21.5$  da lista. Como referimos, isto quer dizer que a mediana é a média das observações que estão colocadas nas posições 21 e 22 da lista ordenada das observações. Usando a Tabela 1.3.1 verificamos que tais posições são ocupadas pelas observações 43 e 44.

Assim

$$M = \frac{43 + 44}{2} = 43.5$$

Tal como fizemos para a média, é possível localizar geometricamente a mediana a partir do histograma da distribuição em estudo. A mediana é (aproximadamente) o ponto do eixo dos  $xx$  em que a área da porção do histograma à sua esquerda é igual à área da porção do histograma à sua direita. Num histograma normalizado, como a área total do histograma é igual a 1, cada uma destas áreas vale  $1/2$ .

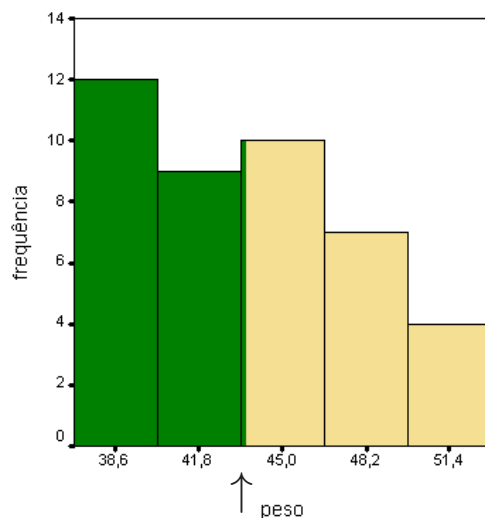


Figura 1.3.4: Localização gráfica da mediana

O exemplo seguinte é também interessante para compreendermos que a média e a mediana, sendo medidas distintas do centro da distribuição, nos dão informações distintas sobre a realidade que se propõem resumir. Como é natural, devemos escolher aquela que mais relevante seja na descrição dessa realidade.

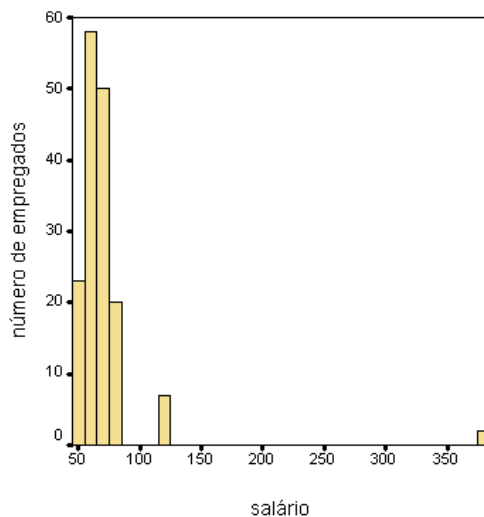
**Exemplo 1.3.5** Os salários (em milhares de escudos) dos 160 empregados dum empresa, distribuem-se de acordo com a seguinte tabela de frequências (*in* Martins e Cerveira, 2000, pág. 92):

Salário	50	60	70	80	120	380
Nº de empregados	23	58	50	20	7	2

Concluimos facilmente que

$$\bar{x} \approx 70.81 \quad \text{e} \quad M = 60.$$

A discrepância evidente entre estas duas medidas do centro da distribuição pode ser facilmente compreendida a partir do histograma de frequências seguinte (porquê?):



Como aproximadamente metade das observações são inferiores ou iguais à mediana, a mediana,  $M = 60$ , exprime o facto de pelo menos metade dos trabalhadores receberem salários inferiores ou iguais a 60 mil escudos. Esta realidade não é traduzida pela média,  $\bar{x} \approx 70.81$ , uma vez que dos 160 trabalhadores, 81 deles têm salários significativamente inferiores a 70.81 mil escudos. Se o nosso objectivo é conhecer a massa salarial global desta empresa, a medida do centro da distribuição que nos interessa é a média, pois a massa salarial global é dada por

$$\text{massa salarial global} = 160 \times \bar{x} \approx 160 \times 70.81 = 11329.6 \text{ (milhares de escudos).}$$

O cálculo da média e da mediana é simples de fazer, sem auxílio de computador, para um conjunto pequeno de observações. Torna-se no entanto impraticável efectuar tal cálculo quando o número de observações é elevado.

**Exemplo 1.3.6** Tal acontece, por exemplo, caso pretendamos calcular a média e a mediana das distribuições dos pesos dos pacotes de açúcar, antes e depois da calibragem da máquina de empacotamento, descritas no Exemplo 1.2.4 (pág. 26). Num e noutro casos temos 1130 observações. Recorrendo ao SPSS obtemos facilmente o quadro seguinte. Tal como referimos a propósito dos gráficos do Exemplo 1.2.4, ambas as medidas, média e mediana, apontam para que o procedimento de calibragem foi executado com sucesso, uma vez que ambas as medidas do centro da distribuição do peso dos pacotes de açúcar depois da calibragem se aproximam do valor de referência de 1000 gramas. De acordo com o que vimos atrás, as médias anteriores são próximas das medianas respectivas uma vez que ambas as distribuições são simétricas.

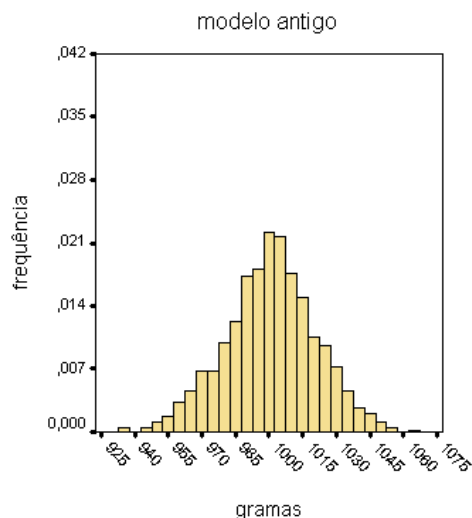
## Descriptives

		Statistic
antes	Mean	1010,06
	Median	1009,24
depois	Mean	1000,24
	Median	1000,28

## 1.3.2 Medidas de dispersão

As duas medidas de localização do centro dum distribuição que estudámos na secção anterior, não nos dão qualquer informação sobre a variabilidade do conjunto das observações.

**Exemplo 1.3.7** Comparemos os histogramas normalizados do Exemplo 1.2.4 com o histograma normalizado seguinte relativo à distribuição do peso de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina dum modelo antigo:



As média e mediana desta distribuição são apresentadas a seguir:

n	1130
Mean	1000,58
Median	1001,05

Apesar das média e medianas anteriores serem próximas das apresentadas no Exemplo 1.3.6 e da forma da distribuição do peso de pacotes de açúcar empacotados pela máquina de modelo antigo ser semelhante à apresentada no Exemplo 1.2.4, é visível que os pesos dos pacotes de açúcar empacotados pela máquina de modelo mais antigo apresentam uma maior variabilidade do que os relativos à máquina mais moderna. Por

outras palavras, a máquina de modelo mais recente é **mais precisa** do que a de modelo mais antigo.

As medidas de localização, apesar de fundamentais para a compreensão da distribuição dos dados, não nos dão, por si só, um resumo adequado do conjunto das observações. Esse resumo numérico pode ser enriquecido se à medida do centro da distribuição juntarmos uma medida da variabilidade dos dados. Neste parágrafo estudamos **medidas da variabilidade** dum conjunto de dados, ditas também **medidas de dispersão**.

O **desvio-padrão** é uma das medidas de dispersão ou variabilidade mais utilizadas. O **desvio-padrão** mede essa variabilidade relativamente à média  $\bar{x}$  do conjunto das observações em causa. Por outras palavras, o **desvio-padrão** dá-nos informação de quão afastadas da média estão as observações. A sua utilização restringe-se, por isso, ao caso em que a média tenha sido escolhida como medida do centro da distribuição.

Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são os  $n$  valores observados, o seu **desvio-padrão** denota-se por  $s$  e é definido por

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Por vezes utiliza-se o quadrado do desvio-padrão, a que chamamos **variância**, como medida da variabilidade do conjunto das observações. Reparemos que contrariamente à variância, o **desvio-padrão** vem expresso nas mesmas unidades que os dados iniciais. Por exemplo, se as observações  $x_i$  são expressas em metros, o desvio-padrão vem expresso em metros, enquanto que a variância vem expressa em metros quadrados.

A **variância** denota-se por  $s^2$  e, de acordo com a definição anterior, é dada por

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Reparemos que as observações mais afastadas da média contribuem mais para o desvio-padrão (e também para a variância) do que observações próximas da média.

**Exemplo 1.3.7** Não será assim de estranhar que o desvio-padrão dos dados descritos pelos histogramas do Exemplo 1.2.4 seja inferior ao dos dados descritos no Exemplo 1.3.7:

	modelo moderno	modelo antigo
n	1130	1130
Std. Deviation	9,573	20,305

Quando pretendemos efectuar o cálculo do desvio-padrão sem auxílio dum computador, a fórmula anterior não é a mais adequada para o efeito. Em vez dela deve ser usada a fórmula seguinte:

**Cálculo do desvio-padrão:**

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}{n - 1}}.$$

Tal como para média, o cálculo do desvio-padrão só é simples de ser executado sem auxílio dum computador quando número de observações é pequeno, ou quando, sendo grande, o número de valores distintos é pequeno. Neste último caso, se denotarmos por  $y_1, y_2, \dots, y_k$  os valores distintos que ocorrem em  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , e por  $n_1, n_2, \dots, n_k$  a frequência absoluta de cada um desses valores, a fórmula anterior para o cálculo do desvio-padrão reduz-se a:

**Cálculo do desvio-padrão:**

$$s = \sqrt{\frac{\sum n_i y_i^2 - n \bar{x}^2}{n - 1}}.$$

**Exemplo 1.3.8** Retomemos os dados relativos ao peso dos ratos diabéticos do Exemplo 1.2.2 (pág. 18). Como neste conjunto de 42 observações surgem várias observações repetidas, o cálculo do desvio-padrão é simples de ser executado, a partir da tabela de frequências da variável peso, utilizando a última das fórmulas anteriores.

Obtemos então:

$$s = \sqrt{\frac{80911 - 42 \times (1835/42)^2}{42 - 1}} \approx 4.245.$$

Reparemos que em vez do valor 43.69 anteriormente obtido para a média, estamos a utilizar na fórmula anterior o verdadeiro valor da média. Deste modo, evitamos

$y_i$	$n_i$	$y_i n_i$	$y_i^2$	$n_i y_i^2$
38	6	228	1444	8664
39	2	78	1521	3042
40	4	160	1600	6400
41	3	123	1681	5043
42	5	210	1764	8820
43	1	43	1849	1849
44	3	132	1936	5808
45	4	180	2025	8100
46	3	138	2116	6348
47	1	47	2209	2209
48	4	192	2304	9216
49	2	98	2401	4802
51	2	102	2601	5202
52	2	104	2704	5408
$\Sigma$	42	1835	28155	80911

que o erro de arredondamento que o valor 43.69 comporta se propague ao cálculo do desvio-padrão:

$$\sqrt{\frac{80911 - 42 \times (43.69)^2}{42 - 1}} \approx 4.250.$$

Como já referimos no início do parágrafo 1.2.3, a dispersão de uma distribuição pode também ser medida pela diferença entre a maior e a menor observação. Ao valor obtido pela diferença entre os valores **máximo** e o **mínimo** do conjunto das observações chamamos **amplitude**, e vamos denotá-la por  $A$ :

$$A = \text{máximo} - \text{mínimo}.$$

Por razões análogas às avançadas a propósito da média, o desvio-padrão é uma medida de dispersão pouco robusta. Da definição de amplitude que acabámos de dar, é claro que também a amplitude é uma medida pouco robusta pois o máximo e o mínimo são muito sensíveis à presença de valores, respectivamente, muito grandes ou muito pequenos, no conjunto de dados. Em particular, a amplitude não deve ser usada para comparar a dispersão de dois conjuntos de dados a não ser que tenham a mesma dimensão, uma vez que a amplitude tende a aumentar à medida que a dimensão da amostra aumenta.

Uma medida de dispersão mais robusta do que as anteriores é a **amplitude interquartil**. Para o seu cálculo é necessário obter os **primeiro e terceiro quartis** do conjunto das observações.

Os **quartis**, que denotamos por  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , são quantidades numéricas caracterizadas pelo facto de 25%, 50% e 75% das observações, respectivamente, serem menores



ou iguais a elas. De acordo com a definição de **mediana**, concluímos que o **segundo quartil** é precisamente a mediana. Por vezes  $Q_1$ ,  $Q_2 = M$  e  $Q_3$  são também referidos como sendo **percentis** de ordens 25, 50 e 75, respectivamente. Com efeito, sendo  $p$  um número maior que 0 e inferior a 100, o **percentil de ordem  $p$**  é caracterizado pelo facto de  $p\%$  das observações serem menores ou iguais a ele.

Como já referimos, para o cálculo da amplitude interquartil precisamos de calcular os quartis  $Q_1$  e  $Q_3$ . Vejamos agora como proceder:

**Cálculo dos quartis  $Q_1$  e  $Q_3$ :**

- ⊙ ordenar as observações da mais pequena para a maior;
- ⊙ calcular a posição da mediana  $M$  na lista ordenada das observações;
- ⊙ o primeiro quartil,  $Q_1$ , é a mediana das **observações** cujas posições, na lista ordenada das observações, são inferiores ou iguais à posição de  $M$ ;
- ⊙ o terceiro quartil,  $Q_3$ , é a mediana das **observações** cujas posições, na lista ordenada das observações, são superiores ou iguais à posição de  $M$ .

De forma análoga ao que fizemos para a mediana, podemos verificar que o primeiro e o terceiro quartis são pouco sensíveis à presença nos dados de observações muito grandes ou muito pequenas em comparação com as restantes observações.

**Exemplo 1.3.9** Calculemos os quartis  $Q_1$  e  $Q_3$  do seguinte conjunto de dados:

10, 10, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 17, 18.

Como temos 14 observações, a mediana está colocada na posição  $(14 + 1)/2 = 7.5$ . O primeiro quartil é então a mediana das observações colocadas nas posições 1, 2, ..., 7: 10, 10, 11, 12, 12, 13, 13. Assim  $Q_1 = 12$ . De forma análoga  $Q_3 = 16$ , pois 16 é a mediana das observações colocadas nas posições 8, 9, ..., 13, 14: 13, 14, ..., 17, 18.

Para as observações

10, 10, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 17,

a mediana está colocada na posição  $(13 + 1)/2 = 7$ . O primeiro quartil é então a mediana das observações colocadas nas posições 1, 2, ..., 7: 10, 10, 11, 12, 12, 13, 13. Assim  $Q_1 = 12$ . De forma análoga  $Q_3$  é a mediana das observações colocadas nas posições 7, 8, ..., 12, 13: 13, 13, ..., 17, 17. Assim  $Q_3 = 15$ .

Estamos agora em condições de definir a amplitude interquartil, que vamos denotar por  $AIQ$ . A **amplitude interquartil** é a diferença entre os terceiro e primeiro quartis:

$$AIQ = Q_3 - Q_1.$$

A robustez desta medida de dispersão é consequência da robustez dos primeiro e terceiro quartis.

A amplitude interquartil intervém na regra habitualmente utilizada para identificar observações discordantes. Como exemplificaremos mais à frente, as observações identificadas pela regra seguinte não são necessariamente falsas observações ou observações mal registadas. Tal é em particular verdade quando a distribuição é bastante assimétrica. Neste caso, a regra seguinte identifica com frequência observações na parte direita do conjunto de dados quando a distribuição é positivamente assimétrica, ou na parte esquerda do conjunto de dados quando a distribuição é negativamente assimétrica.

**Regra para a identificação de observações discordantes:**

Uma observação é considerada discordante se estiver fora do intervalo

$$[Q_1 - 1.5 \times AIQ, Q_3 + 1.5 \times AIQ].$$

**Exemplo 1.3.10** No segundo dos gráficos de caule-e-folhas apresentados no Exemplo 1.2.3 relativo ao do grupo experimental (pág. 21), a observação 313 é, como vimos, considerada discordante. Confirmemos este facto a partir da regra anterior. Os primeiro e terceiro quartis da distribuição dos pesos são dados por  $Q_1 = 384$  e  $Q_3 = 429$ . Como  $AIQ = 429 - 384 = 45$ , as observações inferiores a  $384 - 1.5 \times 45 = 316.5$  e superiores a  $429 + 1.5 \times 45 = 496.5$  são discordantes. Como podemos confirmar a partir dos dados do Exemplo 1.2.3 (pág. 20), apenas a observação 313 está nestas condições.

Para o cálculo da mediana, começámos por calcular a sua posição na lista ordenada das observações. Podemos proceder de igual modo no cálculo dos quartis. Das regras anteriores para o cálculo de  $Q_1$  e  $Q_3$  deduz-se que sendo  $p$  o número de observações usadas para calcular  $Q_1$ , a **posição de  $Q_1$**  na lista ordenada das observações é  $(p+1)/2$ . De forma análoga, como  $p$  é também o número de observações usadas para calcular  $Q_3$ , começando agora a contar da maior para a menor observação a **posição de  $Q_3$**  é também  $(p+1)/2$ .

**Exemplo 1.3.8** (cont., pág. 39) Retomemos os dados relativos ao peso dos ratos diabéticos. Calculemos  $Q_1$  e  $Q_3$ , começando pela determinação das suas posições na lista ordenada de todas as observações. Sendo 42 o número total de observações, as 21 primeiras intervêm no cálculo de  $Q_1$  e as últimas 21 intervêm no cálculo de  $Q_3$ . Assim, como a posição de  $Q_1$  na lista ordenada das observações, é  $(21 + 1)/2 = 11$ , usando a tabela de frequências apresentada no Exemplo 1.3.8, concluímos que  $Q_1 = 40$  e  $Q_3 = 47$ . A amplitude interquartil é igual a  $AIQ = 47 - 40 = 7$ . Neste caso  $Q_1 - 1.5 \times AIQ = 40 - 1.5 \times 7 = 29.5$  e  $Q_3 + 1.5 \times AIQ = 47 + 1.5 \times 7 = 57.5$ , o que significa que nenhuma observação é discordante.

Notemos que tal como fizemos para a mediana, os quartis podem ser aproximadamente localizados a partir dum histograma (ver figura seguinte).  $Q_1$  e  $Q_3$  são (aproximadamente) os pontos do eixo dos  $xx$  em que a área da porção do histograma à sua esquerda é igual a  $1/4$  e  $3/4$ , respectivamente, da área total. Num histograma normalizado, como a área total do histograma é igual a 1, cada uma destas áreas vale exactamente  $1/4$  e  $3/4$ , respectivamente.

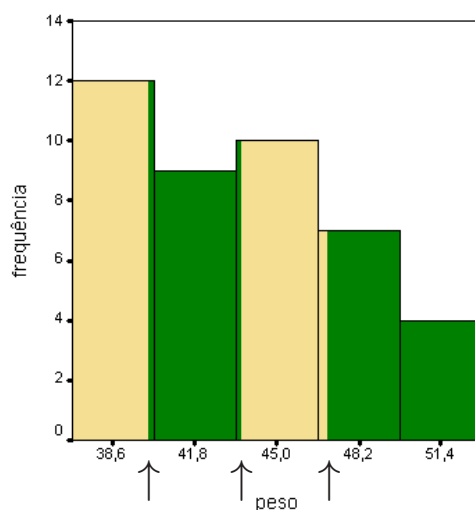


Figura 1.3.11: Localização gráfica dos quartis

O cálculo dos quartis pode ser feito utilizando regras ligeiramente diferentes das que demos atrás. Tal acontece com o SPSS, que apresenta duas regras para efectuar um tal cálculo. Relativamente aos dados anteriores obtemos:

		Percentiles		
		25	50	75
Weighted Average(Definition 1)	peso	40,00	43,50	47,25
Tukey's Hinges	peso	40,00	43,50	47,00

A regra de Tukey é a regra por nós apresentada. Como podemos confirmar pela tabela seguinte, o SPSS usa os valores da primeira linha do quadro anterior para calcular a amplitude interquartil, o que conduz a um valor diferente do que calculámos.

		Statistic
peso	Mean	43,69
	Median	43,50
	Variance	18,024
	Std. Deviation	4,245
	Minimum	38
	Maximum	52
	Range	14
	Interquartile Range	7,25

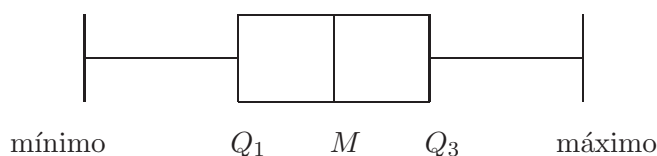
### 1.3.3 Gráfico de extremos-e-quartis

Decorre das definições anteriores, que o primeiro quartil, a mediana e o terceiro quartil, dividem o conjunto das observações em quatro partes, cada uma das quais contendo, aproximadamente, 25% das observações. Esquemáticamente:



Estes números, ditos **cinco números de resumo numa distribuição**, dão-nos uma informação bastante completa sobre a distribuição subjacente aos dados: a mediana descreve o centro da distribuição; os quartis descrevem a variabilidade da metade central da distribuição; o mínimo e o máximo descrevem a variabilidade de todo o conjunto dos dados.

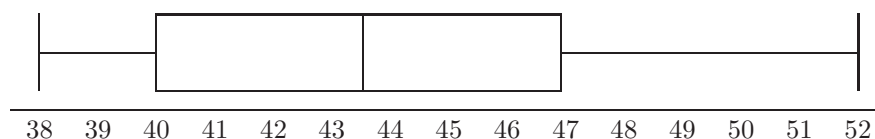
Estes cinco números de resumo dão origem a uma representação gráfica bastante interessante. Trata-se do **gráfico de extremos-e-quartis** que tem o aspecto seguinte:



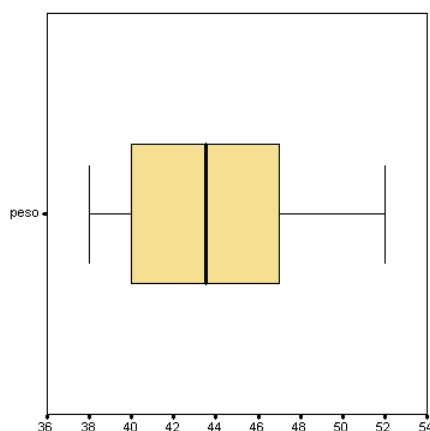
**Exemplo 1.3.12** Vimos no Exemplo 1.3.8 (pág. 43) que os cinco números de resumo da distribuição do peso dos ratos são dados por:

$$\text{mínimo} = 38, \quad Q_1 = 40, \quad M = 43.5, \quad Q_3 = 47, \quad \text{máximo} = 52.$$

O gráfico de extremos-e-quartis correspondente é dado por



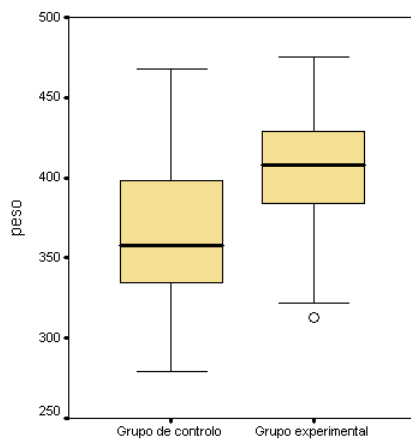
Para esta distribuição, o SPSS produz o seguinte gráfico de extremos-e-quartis:



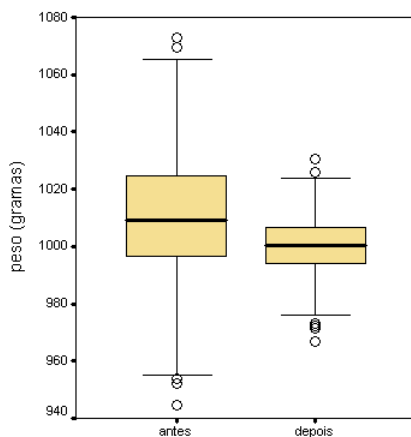
Os números de resumo, máximo e mínimo, incluídos na representação em gráfico de extremos-e-quartis, são muito sensíveis à presença nos dados de observações discordantes. Para que o aspecto do gráfico não dependa em demasia destas observações, é habitual que as barras exteriores do gráfico sejam marcadas, não no máximo ou no mínimo, mas sim, na menor e na maior observação não discordante. Neste **gráfico de extremos-e-quartis** modificado, as observações discordantes são representadas individualmente (podemos também optar por não as marcar).

Os gráficos de extremos-e-quartis são também de extrema importância na comparação de várias distribuições.

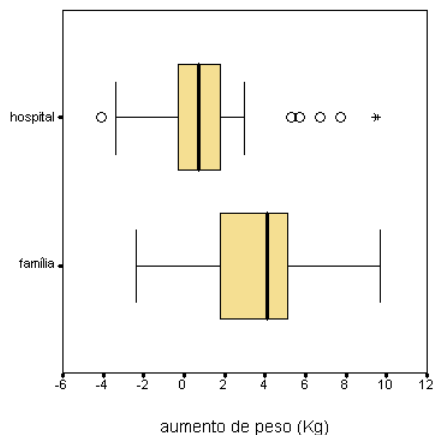
**Exemplo 1.3.13** Ilustremos estes factos apresentando na figura seguinte os **gráficos de extremos-e-quartis paralelos** correspondentes ao grupo de controlo e ao grupo experimental do Exemplo 1.2.3 (pág. 20). Reparemos no gráfico respeitante ao grupo experimental em que a observação discordante é marcada individualmente. A conclusão tirada a partir dos gráficos de caule-e-folhas paralelos (ver pág. 22) de que há boas razões para concluir que a nova farinha é preferível à antiga, é agora reforçada. Reparemos que não só a mediana do grupo experimental é superior à mediana do grupo de controlo, como a dispersão do grupo experimental é inferior à do grupo de controlo (porquê?).



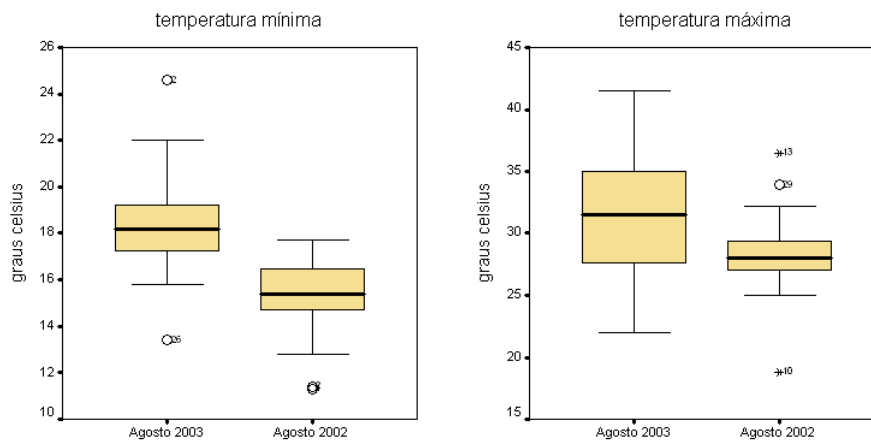
**Exemplo 1.3.14** Apresentamos de seguida os gráfico de extremos-e-quartis paralelos relativos à distribuição dos pesos (em gramas) de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina antes e depois de ter sido calibrada, cujos histogramas apresentámos no Exemplo 1.2.4 (pág. 26). As conclusões retiradas a partir dos gráficos aí apresentados, são análogas às que podemos tirar dos gráficos seguintes.



**Exemplo 1.3.15** Na Tabela 0.2.2 (pág. 4) apresentámos os pesos, em quilogramas, de dois grupos de jovens anoréxicas, no início do tratamento e passado quatro semanas. Um grupo recebe o tratamento em internamento hospitalar na companhia dum familiar e o outro recebe o tratamento residindo com a família. Os gráficos de extremos-e-quartis paralelos, por grupo de tratamento, para a distribuição das diferenças de peso verificadas (final-inicial), indiciam que, para os grupos de estudo considerados, o tratamento produziu mais efeito quando a doente continuou a residir com a família.



**Exemplo 1.3.16** Os gráficos de extremos-e-quartis seguintes relativos às temperaturas máximas e mínimas ocorridas em Coimbra nos meses de Agosto de 2002 e 2003, revela que o mês de Agosto de 2003 foi muito mais quente do que o de 2002.



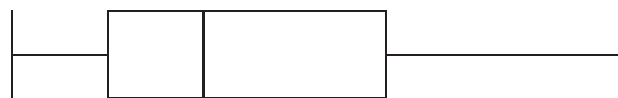
Os gráficos de extremos-e-quartis são também úteis na descrição da forma da distribuição. Para distribuições simétricas, assimétricas negativas e assimétricas positivas, é o seguinte o aspecto dos gráficos de extremos-e-quartis correspondentes:



Distribuição simétrica

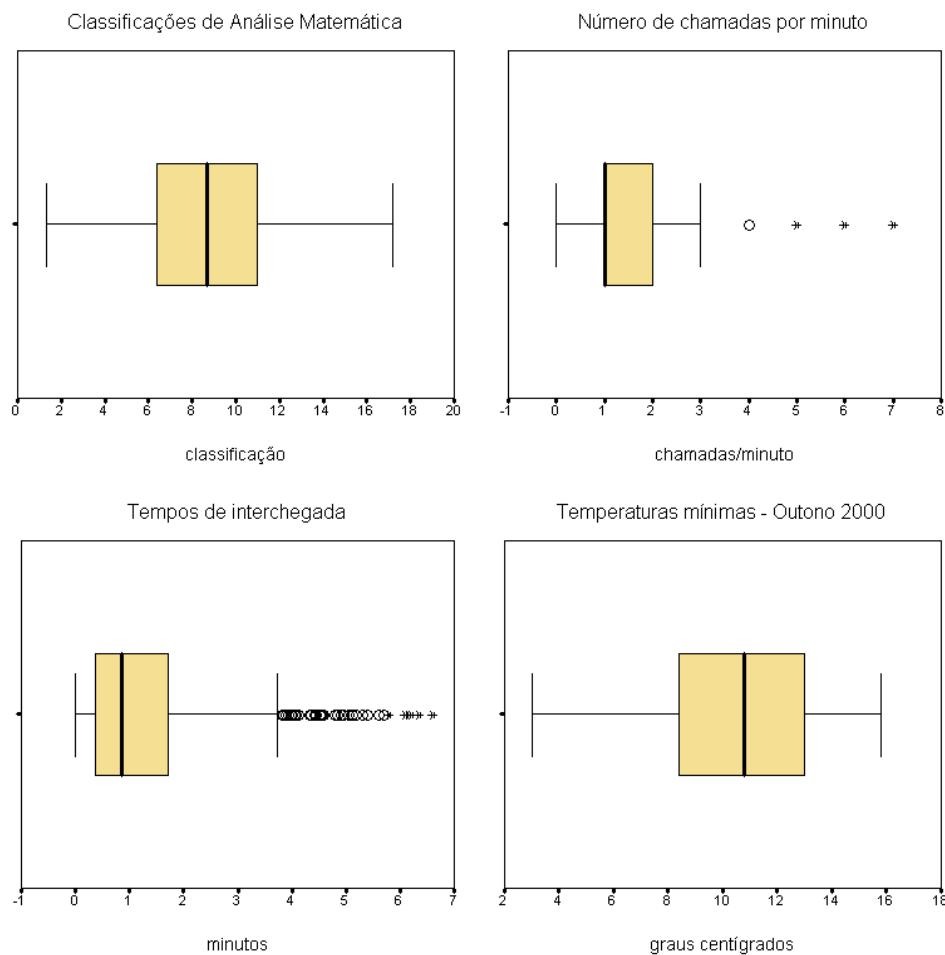


Distribuição assimétrica negativa



Distribuição assimétrica positiva

Os gráficos de extremos-e-quartis seguintes, são relativos às distribuições descritas nos Exemplos 1.2.6, 1.2.7 e 1.2.8. No primeiro caso a distribuição é simétrica, enquanto que nos dois casos seguintes as distribuições revelam uma assimetria positiva forte. No último caso, a distribuição é negativamente assimétrica.



## 1.4 Alteração da unidade de medida

Quando na observação de determinada característica dos indivíduos em estudo efectuamos uma medição, essa medição pode habitualmente ser registada em diferentes unidades.



No Exemplo 1.2.4, o peso dos pacotes de açúcar foi registado em **gramas** mas poderia ter sido registado em **quilogramas** ou em **libras**. No registo de temperaturas, estas podem ser registadas em **graus Fahrenheit** ou, mais habitualmente, em **graus Celsius** ou **centígrados**. Na medição de distâncias, os europeus continentais utilizam o **quilómetro** enquanto que os britânicos e americanos utilizam a **milha**. Os americanos utilizam o **galão** como medida para líquidos enquanto que nós utilizamos o **litro**.

Em todas estas situações, para um mesmo indivíduo  $i$ , os dois valores  $x_i$  e  $y_i$  registados, correspondentes a unidades diferentes de medida, estão relacionados através duma relação do tipo

$$y_i = a x_i + b,$$

para determinados valores reais  $a > 0$  e  $b$ . Esta relação exprime a **alteração da unidade de medida** verificada. Dizemos que os valores originais  $x_i$  foram transformados nos novos valores  $y_i$  através duma **transformação linear**.

**Exemplo 1.4.1** Se  $x_i$  representar o peso em gramas e  $y_i$  o peso em quilogramas sabemos que

$$y_i = \frac{x_i}{1000}.$$

Se  $x_i$  representar o peso em quilogramas e  $y_i$  o peso em libras, então

$$y_i = 2.2046 x_i.$$

No primeiro caso  $a = 1/1000$  enquanto que no segundo  $a = 2.2046$ . Em ambos os casos  $b = 0$ .

**Exemplo 1.4.2** Se  $x_i$  for a temperatura em graus Fahrenheit, a temperatura em graus Celsius é dada por

$$y_i = \frac{5}{9} (x_i - 32).$$

Neste caso  $a = 5/9$  e  $b = -160/9$ .

A questão que colocamos neste parágrafo é a de saber como variam a forma da distribuição e os seus resumos numéricos, quando os dados são transformados através duma transformação linear.

Começemos por analisar o efeito produzido por uma transformação do tipo

$$y_i = x_i + b$$

isto é, a cada uma das observações originais  $x_i$  foi adicionado um mesmo valor  $b$ . Como sabemos, a operação de adicionar a constante  $b$  a todos os pontos  $x_i$  produz uma **translação** deste conjunto de pontos. Os novos valores  $y_i$  estão assim distanciados dos

correspondentes valores  $x_i$  de  $b$  unidades, e estão à direita daqueles se  $b$  é positivo, e à sua esquerda se  $b$  é negativo. As medidas do centro da distribuição, média e mediana, da nova distribuição de pontos  $y_i$  devem assim ser obtidas das anteriores adicionando-lhes  $b$ . Por outro lado, como a posição relativa dos pontos  $x_i$  é precisamente a mesma que a dos pontos  $y_i$ , tendo-se mantido inalteradas as distâncias correspondentes, as medidas de dispersão, desvio-padrão e amplitude interquartil, mantêm-se inalteradas. Finalmente, o histograma relativo aos novos pontos surgem deslocado de  $a$  unidades relativamente ao histograma original. A forma da distribuição não sofre assim qualquer alteração.

Denotando por  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $AIQ_x$  e  $AIQ_y$ , a média, mediana, desvio-padrão e amplitude interquartil das observações originais  $x_i$  e das novas observações  $y_i$ , respectivamente, temos:

**Efeito da transformação  $y_i = x_i + b$ :**

- ⊙ medidas de localização central:

$$\bar{y} = \bar{x} + b, \quad M_y = M_x + b;$$

- ⊙ medidas de dispersão:

$$s_y = s_x, \quad AIQ_y = AIQ_x;$$

- ⊙ a forma da distribuição não sofre alteração.

Vejamos agora o efeito, sobre as características distribucionais anteriores, da transformação

$$y_i = a x_i,$$

isto é, a cada uma das observações originais  $x_i$  foi multiplicada por um mesmo valor  $a > 0$ . A operação de multiplicar todos os pontos  $x_i$  por um número  $a$ , corresponde a uma **homotetia**, de razão  $a$  e centro na origem, deste conjunto de pontos (contração do conjunto de pontos se  $a < 1$  e dilatação se  $a > 1$ ). A posição relativa dos pontos  $y_i$  é precisamente a mesma que a dos pontos  $x_i$ , mas a distância entre duas quaisquer das novas observações é igual à distância entre as observações originais correspondentes multiplicada por  $a$ . Assim, as novas medidas de localização e dispersão, obtêm-se das originais depois de as multiplicarmos por  $a$ .

**Efeito da transformação**  $y_i = a x_i$  ( $a > 0$ ):

- ⊙ medidas de localização central:

$$\bar{y} = a \bar{x}, \quad M_y = a M_x;$$

- ⊙ medidas de dispersão:

$$s_y = a s_x, \quad AIQ_y = a AIQ_x;$$

- ⊙ a forma da distribuição não sofre alteração.

Tendo agora em conta que a transformação  $y_i = a x_i + b$  se obtém efectuando em primeiro lugar a transformação  $z_i = a x_i$ , e depois a transformação  $y_i = z_i + b$ , podemos dos quadros anteriores obter o quadro seguinte:

**Efeito da transformação linear**  $y_i = a x_i + b$  ( $a > 0$ ):

- ⊙ medidas de localização central:

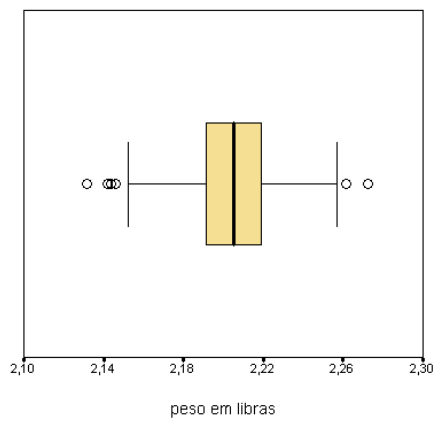
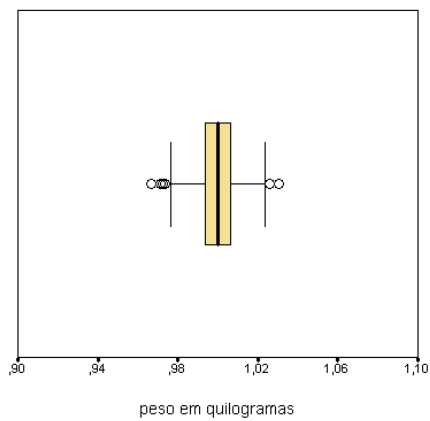
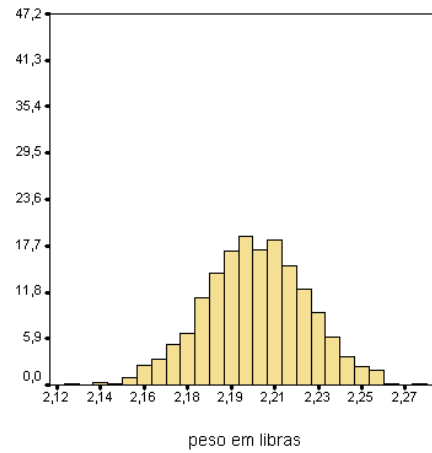
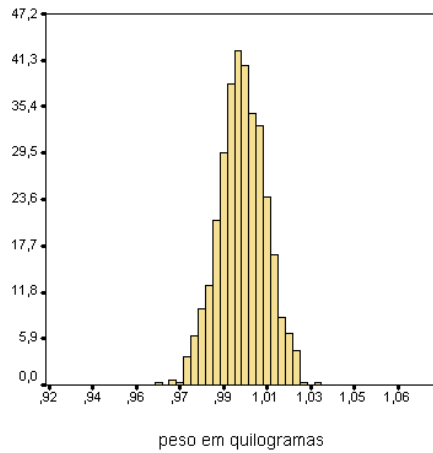
$$\bar{y} = a \bar{x} + b, \quad M_y = a M_x + b;$$

- ⊙ medidas de dispersão:

$$s_y = a s_x, \quad AIQ_y = a AIQ_x;$$

- ⊙ a forma da distribuição não sofre alteração.

**Exemplo 1.4.1** (cont.) Os histogramas normalizados e os gráficos de extremos-e-quartis seguintes, dizem respeito ao peso, em quilogramas e em libras, dos pacotes de açúcar considerados no Exemplo 1.2.4 depois da calibragem da máquina. Para facilitar a sua comparação, os intervalos correspondentes aí considerados têm igual amplitude. Da comparação dos gráficos é claro o aumento da média, da mediana, do desvio-padrão e da amplitude interquartil da distribuição do peso em libras relativamente à distribuição do peso em quilogramas. Como esperado, a forma mantém-se inalterada.



Do quadro seguinte podemos ainda confirmar que a média, a mediana, o desvio-padrão e a amplitude interquartil da distribuição do peso em libras, se obtém dos correspondentes valores da distribuição do peso em quilogramas multiplicando-os por 2.2046.

### Descriptives

		Statistic
quilos	Mean	1,0002357
	Median	1,0002773
	Std. Deviation	,00957317
	Interquartile Range	,0125990
libras	Mean	2,2051197
	Median	2,2052113
	Std. Deviation	,02110500
	Interquartile Range	,0277757

## 1.5 Bibliografia

Ferreira, I., Gonçalves, V.P. (1996). *Métodos Quantitativos*, Texto Editora.

Martins, M.E.G., Cerveira, A.G. (2000). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*, Universidade Aberta.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.

Murteira, B.J.F. (1993). *Análise Exploratória de Dados. Estatística Descritiva*, McGraw-Hill.

Pestana, D.D., Velosa, S.F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian.



## Capítulo 2

# A distribuição normal

*Curvas densidade. Média e desvio-padrão duma curva densidade. Densidade normal e distribuições normais. Regra 68-95-99.7. Tabela da distribuição normal standard. Cálculos envolvendo a distribuição normal. Gráficos de quantis normais.*

### 2.1 Curvas densidade

No capítulo anterior vimos como descrever gráfica e numericamente a distribuição duma variável a partir dum conjunto de observações dessa variável. Por vezes, quando o número de observações é grande, o padrão revelado pelo histograma de frequências é tão regular que este pode ser aproximado por uma curva regular. Esse é o caso da distribuição do peso dos pacotes de açúcar de que temos vindo a falar (ver Exemplo 1.2.4, pág. 26):

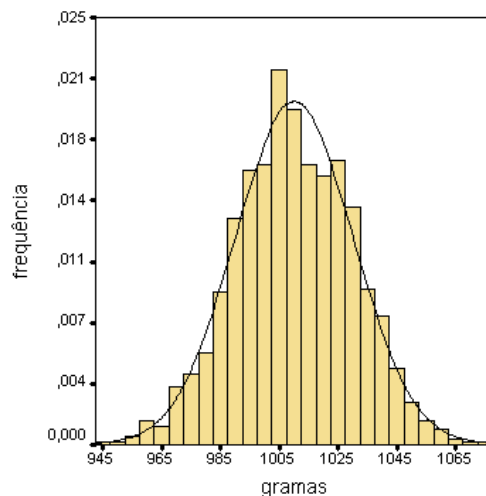


Figura 2.1.1: Distribuição do peso dos pacotes de açúcar antes da calibragem

Esse é também o caso da distribuição das classificações de Análise Matemática (ver Exemplo 1.2.6, pág. 28), em que o histograma respectivo pode ser aproximado por uma curva em forma de sino:

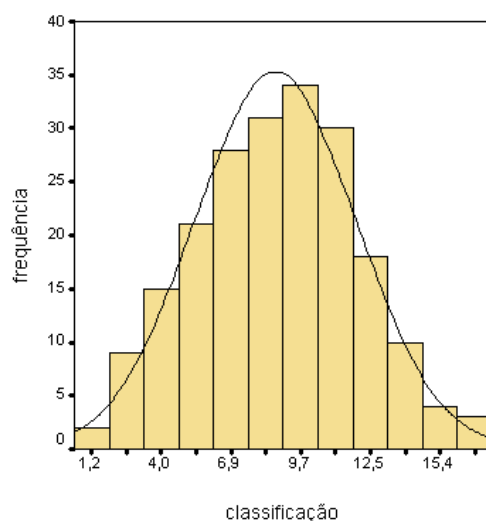


Figura 2.1.2: Distribuição das classificações de Análise Matemática

Como o aspecto do histograma não depende da escala usada no eixo vertical, vamos restringir a nossa atenção aos histogramas cuja área total é igual a 1, a que chamamos histogramas normalizados (ver pág. 24). Neste caso será de esperar que a curva que aproxima o histograma goze das seguintes propriedades que são características duma classe de curvas a que chamamos **curvas densidade**:

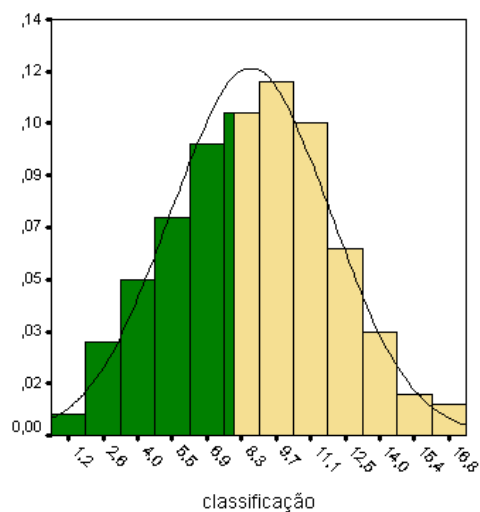
**Curva densidade:**

- ⊙ é uma curva que está acima do eixo dos  $xx$  e em que a área compreendida entre ela e esse eixo é igual a 1;
- ⊙ é usada para descrever a distribuição duma variável;
- ⊙ a frequência relativa de qualquer intervalo que marquemos no eixo dos  $xx$  é aproximadamente igual à área da região compreendida entre a **curva densidade** e o eixo dos  $xx$  que tem por base esse intervalo.

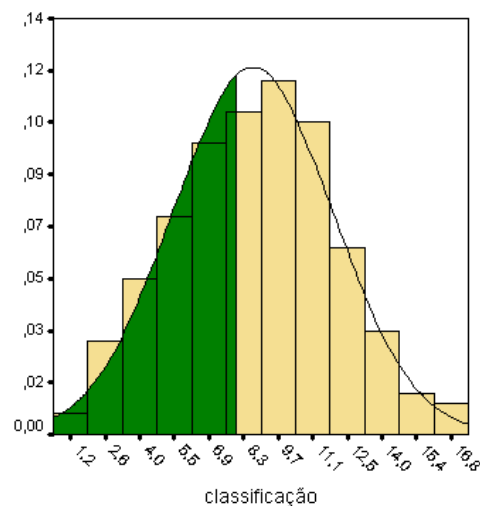
A curva densidade é um **modelo matemático** para a distribuição da variável em estudo, sendo, por isso, uma descrição idealizada duma tal distribuição. Como veremos mais tarde, um tal modelo matemático é essencial para o desenvolvimento de muitos dos procedimentos estatísticos próprios da **estatística indutiva**.



**Exemplo 2.1.3** Relativamente à última das propriedades anteriores, e no caso das classificações de Análise Matemática descritas na Figura 2.1.2, a frequência relativa do intervalo  $[0, 8[$ , que não é mais do que a proporção das classificações inferiores a 8, é 0.4244. Com efeito, em 205 classificações, 87 são inferiores a 8. Determinemos agora duas aproximações para esta frequência relativa. A primeira é dada pela área da porção do histograma normalizado que tem por base o intervalo  $[0, 8[$ . A segunda é dada pela área da região compreendida entre a curva densidade e o eixo dos  $xx$  que tem por base o intervalo  $[0, 8[$ . Para uma e para outra obtemos os valores 0.4091 e 0.4127, respectivamente, que são duas aproximações razoáveis da frequência relativa.

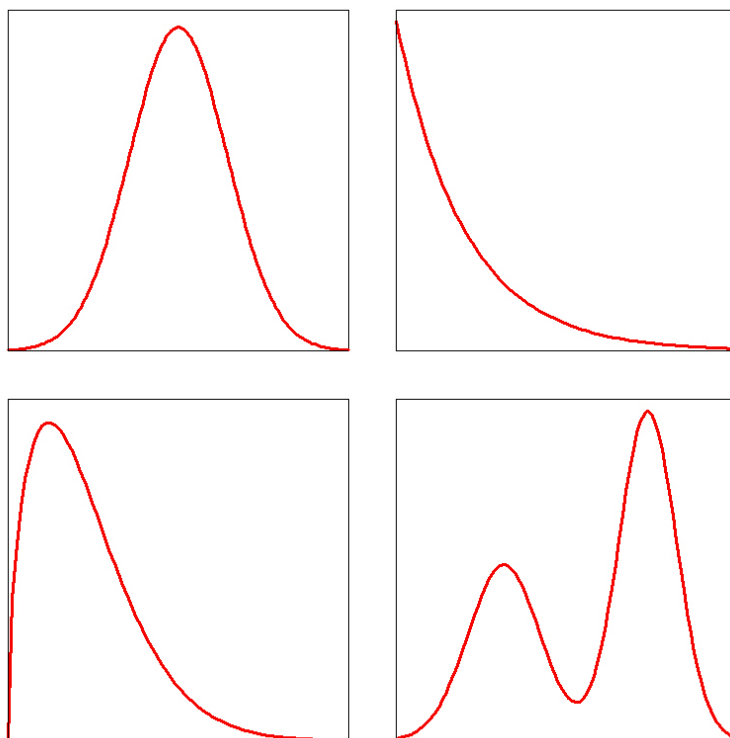


Aproximação da frequência relativa via histograma



Aproximação da frequência relativa via curva densidade

Pela análise das figuras anteriores é razoável admitir que a curva densidade normal fornece um modelo matemático razoável para as distribuições aí representadas. O mesmo já não acontece, por exemplo, relativamente às distribuições descritas no Exemplo 1.2.7 (pág. 29). Para estas distribuições é necessário considerar outras curvas densidade, isto é, outro modelo matemático. Tal como os histogramas associados a conjuntos de dados, as curvas densidade podem revelar os padrões mais diversos. Podemos ter curvas simétricas, assimétricas, unimodais, bimodais, etc., adequadas para descrever distribuições com essas características. Alguns exemplos são apresentados na figura seguinte.



Exemplos de curvas densidade

Reparemos que a segunda curva densidade da primeira linha poderia ser adequada para descrever a distribuição dos tempos de interchegada descrita no Exemplo 1.2.7.

## 2.2 Média e desvio-padrão duma curva densidade

Vimos anteriormente como calcular a média, a mediana, o desvio-padrão, a amplitude interquartil, e outras características numéricas duma distribuição, como alguns dos percentis. De forma análoga, há procedimentos matemáticos que permitem calcular as medidas de localização central, de dispersão e os percentis duma curva densidade, a

partir da sua expressão analítica, isto é, a partir duma expressão do tipo  $y = y(x)$ , que a cada valor de  $x$  do eixo horizontal, associa um valor  $y = y(x)$  do eixo vertical. Os gráficos seguintes foram traçados a partir de expressões deste tipo.

Devido há complexidade de tais métodos, não os vamos aqui abordar. Ficaremos apenas pela identificação gráfica de tais quantidades a partir da curva densidade. Para o efeito, procedemos de forma análoga ao que fizemos para os histogramas (ver Figuras 1.3.2, 1.3.4 e 1.3.11). Para distinguir a **média** e o **desvio-padrão** duma **curva densidade** das correspondentes características dum conjunto de observações, vamos denotá-los por  $\mu$  e  $\sigma$ , respectivamente.

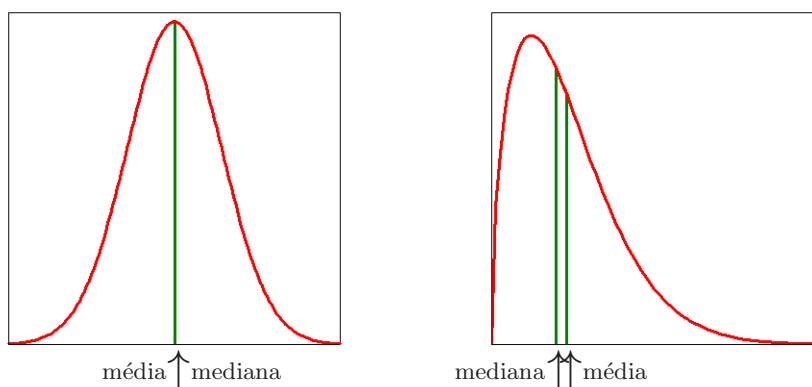


Figura 2.2.1: Localização gráfica da média e da mediana em curvas densidade

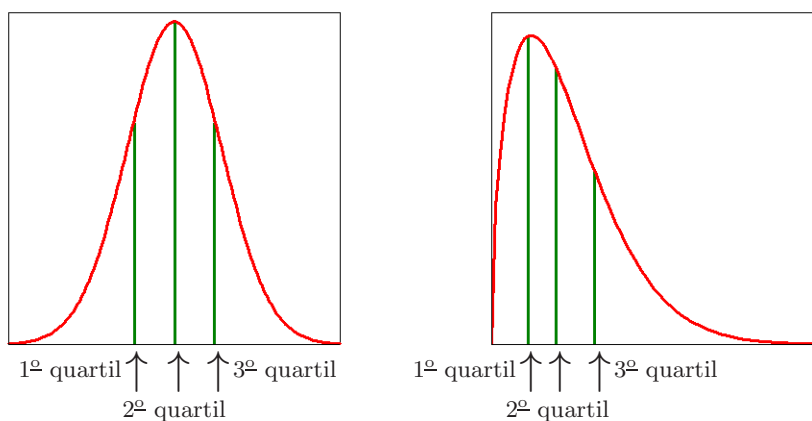


Figura 2.2.2: Localização gráfica dos quartis em curvas densidade

## 2.3 Curvas e distribuições normais

Uma classe particularmente importante de curvas densidade, é constituída pelas curvas apresentadas nas Figuras 2.1.1 e 2.1.2 a que chamamos **curvas normais**. Estas

curvas descrevem distribuições de dados ditas **distribuições normais**. Estas curvas revelam-se muito importantes em estatística. Para justificar parcialmente esta afirmação, referimos o facto de que são várias as distribuições de dados que são bem descritas por curvas normais. Nelas se incluem dados provenientes da cotação de testes (caso dos dados da Figura 2.1.2), ou de medições repetidas duma mesma grandeza (caso dos dados da Figura 2.1.1). Mais razões para a importância da curva normal surgirão durante o curso. Como veremos, ela surge envolvida em muitos dos procedimentos da estatística inferencial que estudaremos.

Todas as curvas normais têm a mesma forma. São **simétricas**, **unimodais** e têm a **forma dum sino**. Uma curva normal fica completamente determinada pela especificação da sua média  $\mu$  e do seu desvio-padrão  $\sigma$ . Este facto é claro a partir da expressão analítica que define uma curva normal, em que a cada valor  $x$  do eixo das abcissas, corresponde o ponto  $y$  do eixo das ordenadas dado por

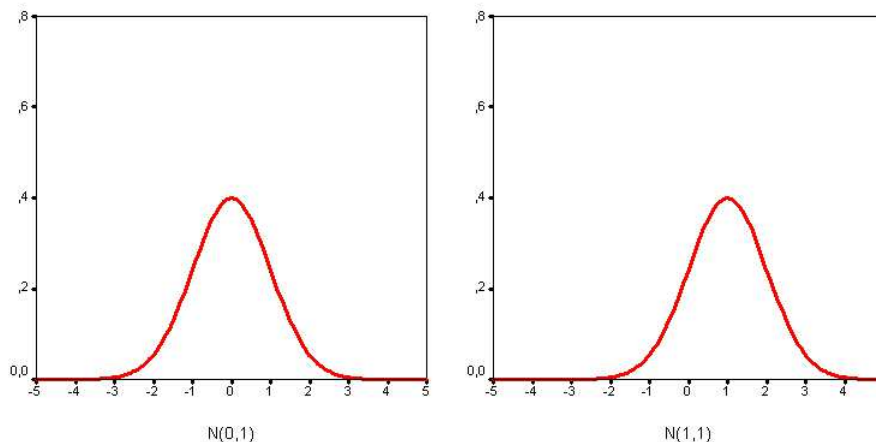
$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

onde  $\pi = 3.1415926535\dots$  é o nosso bem conhecido número Pi da geometria e  $e = 2.7182818282\dots$  é o número de Neper.

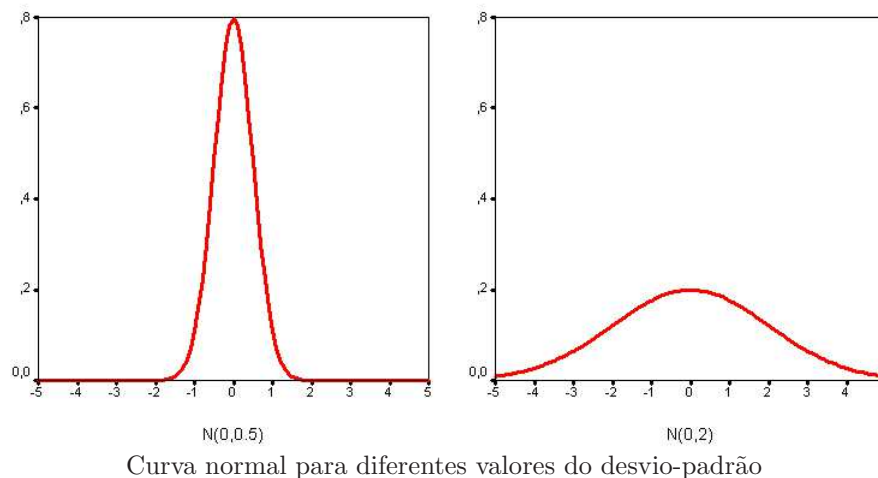
Com o objectivo de simplificar a escrita, usamos por vezes letras maiúsculas para representar a variável que está a ser observada. Se representarmos por  $X$  uma tal variável, escrevemos

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

sempre que as diversas observações da variável possam ser descritas por uma distribuição normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ . Dizemos também que  $X$  **possui**, ou tem, **uma distribuição normal** de média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ .



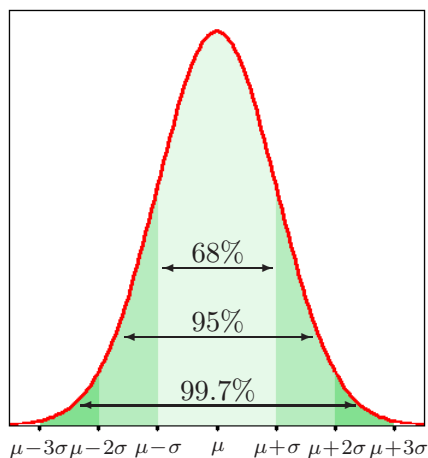
Curva normal para diferentes valores da média



A média  $\mu$  dum curva normal está localizada no ponto de simetria da curva e coincide com a mediana (ver Figura 2.2.1). Aumentar  $\mu$  sem alterar  $\sigma$  corresponde a deslocar horizontalmente a curva para a direita, enquanto que diminuir  $\mu$  conduz a um deslocamento horizontal da curva para a esquerda. O desvio-padrão  $\sigma$  controla a dispersão da curva normal. Estes factos são ilustrados nas figuras anteriores.

## 2.4 Regra 68-95-99.7

Para as distribuições normais, a frequência relativa dum qualquer intervalo que marquemos no eixo dos  $xx$  é aproximadamente igual à área da região que tem por base esse intervalo e que está compreendida entre a **curva normal**, que descreve essa distribuição de dados, e o eixo dos  $xx$ . Fazendo o cálculo das áreas correspondentes aos intervalos  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ,  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$  e  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ , quando a distribuição é  $N(\mu, \sigma)$  (mais à frente veremos como podemos calcular tais áreas), obtemos os valores seguintes para as frequências percentuais de tais intervalos:



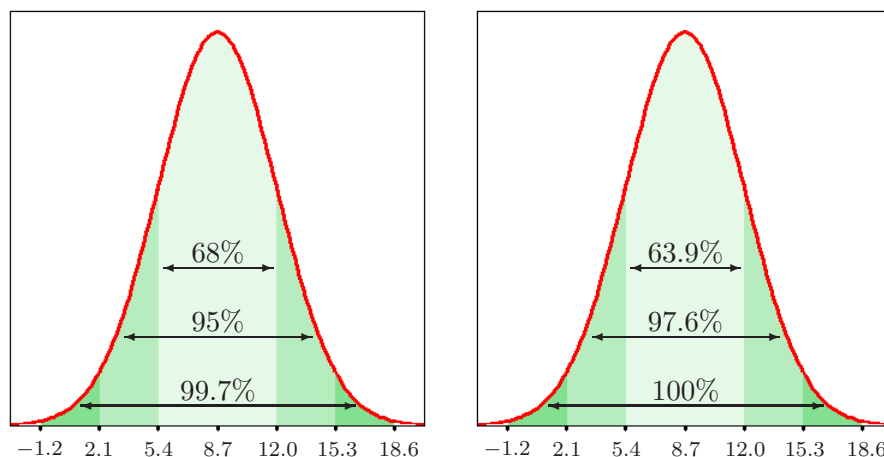
As propriedades seguintes, conhecidas como **regra 68-95-99.7**, são assim válidas para todas as distribuições normais:

**Regra 68-95-99.7:**

Numa **distribuição normal** de média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ :

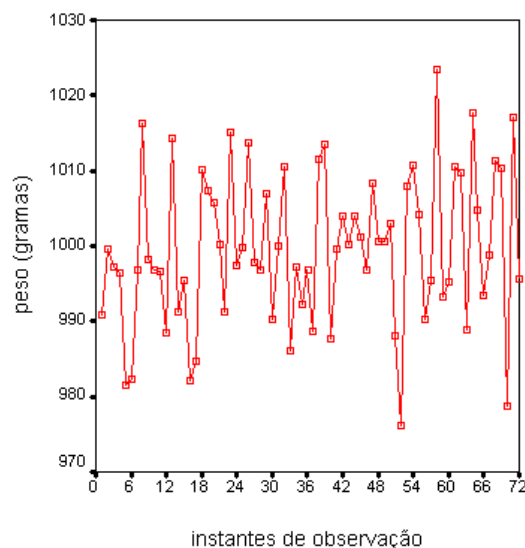
- ⊙ aproximadamente 68% das observações estão no intervalo  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ;
- ⊙ aproximadamente 95% das observações estão no intervalo  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ ;
- ⊙ aproximadamente 99.7% das observações estão no intervalo  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ .

**Exemplo 2.4.1** Admitindo que a distribuição das classificações de Análise Matemática descrita na Figura 2.1.2, possui uma distribuição normal  $N(8.7, 3.3)$ , onde 8.7 e 3.3 são, respectivamente, aproximações às décimas da média e do desvio-padrão do conjunto das classificações, mostramos a seguir a distribuição esperada das classificações dada pela regra 68-95-99.7 e a distribuição efectivamente observada. Estes resultados, reforçam a ideia de que a distribuição das classificações de Análise é bem aproximada por uma distribuição normal. Utilizando esta regra podemos concluir que a frequência relativa das classificações superiores a 15.3 é aproximadamente de 2.5%. Reparemos que o valor observado para esta frequência relativa foi de 2%.

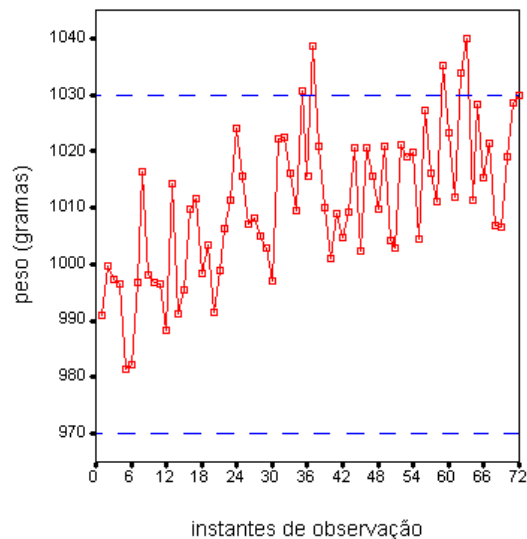


Regra 68-95-99.7 teórica e observada

**Exemplo 2.4.3** É por vezes interessante analisar a evolução duma variável com o tempo. Admitamos que a distribuição dos pesos dos pacotes de açúcar produzidos por uma máquina bem calibrada possui uma distribuição normal com 1000 gramas de média e com desvio-padrão de 10 gramas (ver Figura 2.1.1). Para controlar o processo de empacotamento, de 10 em 10 minutos é recolhido um pacote de açúcar empacotado pela máquina e é registado o seu peso. Este tipo de observações pode ser descrito graficamente por um **gráfico sequencial**, representando os pontos  $(t, y_t)$ , eventualmente ligados com segmentos de recta, onde  $t$  é instante de observação e  $y_t$  o peso observado, num sistema de eixos coordenados. O gráfico sequencial seguinte dá conta dos pesos registados durante um período de 12 horas de funcionamento da máquina. Pela regra 68-95-99.7, sabemos que 99.7% dos pesos registados pertence ao intervalo  $[970, 1030]$ . Assim, 99.7% dos pontos marcados deve estar entre as rectas horizontais  $y = 970$  e  $y = 1030$ . Como podemos verificar, tal acontece com todas as observações anteriores.



No gráfico seguinte registam-se os pesos de pacotes de açúcar recolhidos, como acima se indicou, durante um outro período de 12 horas de funcionamento da máquina. Nele se põe em evidência uma alteração da distribuição do peso dos pacotes de açúcar. A partir do instante de observação 18 (aproximadamente) é clara uma tendência de aumento do peso dos pacotes observados, que culmina com duas observações, a 35 e a 38, a excederem o limite superior de variação. Significa isto que a máquina ficou descalibrada produzindo pacotes com peso a mais. Se o gráfico for construído, não *a posteriori*, mas à medida que as observações vão sendo feitas, podemos controlar o funcionamento da máquina e proceder a uma imediata calibragem da mesma evitando

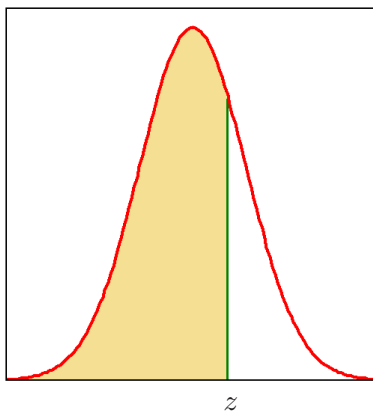


que durante o resto do período de funcionamento a máquina produza pacotes com peso excessivo. Por estas razões, os gráficos anteriores são, neste contexto, designados por **cartas de controlo**.

## 2.5 Cálculos envolvendo a distribuição normal

Como vimos, se os dados  $x_1, \dots, x_n$  resultantes da observação duma variável  $X$ , puderem ser descritos por uma curva densidade, para calcular uma aproximação da frequência relativa dum intervalo que consideremos no eixo dos  $xx$ , é importante saber determinar a área da região compreendida entre a curva densidade e o eixo horizontal que tem por base esse intervalo.

No caso da distribuição de  $X$  ser normal com média 0 e desvio-padrão 1, dita **distribuição normal standard** ou distribuição normal **centrada** (por ter média 0) e



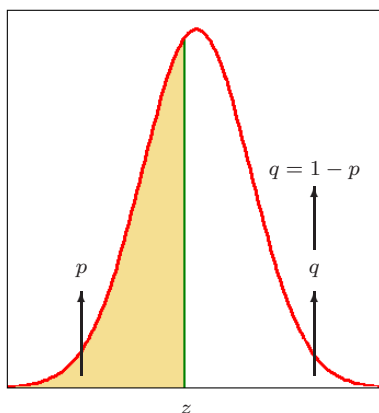


**reduzida** (por ter desvio-padrão 1), um tal cálculo pode ser feito com a ajuda duma **tabela da distribuição normal standard** (ver Tabela A). Para cada valor  $z$  do eixo do  $xx$ , encontramos na Tabela A o valor da área da região compreendida entre a curva normal média 0 e desvio-padrão 1 e o eixo horizontal que está à esquerda de  $z$  (ver figura anterior).

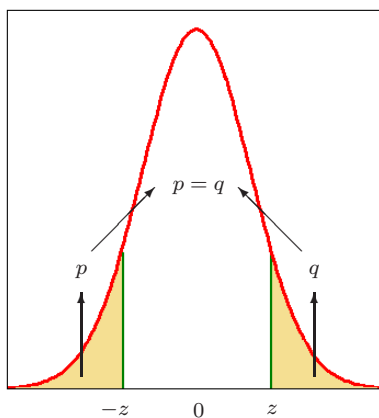
Tal como para a distribuição respectiva, a esta curva normal chamamos **curva normal standard** ou curva normal **centrada** (por ter média 0) e **reduzida** (por ter desvio-padrão 1).

Atendendo a que a área sob uma curva densidade é igual a 1, e à simetria da curva normal standard relativamente ao ponto  $z = 0$ , outras áreas sob a curva normal podem ser obtidas a partir das que tiramos directamente da Tabela A.

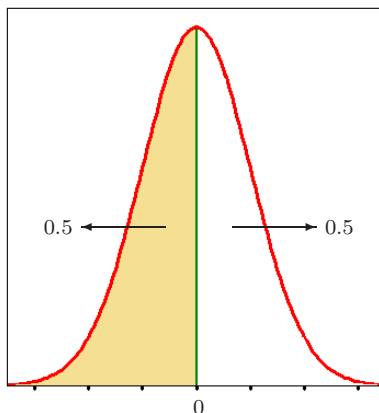
Assim, se a área à esquerda de um ponto  $z$  é igual a  $p$ , a área à sua direita é igual a  $1 - p$ :



Pela simetria da curva, as áreas à esquerda de um ponto  $-z$  e à direita do seu simétrico  $z$  são iguais:

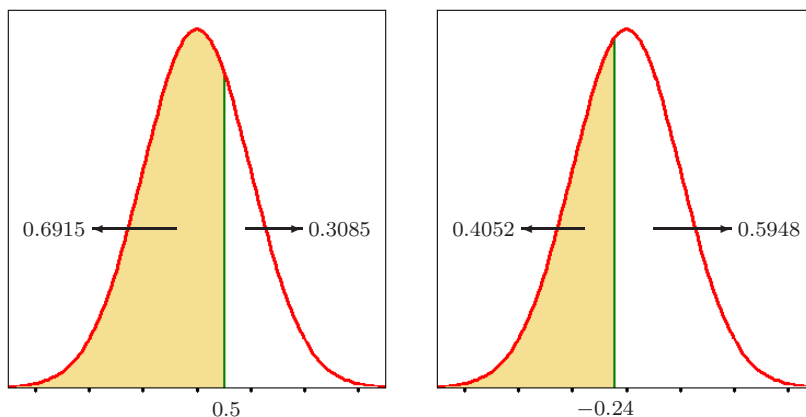


Em particular, as áreas à esquerda e à direita do ponto  $z = 0$  são iguais a 0.5.

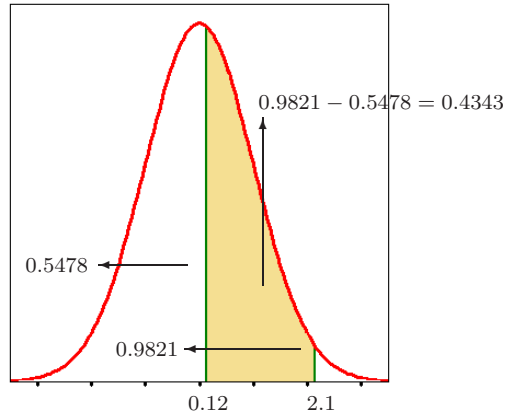


Exemplificamos a seguir a utilização da Tabela A, em alguns casos particulares relevantes.

**Exemplo 2.5.1** Para  $z = 0.50$ , obtemos, para área da região compreendida entre a curva e o eixo horizontal que está à esquerda de 0.50, o valor 0.6915. Como a área total sob a curva é igual a 1, a área da região compreendida entre a curva e o eixo horizontal que está à direita de 0.50 é igual a  $1 - 0.6915 = 0.3085$ . De forma análoga, as áreas à esquerda e à direita do ponto  $z = -0.24$  são iguais a 0.4052 e 0.5948, respectivamente.

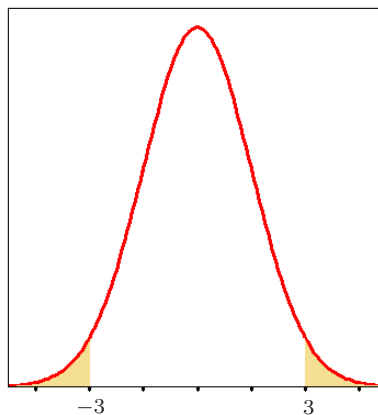


**Exemplo 2.5.2** O cálculo de áreas um pouco mais complicadas pode ainda ser feito utilizando a Tabela A. Por exemplo, suponhamos que pretendemos calcular a área da região compreendida entre a curva e o eixo horizontal que está entre os pontos  $z = 0.12$  e  $z = 2.10$ . O valor desta área pode ser obtido subtraindo ao valor da área à esquerda de  $z = 2.10$  o valor da área à esquerda de  $z = 0.12$ . Obtemos então o valor  $0.9821 - 0.5478 = 0.4343$ .



Facilmente se obtém agora a área da região compreendida entre a curva e o eixo horizontal que está à esquerda do ponto  $z = 0.12$  ou à direita de  $z = 2.10$ :  $1 - 0.4343 = 0.5657$ .

**Exemplo 2.5.3** Admitamos que a distribuição dos erros de medida (em milímetros) cometidos por um teodolito nas várias medições de determinada distância, pode ser descrita por uma distribuição normal standard. Representando a variável “erro” por  $Z$ , temos então que  $Z \sim N(0, 1)$ . Determinemos a proporção  $p$  de medições em que o erro cometido é inferior a  $-3$  ou superior a  $3$  milímetros, isto é, a proporção de medições em que  $Z < -3$  ou  $Z > 3$ . O valor pedido não é mais do que a soma das áreas, sob a curva normal standard, à esquerda de  $-3$  e à direita de  $3$ .

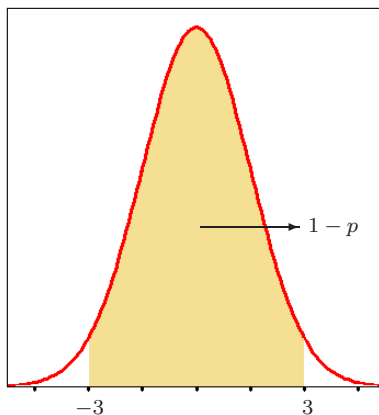


Efectuamos o cálculo de três maneiras diferentes:

A) De forma directa, somando as áreas, sob a curva normal standard, à esquerda de  $-3$  e à direita de  $3$ , obtemos  $p = 0.0013 + (1 - 0.9987) = 0.0026$ .

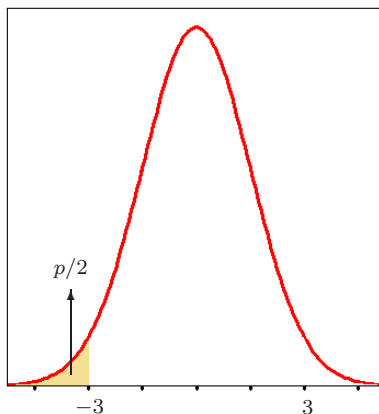
B) Alternativamente, podemos começar por calcular a área da região compreendida entre a curva normal standard e o eixo horizontal que está entre os pontos  $z = -3$  e

$z = 3$  e que é igual a  $1 - p$ .



Assim  $1 - p = 0.9987 - 0.0013 = 0.9974$ , e portanto  $p = 0.0026$ .

C) Podemos ainda começar por observar que a área à esquerda de  $z = -3$  é igual a  $p/2$ , pois esta é igual à área à direita de  $z = 3$  (pela simetria da curva normal standard relativamente a  $z = 0$ ).



Como a área à esquerda de  $z = -3$  é igual a 0.0013, então  $p = 2 \times 0.0013 = 0.0026$ .

Suponhamos agora que a distribuição dos dados  $x_1, \dots, x_n$  resultantes da observação duma variável  $X$ , pode ser descrita por uma curva normal de média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ . Tendo em conta o que estudámos nos parágrafos 1.4 e 2.3, é de esperar que os dados  $z_1, \dots, z_n$  definidos por

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma},$$

correspondentes a uma alteração da unidade de medida, sejam bem descritos por uma curva densidade normal standard (porquê?). Como a variável  $Z$  foi obtida da variável  $X$  subtraindo-lhe em primeiro lugar a sua média  $\mu$  e dividindo o resultado obtido pelo

seu desvio-padrão  $\sigma$ , dizemos que **padronizámos** a variável  $X$ . Como  $Z$  tem média 0 e desvio-padrão 1, dizemos também que **centrámos** e **reduzimos**  $X$ .

**Padronização duma variável normal:**

Se

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

As relações anteriores, exprimem o facto de que um problema sobre uma distribuição normal qualquer, pode ser convertido num problema sobre a distribuição normal standard.

**Exemplo 2.5.4** Para ilustrar a importância deste facto, retomemos o Exemplo 2.4.1 (pág. 62) e denotemos por  $X$  a variável “classificação obtida em Análise Matemática”. Admitamos que a sua distribuição é normal com média 8.7 e desvio-padrão 3.3, isto é,  $X \sim N(8.7, 3.3)$ . Suponhamos que pretendemos calcular a proporção de classificações inferiores a 8, isto é, queremos calcular a proporção de vezes em que  $X < 8$ . Subtraindo a média e dividindo pelo desvio-padrão, isto é, **centrando e reduzindo**  $X$ , vamos converter este problema num problema sobre a distribuição normal standard:

$$\begin{aligned} X &< 8 \\ X - 8.7 &< 8 - 8.7 \\ (X - 8.7)/3.3 &< (8 - 8.7)/3.3 \\ Z &< -0.21 \end{aligned}$$

onde

$$Z \sim N(0, 1).$$

A proporção pedida é assim a frequência relativa do acontecimento  $Z < -0.21$ , que, como sabemos, é dada pela área da região compreendida entre a curva normal standard e o eixo horizontal que está à esquerda do ponto  $z = -0.21$ . Uma tal área é aproximadamente igual a 0.4168. Como as classificações são sempre positivas, poderíamos também optar por calcular a proporção de classificações para as quais  $0 \leq X < 8$ , onde  $X \sim N(8.7, 3.3)$ . Procedendo como atrás, obteríamos o valor 0.4127, que é precisamente o valor que foi indicado no Exemplo 2.1.3.

Estamos agora em condições de justificar a **regra 68-95-99.7** que afirmámos ser válida para qualquer distribuição normal  $N(\mu, \sigma)$ . Usando o procedimento anterior, verifiquemos que é de aproximadamente 68% a frequência relativa das observações  $X$  para as quais

$$\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$$

quando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Subtraindo a média  $\mu$  e dividindo pelo desvio-padrão  $\sigma$  obtemos:

$$\begin{aligned} \mu - \sigma &\leq X &&\leq \mu + \sigma \\ -\sigma &\leq X - \mu &&\leq \sigma \\ -1 &\leq (X - \mu)/\sigma &&\leq 1 \\ -1 &\leq Z &&\leq 1 \end{aligned}$$

onde  $Z \sim N(0, 1)$ . A frequência relativa pedida é assim igual à frequência relativa das observações padronizadas  $Z$  para as quais  $-1 \leq Z \leq 1$ , que pode ser calculada a partir da tabela da distribuição normal standard:  $0.8413 - 0.1587 = 0.6826$ . De igual forma procederíamos para calcular a frequência relativa das observações  $X$  para as quais  $\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$  e  $\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma$ .

## 2.6 Julgando a assunção de normalidade

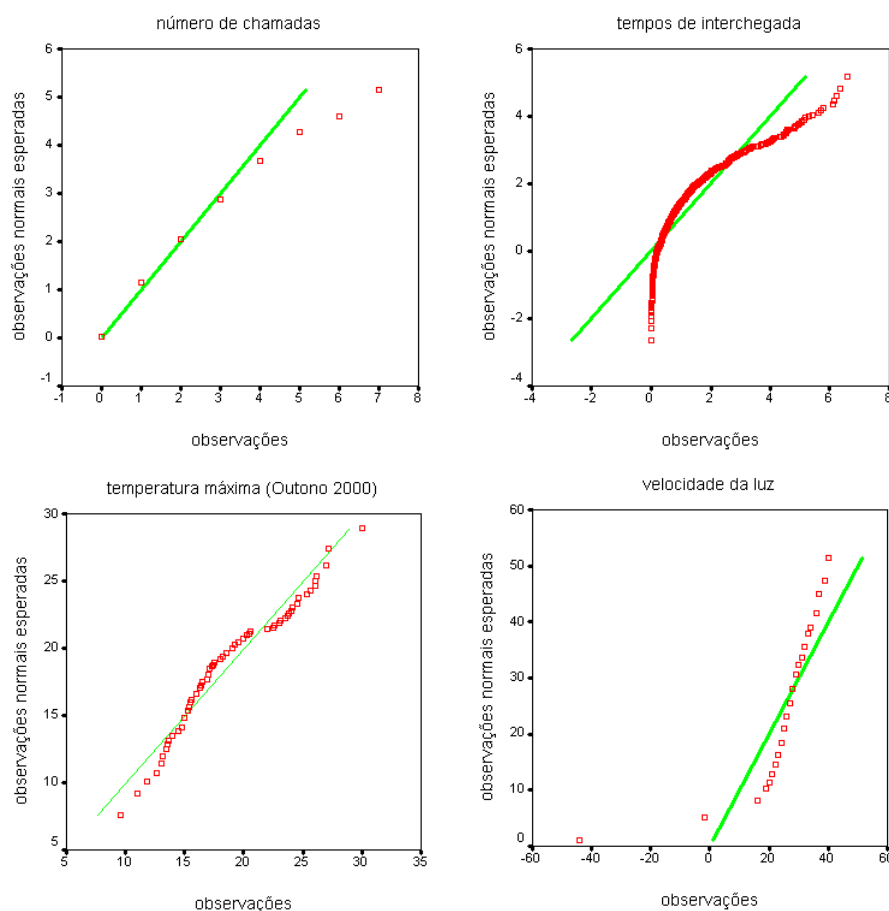
Como vimos, um histograma, ou um gráfico de extremos-e-quartis, pode revelar características da distribuição em estudo, como assimetrias e existência de elevado número de observações discordantes, que não são compatíveis com a assunção de normalidade.

Quando o histograma é aproximadamente simétrico e unimodal, revelando uma forma de sino, é importante ter um instrumento sensível para julgar da justeza da assunção de normalidade, uma vez que a decisão de descrever a distribuição das observações por uma curva normal pode determinar passos futuros na análise dos dados. O instrumento gráfico mais útil para julgar a hipótese de normalidade é o chamado **gráfico de quantis normais**.

A ideia que está na base deste gráfico, é a comparação dos percentis do conjunto das observações com os percentis correspondentes da distribuição normal que tem por média a média das observações e por desvio-padrão o desvio-padrão das observações. Para cada observação  $x$  e para cada percentil  $z$  que associamos a  $x$ , o ponto  $(x, z)$  é marcado num sistema de eixos coordenados. **Se os pontos assim marcados estiverem aproximadamente sobre a recta  $x = z$ , o gráfico indica que a distribuição dos dados é normal. Desvios sistemáticos relativamente à recta anterior, são indicadores de não normalidade.**

Não sendo estes gráficos realizáveis sem auxílio dum computador, vamos limitar-nos no que se segue a analisar alguns gráficos de quantis normais para alguns dos conjuntos de dados que temos vindo a analisar.

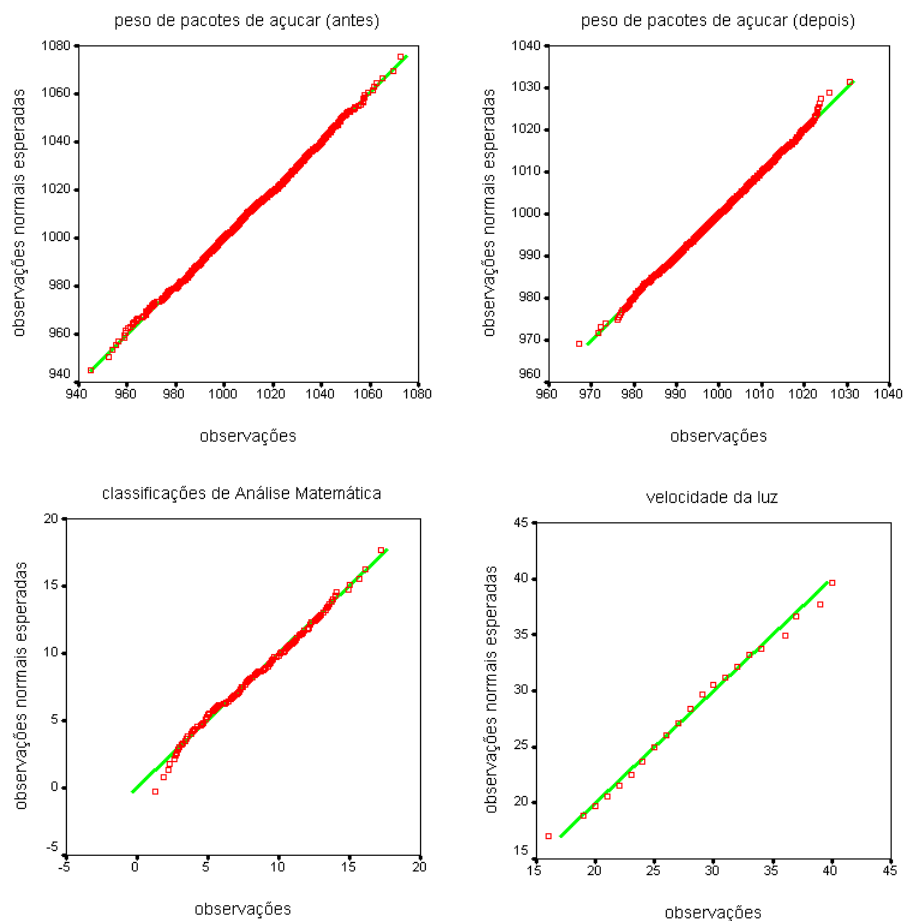
Começemos pelas distribuições descritas nos Exemplos 1.2.7 (pág. 29), 1.2.8 (pág. 30) e 1.2.5 (pág. 27), e cujos histogramas revelam padrões claros de não normalidade. Os gráficos de quantis normais apresentados a seguir confirmam esta ideia. Estes gráficos dão-nos indicações importantes sobre as caudas das distribuições, isto é, sobre os menores e maiores valores da distribuição. Vejamos, por exemplo, o gráfico relativo aos tempos de interchegada que revela uma cauda esquerda mais curta do que a normal (os pontos do lado esquerdo estão abaixo da recta) e uma cauda direita mais longa que a normal (os pontos do lado direito estão abaixo da recta). Trata-se, por isso, duma distribuição com assimetria positiva. Estas características são confirmadas pelo histograma respectivo (ver pág. 29). Reparemos também no facto das duas observações discordantes nos dados relativos à medição da velocidade da luz (ver Exemplo 1.2.5, pág. 27), surgirem fora do padrão comum às restantes observações. Finalmente, e como



Distribuições não normais

podemos constatar do primeiro dos gráficos seguintes, reparemos que na execução de gráficos de quantis normais, o SPSS representa com um único ponto observações repetidas.

A assunção de normalidade das distribuições descritas nos Exemplos 1.2.4 (pág. 26) e 1.2.6 (pág. 28), é reforçado pelos gráfico de quantis normais apresentados na figura seguinte. Relativamente à distribuição descrita no Exemplo 1.2.5 (pág. 27), é interessante notar que se excluirmos do conjunto dos dados as duas observações discordantes, as restantes observações podem ser descritas por uma distribuição normal.



Distribuições normais

## 2.7 Bibliografia

Gomes, M.I., Barão, M.I. (1999). *Controlo Estatístico de Qualidade*, SPE.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.



Pestana, D.D., Velosa, S.F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian.



## Capítulo 3

# Associação entre duas variáveis

*Associação entre variáveis. Gráfico de dispersão. Associação positiva e associação negativa. Associação linear e não-linear. Variável dependente e variável independente. Coeficiente de correlação linear. Recta de regressão. Coeficiente de determinação. Gráfico de resíduos. Observações discordantes e observações influentes. Previsão a partir da recta de regressão. Séries cronológicas. Cronograma.*

### 3.1 Gráfico de dispersão

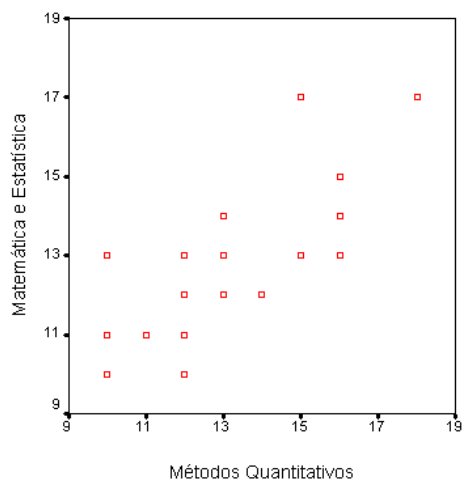
Em alguns dos conjuntos de dados que considerámos anteriormente, para cada um dos indivíduos observados, são registadas várias das suas características. Apesar disso, as variáveis que lhes estão associadas foram por nós estudadas separadamente umas das outras. Esse foi, por exemplo, o caso dos dados apresentados na Figura 1.1.1, em que analisámos algumas das variáveis em que os dados estavam organizados. No entanto, poderia ser interessante analisar possíveis **relações** entre essas variáveis. Por exemplo, relações entre as variáveis “número de filhos” e “rendimento”, ou entre as variáveis “sexo” e “rendimento”.

Neste capítulo, no âmbito da análise exploratória de dados, desenvolveremos métodos gráficos e quantitativos para estudar a relação entre duas variáveis. Mais precisamente, para duas variáveis observadas num **mesmo conjunto de indivíduos**, interessamo-nos por identificar uma possível **associação** entre essas variáveis, isto é, se alguns valores assumidos por uma das variáveis tendem a ocorrer mais frequentemente com uns do que com outros dos valores assumidos pela outra variável.

Uma forma simples de explorar a possível associação entre duas **variáveis quantitativas**,  $X$  e  $Y$ , a partir de  $n$  observações de cada uma delas em que as observações  $x_i$  e  $y_i$  dizem respeito ao  $i$ -ésimo indivíduo observado, é representar estas observações num diagrama ou **gráfico de dispersão** onde cada um dos pontos  $(x_i, y_i)$  é marcado num

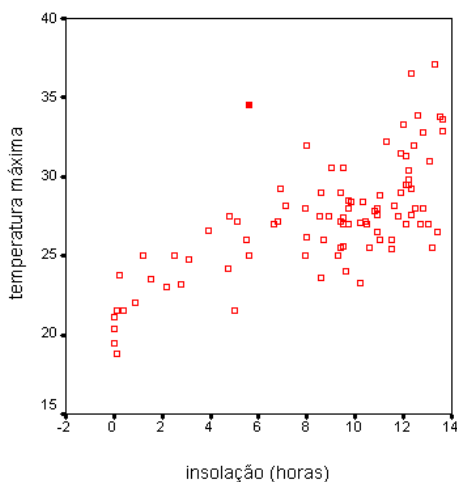
sistema de eixos coordenados. Este tipo de gráfico permite analisar o padrão geral das observações bem como desvios a esse padrão geral. O tipo de relação subjacente, no caso desta existir, e a sua intensidade, isto é, se se trata duma relação fraca, moderada ou forte, são ainda conclusões que podemos tirar deste tipo de gráfico.

**Exemplo 3.1.1** Ilustremos o que acabámos de dizer considerando o gráfico de dispersão relativo às classificações obtidas por um grupo de alunos das disciplinas de Matemática e Estatística (1<sup>o</sup> ano), variável  $X$ , e de Métodos Quantitativos (2<sup>o</sup> ano), variável  $Y$ , da licenciatura em Administração Pública.



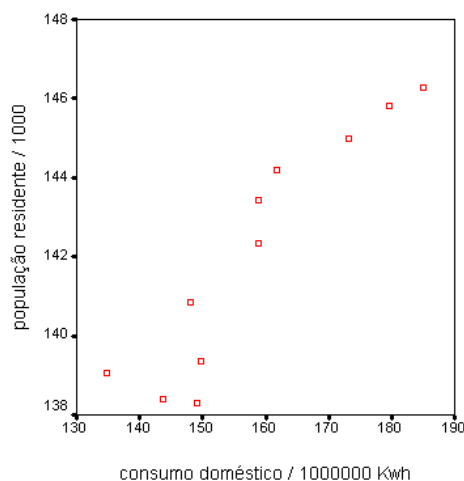
O gráfico anterior revela uma **associação positiva** entre as variáveis  $X$  e  $Y$ , pois aos menores e aos maiores valores de cada uma das variáveis correspondem, respectivamente, os menores e os maiores valores da outra variável.

**Exemplo 3.1.2** O mesmo tipo de associação é revelado pelo gráfico de dispersão seguinte, relativo às horas de insolação e à temperatura máxima diárias observadas



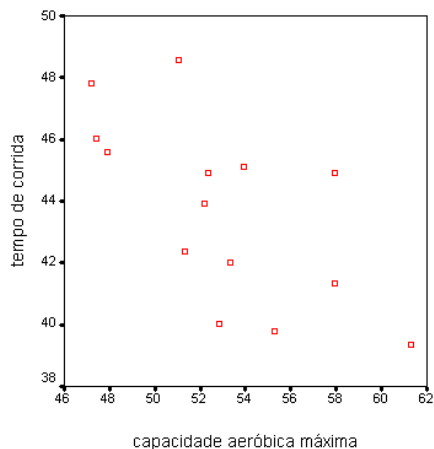
em Coimbra entre 16 de Junho de 2002 e 15 de Setembro de 2002 (dados do Instituto Geofísico da Universidade de Coimbra). Cada um dos pontos do gráfico corresponde a um dos dias do período observado. Reparemos que o gráfico de dispersão põe em evidência a presença duma observação que está em desacordo com o padrão global revelado pelo gráfico (observação marcada a cheio). Por razões análogas ao que fizemos no capítulo anterior dizemos que se trata duma possível **observação discordante**.

**Exemplo 3.1.3** Uma associação positiva aparentemente mais forte do que a revelada em qualquer dos exemplos anteriores, é aquela que existe entre o consumo doméstico de electricidade em Coimbra e a população aí residente durante o período 1991 e 2001 (dados do INE), como podemos constatar do gráfico seguinte. Os valores apresentados para a população residente em Coimbra nos anos de 1991 e 2001 correspondem a dois anos em que se realizaram censos gerais da população. As estimativas apresentadas pelo INE para a população residente no período intercensário incorporam já os resultados dos censos de 2001.



No caso de aos menores valores de cada uma das variáveis correspondem os maiores valores da outra variável, dizemos que o gráfico exhibe uma **associação negativa** entre as duas variáveis. Um exemplo duma tal situação é apresentada a seguir.

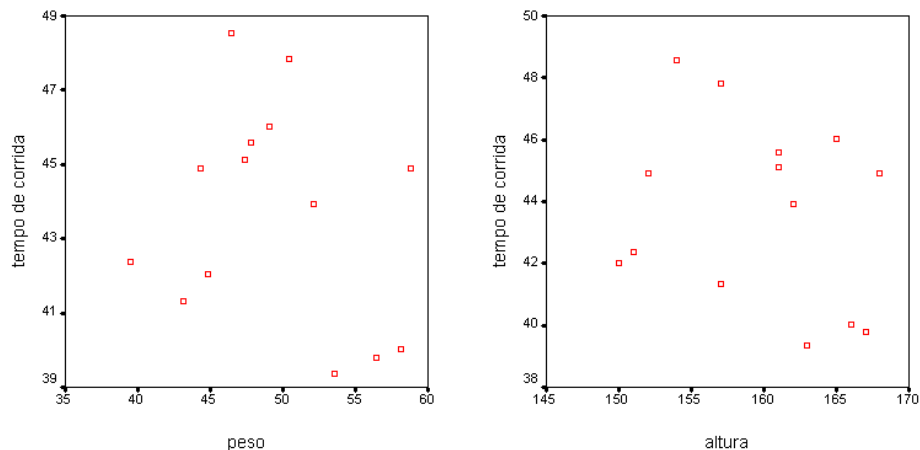
**Exemplo 3.1.4** Para 14 corredoras, registaram-se a capacidade aeróbica máxima ( $\text{ml Kg}^{-1} \text{min}^{-1}$ ) e o tempo gasto para percorrerem determinada distância (min) (*in* Abraham e Ledolter, 1983, pág. 15). O gráfico de dispersão sugere que quanto maior for a capacidade aeróbica máxima, menor é, em geral, o tempo de corrida.



Nos exemplos anteriores, a forma da relação exibida pelas variáveis em estudo é aproximadamente **linear**. Dizemos neste caso que se trata duma **associação linear**. Com isto queremos fazer referência ao facto dos pontos do gráfico se disporem para um e outro lado duma linha recta que podemos imaginar atravessar a nuvem de pontos marcados. A **associação linear** será tanto mais forte ou marcada quanto mais próximos dessa linha recta se dispuserem os pontos do gráfico.

Apresentamos a seguir dois exemplos de não associação. Os gráficos de dispersão respectivos não revelam qualquer padrão. A nuvem de pontos não exhibe qualquer direcção privilegiada.

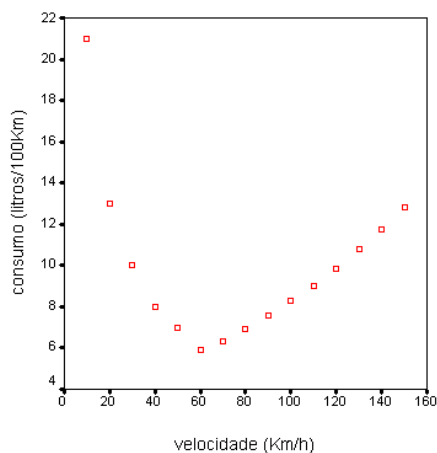
**Exemplo 3.1.4** (cont.) Para as 14 corredoras registaram-se também os seus pesos (Kg) e alturas (cm). Os gráficos seguintes não revelam qualquer tipo de associação entre qualquer uma destas variáveis e o tempo de corrida.



As relações entre duas variáveis podem ser dos mais diversos tipos. Apresentamos

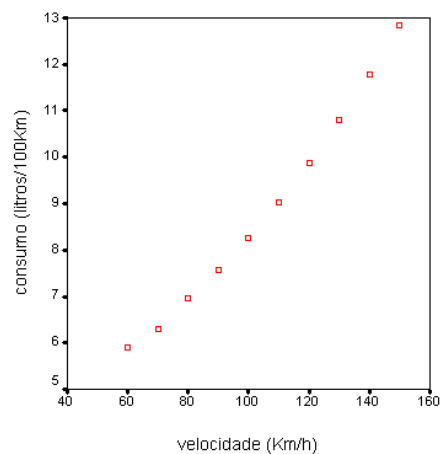
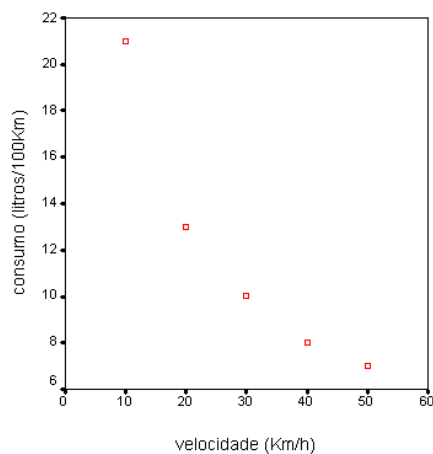
a seguir dois exemplos em que apesar de existir uma associação clara entre as variáveis em presença, esta não pode ser classificada de positiva ou negativa.

**Exemplo 3.1.6** No gráfico de dispersão seguinte, registam-se os consumo efectuados por um automóvel (litro/100Km) a diferentes velocidades (Km/h) (*in* Moore e McCabe, 2003, pág. 122):

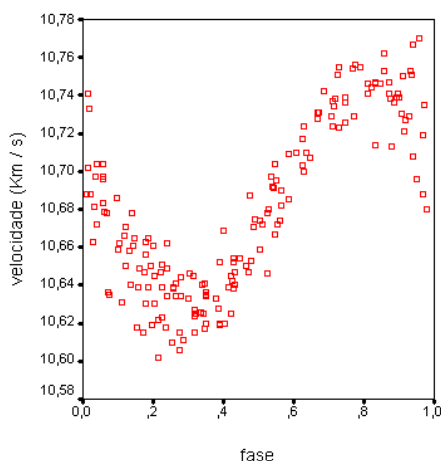


Apesar da relativamente forte associação, de tipo não-linear, exibida entre as duas variáveis, esta não pode ser qualificada de positiva nem de negativa pois, quer a valores baixos, quer a valores altos da velocidade, correspondem elevados níveis de consumo.

Reparemos que se nos restringirmos às velocidades inferiores ou iguais a 50Km/h, próprias de circuitos urbanos, ou às velocidades superiores a 50Km/h, habituais em circuitos de estrada, a associação entre as duas variáveis é aproximadamente de tipo linear, sendo negativa no primeiro caso e positiva no segundo. Além disso, a associação linear é mais forte no segundo caso do que no primeiro.



**Exemplo 3.1.7** Observações da componente radial da velocidade de uma estrela (velocidade da estrela relativamente à Terra na direcção da linha recta que une os seus centros de massa) que está a aproximadamente 60 anos luz da Terra revelam variações periódicas dessa velocidade com um período de aproximadamente 24.4 dias. As 181 observações realizadas são representadas a seguir em função da sua fase, isto é, em função da proporção de tempo decorrido desde o início do período em que a observação se insere.<sup>1</sup> Também aqui é evidente uma forte associação de tipo não-linear entre as variáveis fase e velocidade.



Nos exemplos anteriores, estivemos unicamente interessados em explorar uma possível associação entre as variáveis em presença. Ao pormos em evidência uma tal relação, não estamos, necessariamente, a tentar explicar a variação observada numa das variáveis através da variação da outra. No entanto, ao explorarmos uma tal relação, podemos pensar que uma das variáveis, digamos  $X$ , pode **explicar** ou mesmo **causar** as variações observadas na outra variável  $Y$ . A variável  $Y$  diz-se então **variável resposta** ou **variável dependente**. Por oposição, à variável  $X$  chamamos **variável explicativa** ou **variável independente**. Mais à frente veremos que é possível quantificar o grau de explicação que a variável independente comporta sobre a variável dependente.

No exemplo sobre uma possível relação entre a temperatura máxima diária e o tempo de insolação diário, podemos colocar a possibilidade desta última variável poder explicar a primeira. No último dos exemplos anteriores, ao observarmos o consumo do automóvel para diferentes velocidades, poderá ser razoável pensar que a variação da variável “consumo” possa ser explicada a partir da variação da variável “velocidade”, ou mesmo que a variação desta última seja a causa para a variação da primeira. Nessas

<sup>1</sup>Dados retirados de Santos, N.C. et al. (2003). The CORALIE survey for southern extra-solar planets, *Astronomy & Astrophysics*, 406, 373-381.



circunstâncias, as variáveis “consumo” e “temperatura máxima diária” são as **variáveis dependentes** enquanto que as variáveis “velocidade” e “tempo de insolação diário” são as **variáveis independentes**.

Sempre que estivermos em presença de variáveis com estas características, na construção do gráfico de dispersão devemos colocar no eixo horizontal a variável independente e no eixo vertical a variável dependente.

Antes de terminar este parágrafo frisemos que ao estabelecermos a associação entre duas variáveis, uma dependente e a outra independente, não podemos em geral concluir pela **causalidade** duma delas relativamente à outra. Por outras palavras, não podemos concluir, sem mais, que a causa para a variação da variável dependente seja a variação presente na variável independente.

Um exemplo claro disso é-nos dado no Exemplo 3.1.1. Pensando na classificação de Métodos Quantitativos como variável dependente e na classificação de Matemática e Estatística como variável independente, não podemos deduzir uma relação de causa-efeito entre estas duas variáveis. É mais razoável pensar que associação positiva observada se deve, por exemplo, ao facto de ambas as disciplinas exigirem conhecimentos na área da Matemática. O Exemplo 3.1.2 é outro caso em que sem uma análise mais profunda não podemos dizer que a temperatura máxima é determinada pela insolação. Possivelmente haverá outra ou outras variáveis que não estamos a considerar, que, conjuntamente com a insolação, determinem a temperatura máxima. Também no Exemplo 3.1.7 a associação exibida não pode ser atribuída ao facto da fase ser a causa para a variabilidade observada para velocidade. Os autores do trabalho de onde foram retiradas as observações defendem que em volta desta estrela orbita um planeta gigante, do tipo de Júpiter ou Saturno, pois de outro modo a componente radial da velocidade não variaria de forma sistemática com a fase. Dos exemplos anteriores, o Exemplo 3.1.6 é o que mais próximo está duma relação de causalidade. No entanto, seria importante saber mais sobre a experiência realizada, em particular, se não poderá haver mais variáveis que possam influenciar o consumo além da velocidade. Em caso afirmativo, será que essas variáveis estão controladas nas várias observações feitas a diferentes velocidades?

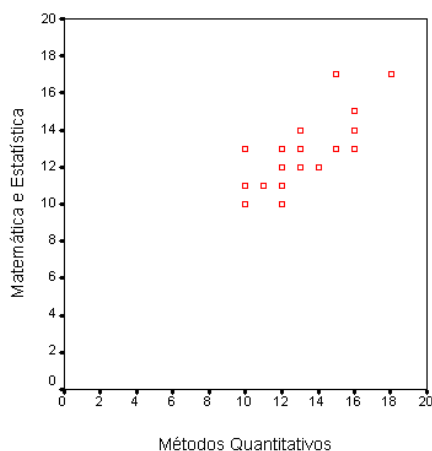
## 3.2 Coeficiente de correlação linear

Um gráfico de dispersão permite por em evidência a **forma**, a **direcção** e a **intensidade** da relação entre duas variáveis quantitativas. A **relação linear** entre duas variáveis é, pela sua simplicidade, particularmente importante.

Na secção anterior, qualificámos a associação linear entre duas variáveis de acordo com a sua intensidade. Usámos as palavras forte, moderada e fraca, para exprimir o

facto dos pontos marcados no gráfico de dispersão estarem mais ou menos próximos duma recta imaginária que atravessa a nuvem dos pontos marcados. Apesar de bastante intuitiva, é por vezes difícil dizer quando é que um par de variáveis revela uma maior associação que outro par de variáveis. Por exemplo, não é fácil ordenar, relativamente ao grau de associação exibido, os pares de variáveis consideradas nos Exemplos 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.4. Por outro lado, esta análise é bastante subjectiva dependendo, em particular, da escala usada no gráfico de dispersão.

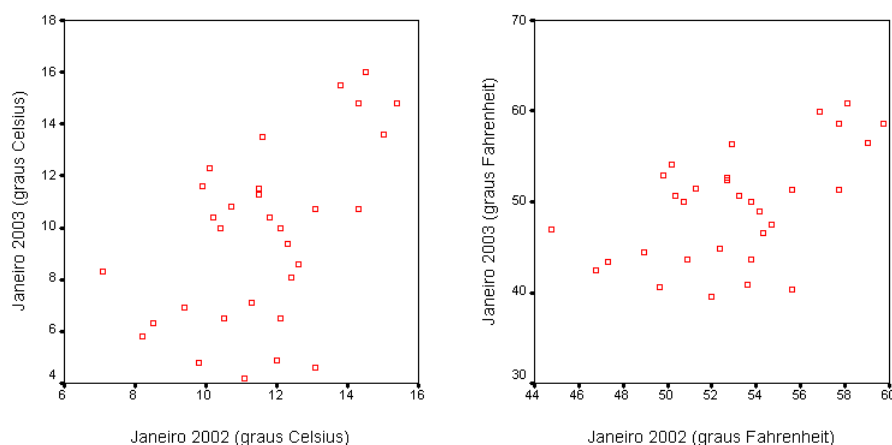
**Exemplo 3.2.1** Para o exemplificar, apresentamos a seguir um gráfico de dispersão relativo aos dados do Exemplo 3.1.1 mas onde tomámos em cada um os eixos, valores de 0 a 20. Tendo classificado de moderada a associação positiva entre estas variáveis, também agora a devemos classificar do mesmo modo. No entanto, é claro que, em termos absolutos, neste gráfico os pontos estão mais próximos duma recta imaginária que atravessa o conjunto dos pontos marcados do que no gráfico do Exemplo 3.1.1.



Uma situação análoga pode ser observada, se alterarmos a unidade da medida que utilizamos para registar os dados, e ao mesmo tempo não tivermos o cuidado de, da mesma forma, alterar os intervalos de variação das variáveis em cada um dos eixos.

**Exemplo 3.2.2** Os gráfico de dispersão seguintes são relativos às temperaturas médias diárias observadas em Coimbra nos meses de Janeiro de 2002 e 2003. Cada um dos pontos do gráfico corresponde a um dos dias do mês. O segundo gráfico parece revelar uma associação mais forte que o primeiro.

Estas considerações tornam clara a necessidade de quantificar a relação entre as variáveis em estudo. Uma forma simples de quantificar a associação linear entre duas variáveis quantitativas, é através do chamado **coeficiente de correlação linear**.



Denotando por  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_x$  e  $s_y$ , a média e o desvio-padrão das observações  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , respectivamente, o **coeficiente de correlação linear** entre as duas variáveis, que denotamos pela letra  $r$ , é definido por

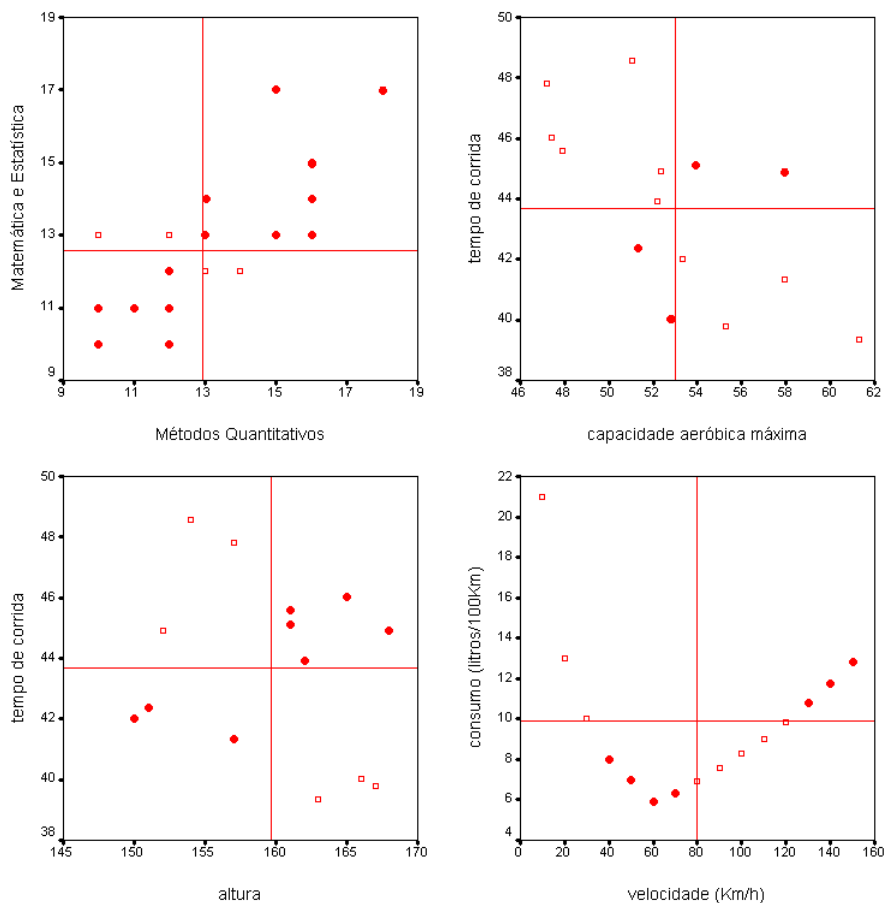
$$r = \frac{1}{n-1} \sum \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) \left( \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right),$$

Na fórmula anterior intervêm as observações **padronizadas** ou **standardizadas** associadas a  $x_i$  e a  $y_i$  que são definidos, respectivamente, por

$$\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \quad \text{e} \quad \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}.$$

Estes valores dão-nos o número de desvios-padrão que cada um dos valores  $x_i$  e  $y_i$ , se afasta da média respectiva. Se, por exemplo, a observação  $x_i$  está à direita de  $\bar{x}$  e a observação  $y_i$  está à esquerda de  $\bar{y}$ , o primeiro dos valores anteriores é positivo e o segundo é negativo. De uma forma geral, se  $x_i$  e  $y_i$  são simultaneamente “grandes” ou simultaneamente “pequenos”, o produto dos seus valores padronizados é positivo e estas observações contribuem positivamente para coeficiente de correlação linear. Se  $x_i$  é “pequeno” quando  $y_i$  é “grande”, ou  $x_i$  é “grande” quando  $y_i$  é “pequeno”, o produto dos seus valores padronizados é negativo e estas observações contribuem negativamente para coeficiente de correlação linear. No primeiro caso, o ponto  $(x_i, y_i)$  está no primeiro ou no terceiro quadrante dum sistema de eixos coordenados com origem em  $(\bar{x}, \bar{y})$ . No segundo caso, o ponto  $(x_i, y_i)$  está no segundo ou no quarto quadrante dum sistema de eixos coordenados com origem em  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Na figura seguinte, identificam-se as observações que contribuem positivamente (marcas circulares) e negativamente (marcas quadradas) para o coeficiente de correlação

Contribuições negativas e positivas para  $r$ 

linear dos pares de variáveis indicadas que considerámos nos Exemplos 3.1.1, 3.1.4 e 3.1.6. Reparemos uma observação  $(x_i, y_i)$  contribui mais para  $r$ , quer positivamente, quer negativamente, quanto mais distantes de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  estejam,  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente (porquê?).

De seguida enumeramos propriedades importantes do coeficiente de correlação linear.

#### Propriedades do coeficiente de correlação linear $r$ :

- ⊙  $r$  é uma medida da associação linear entre duas variáveis quantitativas;  $r$  não descreve associações não-lineares;
- ⊙  $r$  não depende das unidades em que as variáveis estão expressas, isto é,  $r$  é invariante para alterações da unidade de medida;
- ⊙  $r$  toma valores entre  $-1$  e  $1$ ;

**Propriedades do coeficiente de correlação linear  $r$  (cont.):**

- ⊙ valores positivos de  $r$  indicam uma associação positiva, sendo esta associação tanto maior quanto mais  $r$  estiver próximo de 1; no caso limite  $r = 1$ , todas as observações estão sobre uma mesma recta com declive positivo;
- ⊙ valores negativos de  $r$  indicam uma associação negativa, sendo esta associação tanto maior quanto mais  $r$  estiver próximo de  $-1$ ; no caso limite  $r = -1$ , todas as observações estão sobre uma mesma recta com declive negativo;
- ⊙ valores de  $r$  próximos de zero indicam uma fraca associação linear;
- ⊙ como se baseia no cálculo de médias e desvios-padrão,  $r$  é sensível a observações discordantes; deve por isso ser usado com cuidado quando o gráfico de dispersão sugerir a presença de observações discordantes.

A fórmula anteriormente dada para definir  $r$ , apesar de adequada para uma fácil interpretação do coeficiente de correlação linear, não é adequada para o seu cálculo. Em alternativa, este pode ser feito a partir da fórmula seguinte:

**Cálculo do coeficiente de correlação linear:**

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{(n-1) s_x s_y}.$$

**Exemplo 3.2.3** Exemplifiquemos a utilização da fórmula anterior, efectuando o cálculo do coeficiente de correlação linear entre as variáveis “velocidade” ( $X$ ) e “consumo” ( $Y$ ) do Exemplo 3.1.6 (pág. 79). Da tabela seguinte, concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 1200/15 = 80, \\ s_x &= \sqrt{\frac{124000 - 15 \times 80^2}{14}} \approx 44.72, \\ \bar{y} &= 148.28/15 \approx 9.89, \\ s_y &= \sqrt{\frac{1670.01 - 15 \times (148.28/15)^2}{14}} \approx 3.82, \end{aligned}$$

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
1	10	21.00	100	441.00	210.00
2	20	13.00	400	169.00	260.00
3	30	10.00	900	100.00	300.00
4	40	8.00	1600	64.00	320.00
5	50	7.00	2500	49.00	350.00
6	60	5.90	3600	34.81	354.00
7	70	6.30	4900	39.69	441.00
8	80	6.95	6400	48.30	556.00
9	90	7.57	8100	57.30	681.30
10	100	8.27	10000	68.39	827.00
11	110	9.03	12100	81.54	993.30
12	120	9.87	14400	97.42	1184.40
13	130	10.79	16900	116.42	1402.70
14	140	11.77	19600	138.53	1647.80
15	150	12.83	22500	164.61	1924.50
$\Sigma$	1200	148.28	124000	1670.01	11452.00

e

$$r \approx \frac{11452 - 15 \times 80 \times (148.28/15)}{14 \times 44.72 \times 3.82} \approx -0.17.$$

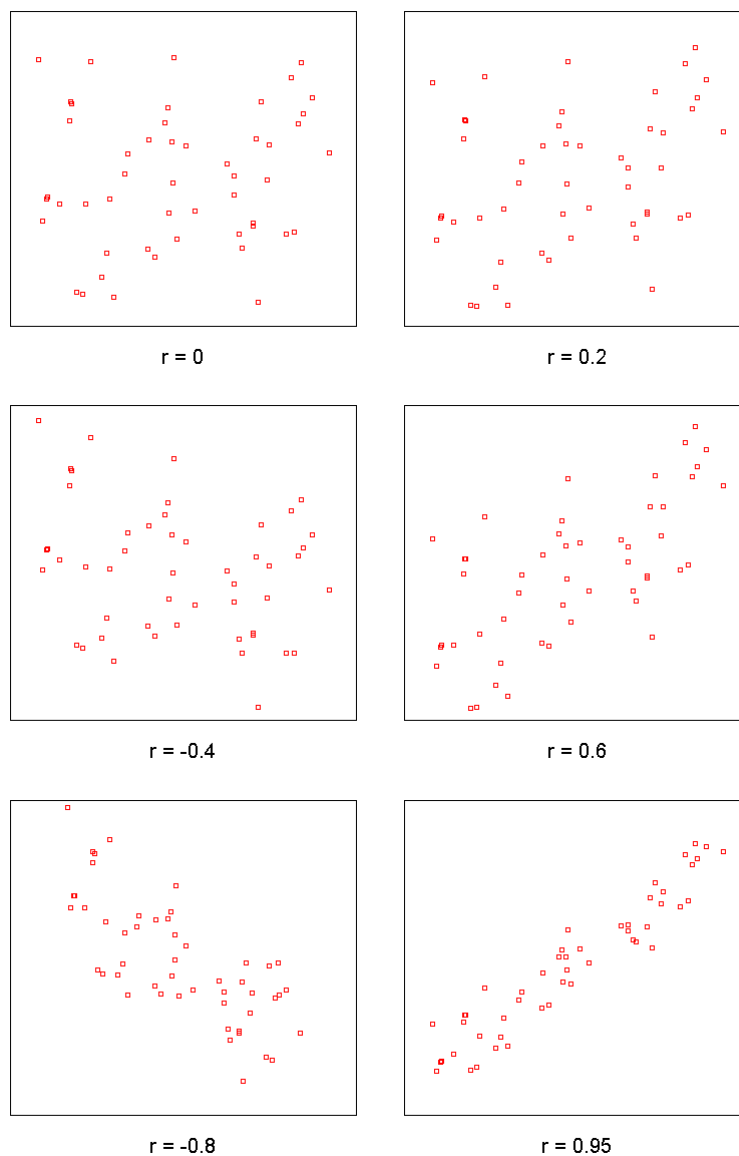
Sendo o valor de  $r$  próximo de zero, concluímos não haver associação linear entre as variáveis. Como podemos constatar através do primeiro gráfico do Exemplo 3.1.6, existe, contudo, uma relação não-linear entre as duas variáveis.

**Exemplo 3.2.4** O cálculo do coeficiente de correlação linear pode ser feito de forma rápida utilizando o SPSS. Na tabela seguinte indica-se o coeficiente de correlação linear, conhecido também por coeficiente de correlação de Pearson, entre o consumo doméstico de electricidade em Coimbra e a população aí residente no período 1991 e 2001.

		consumo doméstico	população residente
consumo doméstico / 1000000 Kwh	Pearson Correlation	1	.926**
	Sig. (2-tailed)	.	.000
	N	11	11
população residente / 1000	Pearson Correlation	.926**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	.
	N	11	11

\*\* . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tal como já tínhamos constatado no Exemplo 3.1.3 (pág. 77), a partir do gráfico de dispersão, a associação positiva entre estas duas variáveis é forte.

Associação linear em função de  $r$ 

Os gráficos de dispersão da figura anterior ilustram a maior ou menos associação linear em função do coeficiente de correlação linear. Para que a comparação dos vários gráficos seja possível, os desvios-padrão de ambas as variáveis são iguais e as escalas de ambos os eixos são as mesmas.

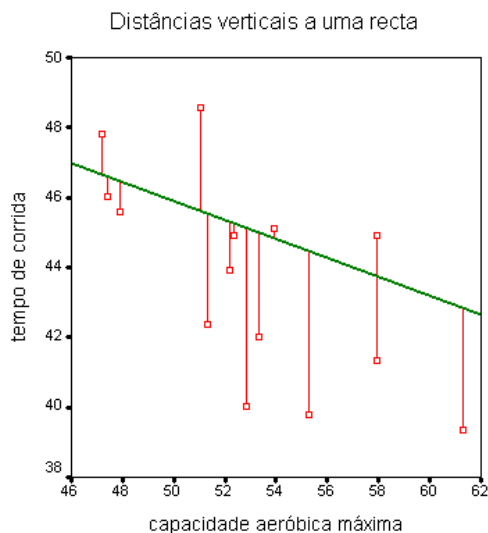
### 3.3 Recta de regressão

Quando pretendemos resumir a informação contida num gráfico de dispersão que revela uma associação linear entre as duas variáveis em presença, é natural tentar

ajustar aos dados uma recta. Essa recta resumirá tanto melhor a informação contida nos dados quanto maior for a associação, quer negativa, quer positiva, existente entre as variáveis em estudo. No caso dessa associação ser elevada, a recta poderia ainda ser utilizada para inferir o valor  $y$  duma das variáveis a partir do valor  $x$  da outra.

Desejando determinar uma recta que se “ajuste aos dados”, surge naturalmente o problema de saber o que isto significa. A ideia intuitiva, é a de que uma tal recta deve estar próxima, num certo sentido, de todos os pontos do gráfico de dispersão, ou, inversamente, todos os pontos do gráfico devem estar próximos, num certo sentido, da recta em causa. Usando um critério matemático conhecido como dos **mínimos quadrados**, que consiste em determinar a recta para a qual a soma dos quadrados das distâncias verticais entre a recta e os pontos  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  é a mais pequena possível, podemos determinar com facilidade essa recta a que chamamos **recta dos mínimos quadrados** ou **recta de regressão** de  $Y$  sobre  $X$ .

No gráfico seguinte, que reproduz o primeiro gráfico de dispersão do Exemplo 3.1.4, e para uma recta nele desenhada, marcamos as distâncias verticais entre essa recta e cada um dos pontos do gráfico.



Como sabemos, uma recta tem por equação

$$y = ax + b$$

bastando para a sua determinação, calcular os coeficientes  $a$  (declive) e  $b$  (ordenada na origem). O declive e a ordenada na origem da **recta de regressão** são dados a seguir. Sendo  $a = r s_y / s_x$  o declive da recta de regressão, podemos concluir que uma variação de um desvio-padrão em  $x$  corresponde a uma variação de  $r$  desvios-padrão em  $y$ . A recta de regressão tem a propriedade de passar sempre no ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$ .



**Determinação da recta de regressão:**

⊙ declive:

$$a = r \frac{s_y}{s_x} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{(n-1) s_x^2}$$

⊙ ordenada na origem:

$$b = \bar{y} - a \bar{x}.$$

Notemos que, contrariamente ao coeficiente de correlação linear que não usa o facto de uma das variáveis poder ajudar a explicar ou a prever a outra, a **recta de regressão** necessita que tenhamos uma variável dependente ( $Y$ ) e uma variável independente ( $X$ ). Em particular, a recta de regressão de  $Y$  sobre  $X$  não coincide com a recta de regressão de  $X$  sobre  $Y$ .

**Exemplo 3.3.1** Para os dados descritos no Exemplo 3.1.4 (pág. 77) e considerando o tempo de corrida como variável dependente ( $Y$ ) e a capacidade aeróbica máxima como variável independente ( $X$ ), determinemos a equação da recta de regressão.

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
1	61.32	39.37	3760.1424	1549.9969	2414.1684
2	55.29	39.80	3056.9841	1584.0400	2200.5420
3	52.83	40.03	2791.0089	1602.4009	2114.7849
4	57.94	41.32	3357.0436	1707.3424	2394.0808
5	53.31	42.03	2841.9561	1766.5209	2240.6193
6	51.32	42.37	2633.7424	1795.2169	2174.4284
7	52.18	43.93	2722.7524	1929.8449	2292.2674
8	52.37	44.90	2742.6169	2016.0100	2351.4130
9	57.91	44.90	3353.5681	2016.0100	2600.1590
10	53.93	45.12	2908.4449	2035.8144	2433.3216
11	47.88	45.60	2292.4944	2079.3600	2183.3280
12	47.41	46.03	2247.7081	2118.7609	2182.2823
13	47.17	47.83	2225.0089	2287.7089	2256.1411
14	51.05	48.55	2606.1025	2357.1025	2478.4775
$\Sigma$	741.91	611.78	39539.5737	26846.1296	32316.0137

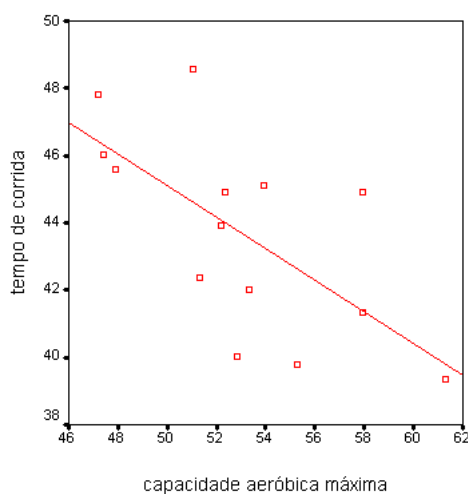
Assim,

$$\bar{x} \approx 52.994, \quad s_x \approx 4.143, \quad \bar{y} \approx 43.699, \quad s_y \approx 2.938,$$

$$r \approx -0.660, \quad a \approx -0.468, \quad b \approx 68.500,$$

e a recta de regressão, que traçamos na figura seguinte, tem por equação

$$y = -0.468x + 68.5.$$



Como já referimos, a recta de regressão é habitualmente utilizada para **inferir** o valor da variável dependente a partir do valor da variável independente. Por exemplo, para uma corredora com uma capacidade aeróbica máxima de 50, a recta de regressão anterior permite obter a **previsão**  $\hat{y}$  para o seu tempo de corrida:

$$\hat{y} = -0.468 \times 50 + 68.5 = 45.1.$$

Utilizando o SPSS podemos obter os quadros seguintes que contêm, entre outras coisas, o coeficiente de correlação linear, a ordenada na origem e o declive da recta de regressão.

**Model Summary**

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,660 <sup>a</sup>	,435	,388	2,29805

a. Predictors: (Constant), capacidade aeróbica máxima

**Coefficients<sup>a</sup>**

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	68,494	8,176		8,377	,000
	capacidade aeróbica máxima	-,468	,154	-,660	-3,041	,010

a. Dependent Variable: tempo de corrida

No primeiro quadro, é também apresentado o quadrado do coeficiente de correlação linear,  $r^2$ , denominado **coeficiente de determinação**. Este coeficiente tem uma interpretação bastante importante.  $r^2$  é a fracção da variabilidade da variável dependente  $Y$  que é explicada pela regressão da variável dependente sobre a variável independente.

$r^2$  é assim uma **medida da qualidade da regressão** na explicação da variável dependente. No caso do exemplo anterior, podemos dizer que a capacidade aeróbica máxima explica 43.5% da variação observada no tempo de corrida.

**Exemplo 3.3.2** Para os dados descritos no Exemplo 3.1.2 (pág. 76) e tomando a variável “horas de insolação diárias” como variável independente  $Y$  e a “temperatura máxima diária” como variável dependente  $X$ , concluímos dos quadros seguintes que a recta de regressão de  $Y$  sobre  $X$  tem por equação

$$y = 0.619x + 22.002$$

e que as horas de insolação diárias explicam 48.1% da temperatura máxima diária.

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.694 <sup>a</sup>	.481	.476	2,58953

a. Predictors: (Constant), insolação (horas)

b. Dependent Variable: temperatura máxima

Coefficients<sup>a</sup>

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	22,002	,651		33,811	,000
	insolação (horas)	,619	,068	.694	9,140	,000

a. Dependent Variable: temperatura máxima

**Exemplo 3.3.3** O INE publica nos seus anuários regionais, estimativas para a população residente nos vários concelhos do país. Aproveitando a associação linear forte existente entre o consumo doméstico de electricidade e a população residente em Coimbra no período 1991 a 2001 (ver Exemplo 3.1.3, pág. 77, 86), a recta de regressão da população residente sobre consumo doméstico de electricidade em Coimbra, permite apresentar uma previsão para a população residente em Coimbra no ano de 2002 a partir do consumo doméstico de electricidade verificado em Coimbra nesse ano. Do quadro seguinte

Coefficients<sup>a</sup>

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	113,424	3,917		28,958	,000
	consumo doméstico	,181	,025	.926	7,351	,000

a. Dependent Variable: população residente

obtemos a equação da recta de regressão

$$\text{população residente} = 0.191 \times \text{consumo doméstico de electricidade} + 113.9$$

### 3.4 Gráfico de resíduos

A recta de regressão é um **modelo matemático** para o padrão global da associação linear entre duas variáveis  $Y$  e  $X$ , a que chamamos **modelo de regressão linear**. Como tal, descreve ou resume esse padrão global mas não descreve desvios sistemáticos a esse padrão global. A análise dos desvios das observações relativamente ao modelo matemático, permite avaliar a adequação desse modelo às observações e identificar **observações discordantes**, que no contexto da associação entre duas variáveis podem ser discordantes em qualquer uma das direcções  $x$  ou  $y$ .

Sendo os coeficientes da recta de regressão baseados no cálculo de médias e desvios-padrão, será de esperar que tais coeficientes sejam **pouco resistentes**, isto é, muito sensíveis a observações muito maiores ou menores que as restantes observações. É assim importante perceber a **influência** que essas observações discordantes têm, por si só, no cálculo da recta de regressão. Não seria razoável que a recta de regressão, que deverá descrever o padrão global das observações, seja determinada por observações que se desviam desse padrão global.

Uma forma de medirmos o desvio duma observação  $(x_i, y_i)$  relativamente ao padrão global, que assumimos resumido pela recta de regressão, é considerar o **resíduo**  $r_i$  associado a essa observação que não é mais do a diferença entre a observação  $y_i$  e a **previsão**

$$\hat{y}_i = a x_i + b$$

obtida a partir da recta de regressão:

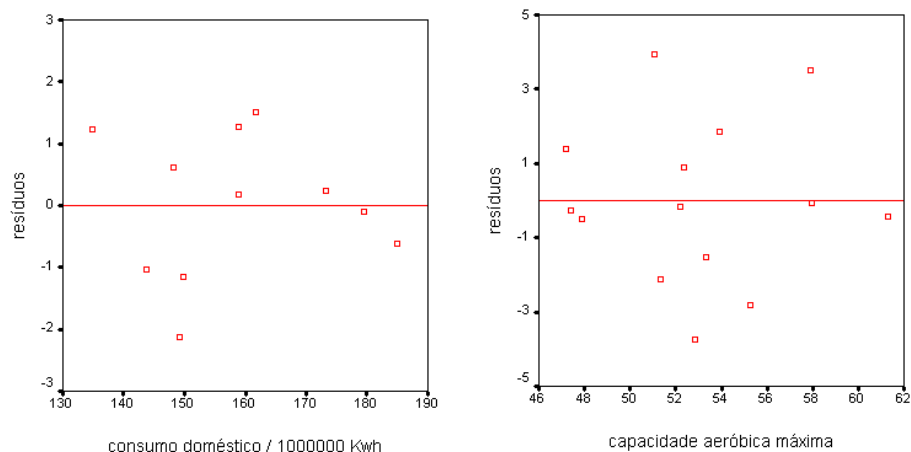
$$\text{resíduo } r = \text{observação } y - \text{previsão } \hat{y}$$

Reparemos que o resíduo  $r_i$  não é mais do que a distância vertical com sinal entre o ponto  $(x_i, y_i)$  e a recta de regressão. O resíduo  $r_i$  será positivo ou negativo consoante o ponto  $(x_i, y_i)$  esteja acima ou abaixo, respectivamente, da recta de regressão.

Para analisarmos os diversos resíduos vamos representá-los graficamente no chamado **gráfico de resíduos**. Um **gráfico de resíduos** é um gráfico de dispersão dos resíduos versus a variável independente. Neste gráfico é habitualmente marcada a recta horizontal correspondente às observações que não exibem qualquer desvio relativamente à recta de regressão. Acima e abaixo desta recta horizontal estão as observações que se encontram acima e abaixo, respectivamente, da recta de regressão. A distância de cada ponto à recta horizontal é precisamente a distância vertical, observada no gráfico de dispersão, entre a correspondente observação e a recta de regressão.

Se a recta de regressão descreve bem o padrão geral das observações, o gráfico de resíduos não deve apresentar nenhum padrão especial. Nesse caso, os resíduos têm a interessante propriedade de terem média zero, e os pontos marcados dispõem-se para um e outro lado da recta horizontal marcada no gráfico.

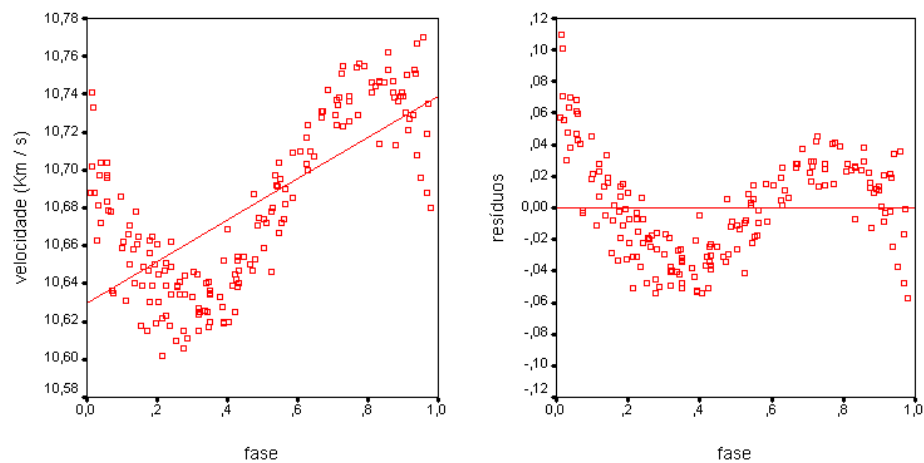
**Exemplo 3.4.1** Os gráficos de resíduos seguintes relativos aos dados dos Exemplos 3.1.3 (pág. 77, 86) e 3.1.4 (pág. 77), são exemplos de uma tal situação. Os padrões revelados pelos gráficos são típicos de observações que não exibem desvios sistemáticos relativamente ao modelo definido pela recta de regressão.



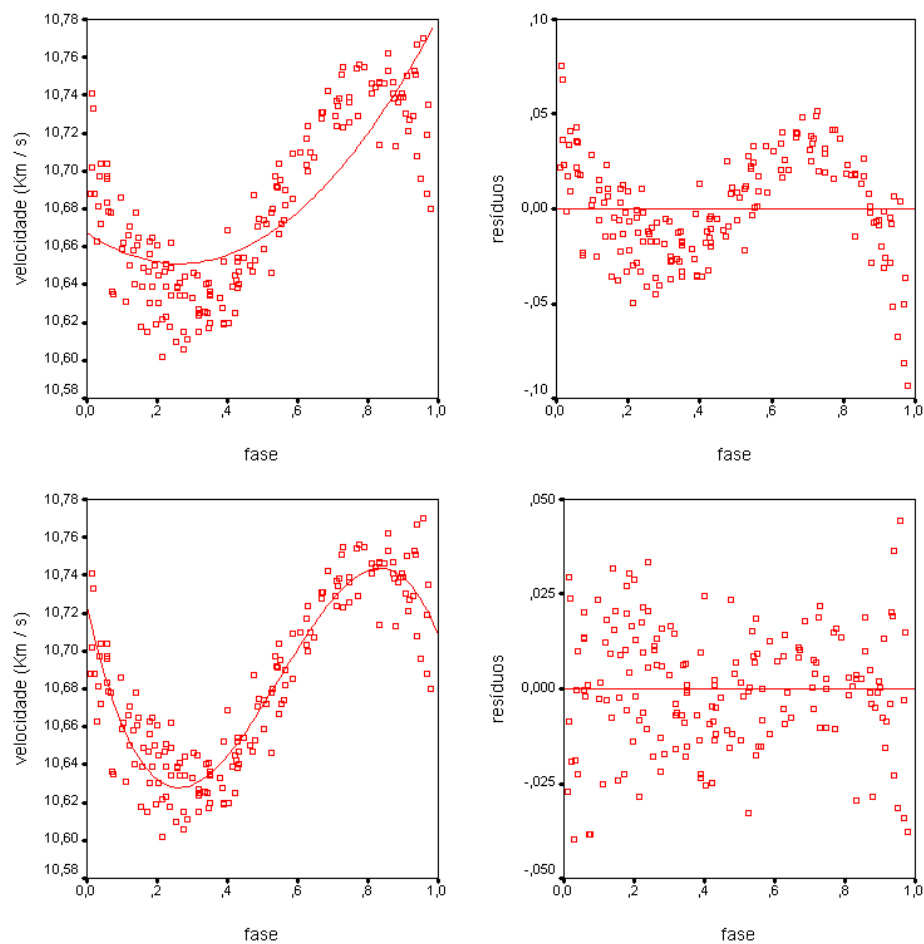
Se o gráfico de dispersão apresenta um padrão bem definido, podemos concluir que o modelo linear dado pela recta de regressão não descreve convenientemente os dados. Em particular, o padrão revelado pelo gráfico de resíduos é relativo à parte do padrão de associação entre as duas variáveis que não foi apreendida pela recta de regressão.

**Exemplo 3.4.2** Um exemplo desta situação ocorreria se descrevêssemos através duma recta as observações, que descrevemos no Exemplo 3.1.7 (pág. 80), sobre da componente da velocidade radial da estrela e da fase em que as observações foram realizadas. O gráfico de resíduos correspondente, revelaria uma forma sinusoidal que não é captada pela recta de regressão (ver figuras seguintes).

Há no entanto outros modelos matemáticos que poderiam descrever melhor o padrão revelado pelos dados anteriores. Sem entrar em detalhes sobre tais modelos, vejamos o resultados da utilização dum modelo de **regressão quadrática** e dum modelo de **regressão cúbica**. Como os próprios nomes indicam, no primeiro caso os dados são descritos por uma curva de equação  $y = ax^2 + bx + c$ , enquanto que no segundo caso é usada uma curva de equação  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Como podemos concluir dos

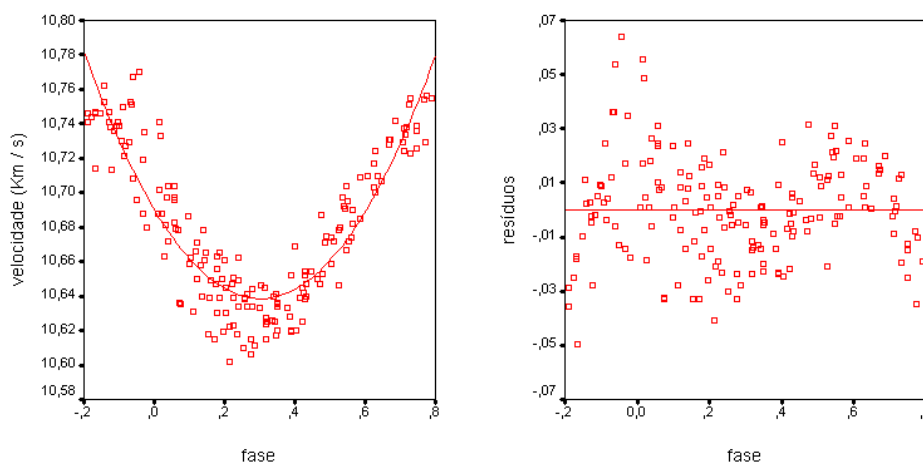


gráficos seguintes, dos modelos considerados apenas o modelo de regressão cúbica descreve os dados convenientemente.

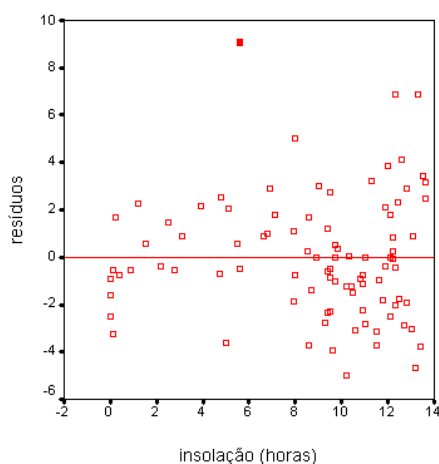


Tratando-se no entanto de observações periódicas, se alterarmos o instante a partir

do qual marcamos o tempo, é possível ajustar aos dados anteriores um modelo de regressão quadrática. Da análise dos gráficos de resíduos parece-nos que este modelo não descreve os dados tão bem como o modelo de regressão cúbica considerado atrás.

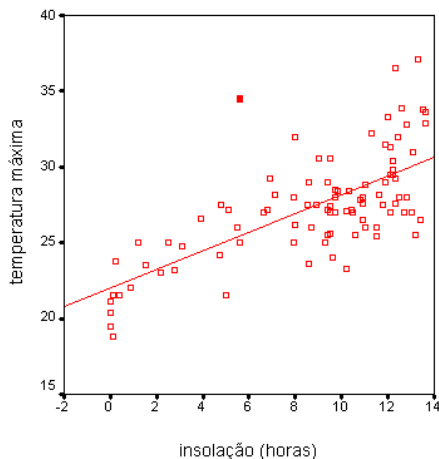


**Exemplo 3.4.3** Relativamente aos dados do Exemplo 3.1.2 (pág. 76), o gráfico de resíduos seguinte põe claramente em evidência a observação discordante que tínhamos identificado a partir do gráfico de dispersão.



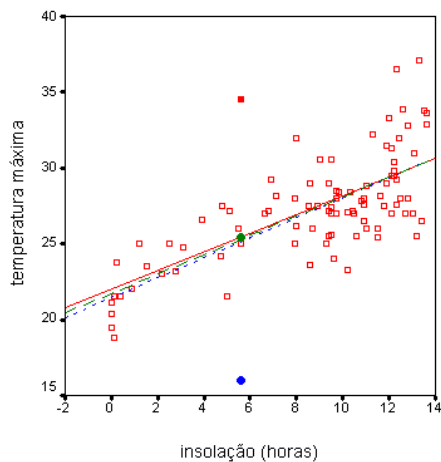
Como podemos constatar, trata-se duma observação discordante na direcção do eixo dos  $yy$ . O gráfico revela ainda que maiores resíduos estão, em geral, associados a valores elevados ou muito pequenos de insolação. As previsões para a temperatura máxima a partir da recta de regressão calculada atrás, são assim menos exactas para esses valores de insolação. É interessante notar, que esta observação discordante na direcção  $y$ , não é discordante quando considerada como observação da variável  $Y$ . Relativamente a esta

variável podemos identificar, pelos métodos que já estudámos, quatro possíveis observações discordantes: duas por defeito e duas por excesso. Como podemos confirmar pelo gráfico seguinte, nenhuma das observações discordantes por excesso é a observação que identificámos como discordante na direcção  $y$ .



Contrariamente ao que vimos no capítulo anterior em que uma observação discordante influenciava, só por si, o cálculo da média e do desvio-padrão, no contexto da regressão uma observação discordante na direcção  $y$ , apesar de ter um resíduo grande, não é necessariamente uma observação **influyente**.

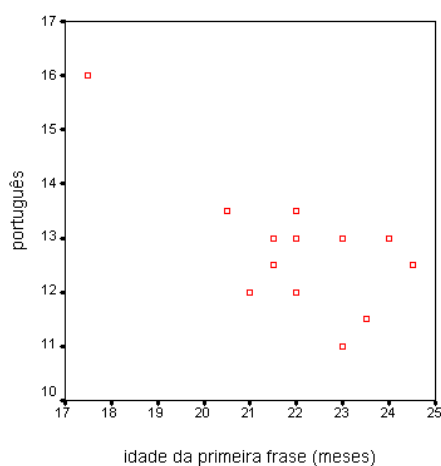
Na figura seguinte, ilustra-se esta situação deslocando verticalmente a observação discordante identificada no exemplo anterior, colocando-a primeiramente em cima da recta de regressão e depois em baixo desta. Como podemos verificar, a recta de regressão não sofreu uma alteração significativa.





Uma situação completamente diferente ocorre quando o gráfico de dispersão apresenta uma nuvem de pontos muito concentrada e um ponto afastado. Este ponto tem normalmente uma grande influência na recta de regressão.

**Exemplo 3.4.4** Os dados apresentados no gráfico de dispersão seguinte dizem respeito a treze adolescentes para os quais foram registadas a idade em que disseram a primeira frase (em meses) e as classificações obtidas numa prova de aferição das suas capacidades em língua portuguesa.



Tomando a variável classificação em português como variável resposta  $Y$  e a variável idade da primeira frase como variável explicativa  $X$ , obtemos os resultados seguintes. Em particular, concluímos que a variável  $X$  explica 50% da variabilidade da variável  $Y$ .

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,707 <sup>a</sup>	,500	,455	,8985

a. Predictors: (Constant), idade da primeira frase

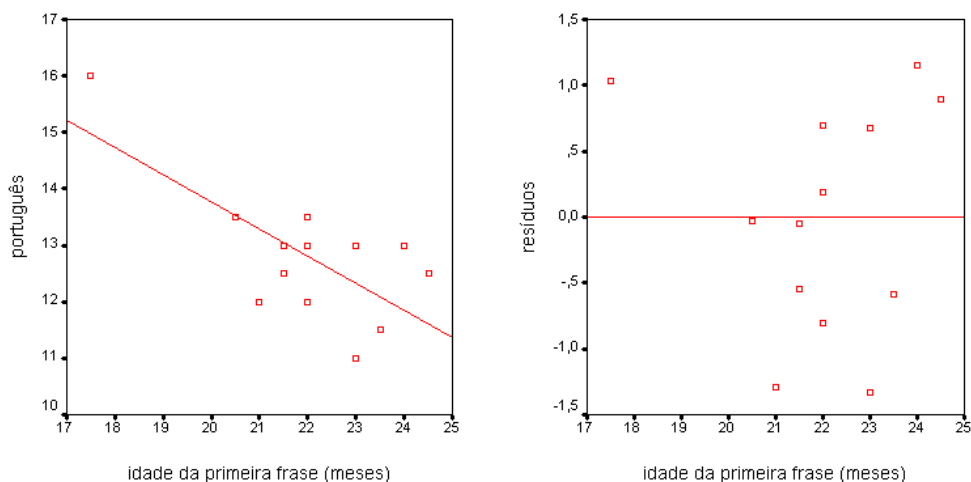
b. Dependent Variable: português

Coefficients<sup>a</sup>

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	23,379	3,195		7,317	,000
	idade da primeira frase	-,481	,145	-,707	-3,318	,007

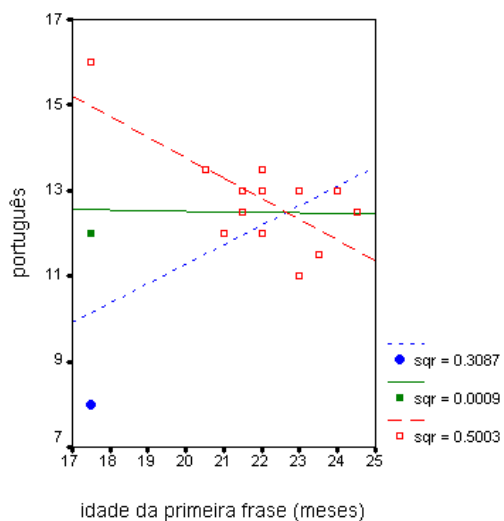
a. Dependent Variable: português

O gráfico de resíduos põe em evidência a presença duma observação discordante na direcção  $x$  mas não na direcção  $y$ , como poderia transparecer do gráfico de dispersão anterior. Este facto pode ser facilmente entendido se tivermos em conta a posição da recta de regressão.



Como já referimos, esta observação, além de **discordante**, é também uma observação muito **influyente**. As conclusões que podemos tirar dos dados anteriores, dependem de forma determinante desta observação. Tal é claro a partir da figura seguinte. Repararemos também nas alterações significativas do coeficiente de determinação.

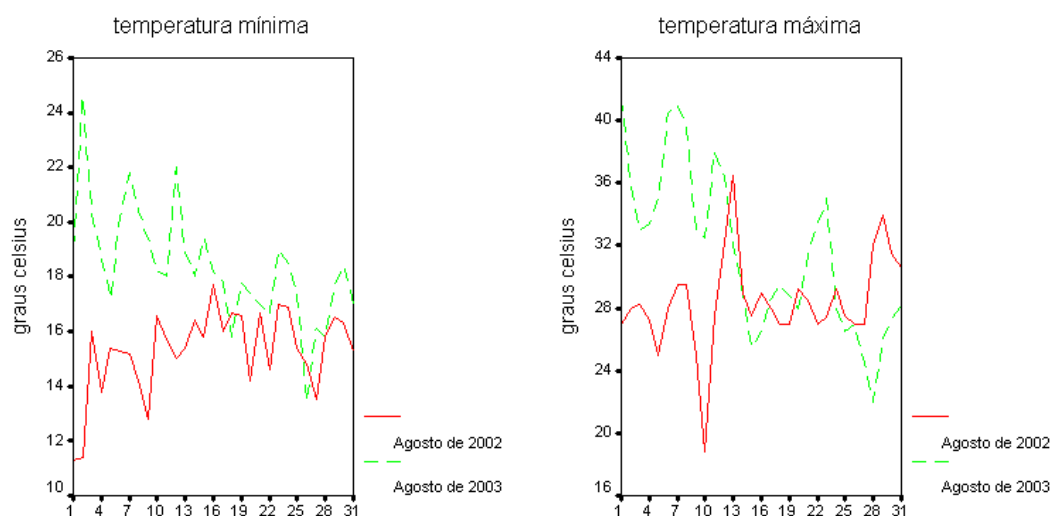
Tratando-se de uma verdadeira observação discordante, ela deve ser corrigida ou eliminada. No entanto, se a observação estiver correcta, é necessário recolher mais informação se pretendemos chegar a alguma conclusão válida. Tendo em conta que a observação influente corresponde a um adolescente que pronunciou a primeira frase precocemente, essa informação adicional deve incidir sobre este tipo de adolescentes.



### 3.5 O tempo como variável independente

Há variáveis que são observadas ao longo do tempo. Este tipo de observações pode ser descrito graficamente representando os pontos  $(t, y_t)$ , eventualmente ligados com segmentos de recta, num sistema de eixos coordenados, onde  $t$  é instante de observação e  $y_t$  a observação.

**Exemplo 3.5.1** A título de exemplo consideremos os gráficos seguintes que descrevem a evolução das temperaturas mínima e máxima registadas em Coimbra nos meses de Agosto de 2002 e 2003 (ver Exemplo 1.3.16).

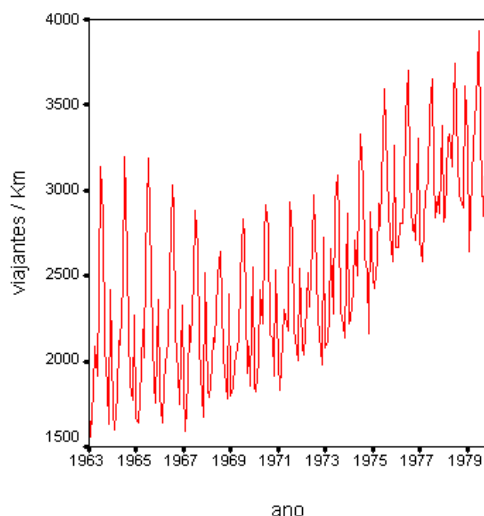


Notemos que ao serem registadas as séries correspondentes aos dois anos num mesmo gráfico, podemos ainda comparar a evolução das temperaturas para os dois anos em estudo.

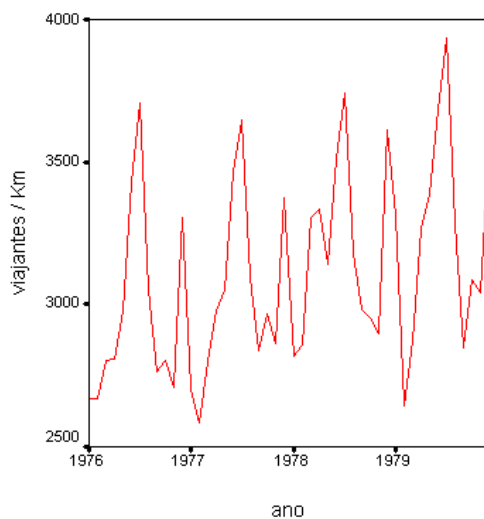
A este tipo de gráficos, em que o tempo é marcado no eixo horizontal e no eixo vertical é marcada a quantidade numérica de interesse chamamos **cronogramas** ou **gráficos sequenciais**. Como as observações  $y_t$  são realizadas ao longo do tempo dizemos que as observações constituem uma **série temporal** ou **cronológica**. Quando representamos a evolução da variável com o tempo através dum **cronograma** os padrões que podemos encontrar são os mais diversos possíveis.

**Exemplo 3.5.2** O cronograma seguinte é relativo ao tráfego de passageiros em segunda classe em milhões de passageiros por quilómetro no sistema de caminhos de ferro francês, de Janeiro de 1963 a Dezembro de 1979.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Dados retirados de Gouriéroux, C., Monfort, A. (1990). *Séries Temporelles et Modèles Dynamiques*, Economica, pág. 5.



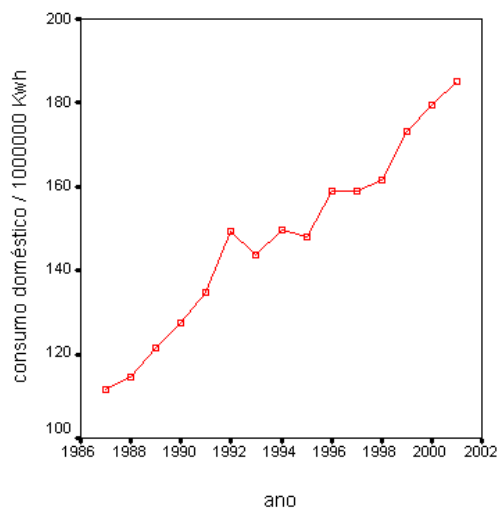
Nele estão representadas as duas componentes principais duma série cronológica. A **tendência**, que descreve o comportamento geral e a longo termo da série, e que caso do exemplo anterior revela um crescimento acentuado, e a **sazonalidade** que descreve as flutuações periódicas e sistemáticas, habitualmente sazonais, da série. No caso anterior, é clara a presença de uma componente sazonal. No gráfico seguinte, apenas o período de Janeiro de 1976 a Dezembro de 1979 está representado para pôr em evidência as flutuações sazonais. Os meses de Julho e Dezembro são claramente os períodos de maior afluência de passageiros, enquanto que Fevereiro e Setembro são os meses de menor afluência de passageiros.



Um modelo matemático para descrever o padrão revelado pelo gráfico anterior e que possa ser usado para fazer previsões de valores futuros da série, é necessariamente mais

complexo do que o **modelo linear** que temos vindo a considerar ao longo deste capítulo. No entanto, quando o cronograma da série revelar um padrão aproximadamente linear, é razoável pensar que as técnicas que utilizámos nas secções anteriores possam ser usadas.

**Exemplo 3.5.3** Os consumos domésticos anuais de electricidade (em Kwh/10<sup>6</sup>) registados em Coimbra no período de 1987 a 2001 foram, respectivamente, de: 111.724, 114.459, 121.529, 127.476, 134.870, 149.202, 143.766, 149.742, 148.163, 158.834, 158.797, 161.730, 173.132, 179.556, 185.026 (dados da EDP). A evolução de tais consumos é descrita graficamente pelo cronograma seguinte.



Reparemos que sendo os consumos em causa anuais, não existe uma componente sazonal nesta série cronológica. Além disso, a tendência é aproximadamente linear e crescente.

Se, tal como nos parágrafos anteriores, pretendemos apresentar uma previsão para o consumo doméstico de electricidade em Coimbra em 2002, será natural considerar a recta de regressão do consumo sobre a variável ano.

Coefficients<sup>a</sup>

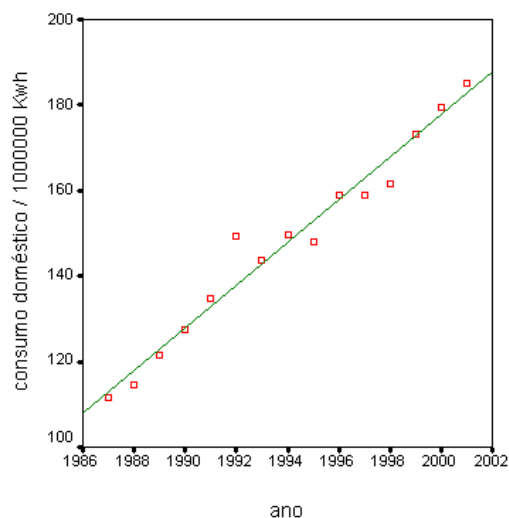
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-9780,607883	508,196		-19,246	,000
	ano	4,979175	,255	,983	19,537	,000

a. Dependent Variable: consumo doméstico / 1000000 Kwh

Do quadro anterior obtemos como equação da recta de regressão

$$\text{consumo} = 4.979175 \times \text{ano} - 9780.607883,$$

que representamos na figura seguinte:



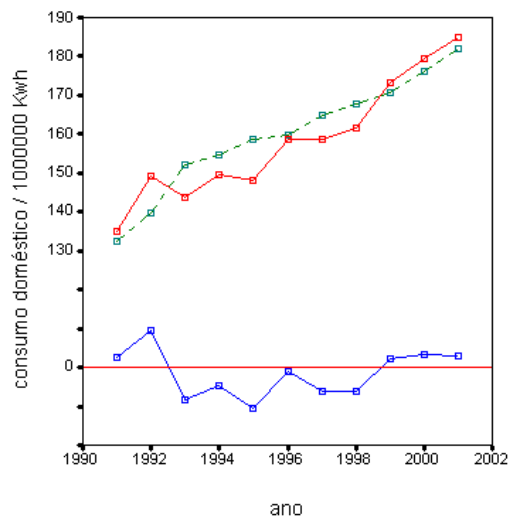
Utilizando este modelo para prever o consumo doméstico de electricidade em Coimbra em 2002, obtemos a estimativa:

$$4.979175 \times 2002 - 9780.607883 = 187.700467,$$

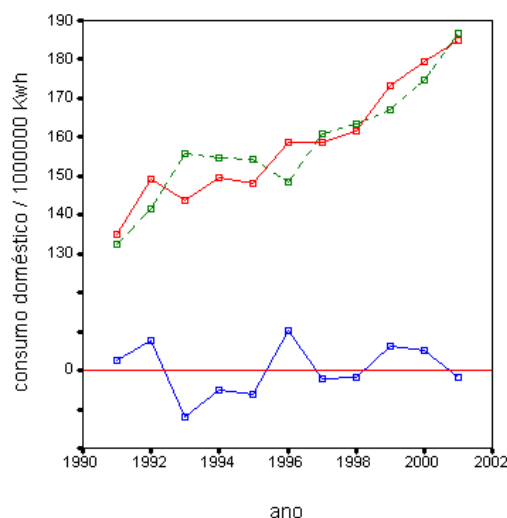
ou seja,

previsão para o consumo doméstico em 2002 = 187700467 Kwh.

Se o processo anterior tivesse sido usado para prever o consumo em cada um dos anos de 1991 a 2001, a partir dos consumos realizados nos anos anteriores desde 1987, teríamos obtido as estimativas que apresentamos no gráfico seguinte (a tracejado), onde também marcamos os verdadeiros consumos (a cheio) e os sucessivos resíduos.



Um outro método de previsão poderia ser obtido se nas previsões do consumo para cada ano usássemos apenas os quatro anos imediatamente anteriores. Nesse caso, obteríamos o gráfico seguinte.



Pretendendo apresentar uma previsão para o consumo doméstico em 2002, o quadro seguinte dá-nos os coeficientes da recta de regressão do consumo sobre a variável ano baseada apenas nos anos de 1998 a 2001:

**Coefficients<sup>a</sup>**

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-15083,723400	1959,794		-7,697	,016
	ano (1998 a 2001)	7,631200	,980	,984	7,786	,016

a. Dependent Variable: consumo

Utilizando este modelo para prever o consumo doméstico de electricidade em Coimbra em 2002, obtemos a estimativa:

$$7.631200 \times 2002 - 15083.723400 = 193.939,$$

ou seja,

$$2^{\text{a}} \text{ previsão para o consumo doméstico em 2002} = 193939000 \text{ Kwh.}$$

Quando o cálculo da previsão é feito sem auxílio do computador, o cálculo dos coeficientes  $a$  e  $b$  da recta de regressão torna-se mais simples se codificarmos os instantes em que são observados os valores da série. Sendo o número de anos observados ímpar, devemos codificar o ano central com o valor 0, com valores 1, 2, ... todos os anos que

o seguem, e com valores  $-1, -2, \dots$  todos os anos que o precedem. Se o número de anos observados é par, os dois anos centrais deverão ser codificados com os valores  $-1$  e  $1$ , enquanto que os anos seguintes e anteriores devem ser codificados com  $3, 5, \dots$ , e  $-3, -5, \dots$ , respectivamente.

Estas codificações têm a vantagem da soma dos valores da nova variável tempo ( $t$ ) ser sempre igual a zero, o que simplifica o cálculo dos coeficientes da recta de regressão. O que dissemos para observações anuais vale para qualquer tipo de observações que se efectuem em intervalos de tempo regulares.

**Determinação da recta de regressão com variável independente codificada:**

⊙ declive:

$$a = \frac{\sum t y_t}{\sum t^2}$$

⊙ ordenada na origem:

$$b = \bar{y}.$$

**Exemplo 3.5.3** (cont.) Usando o processo anterior de codificação das datas, recalculamos as duas previsões apresentadas para o consumo doméstico de electricidade para 2002 em Coimbra. Utilizando na previsão os valores dos consumos registados de 1987 a 2001 (15 anos), obtemos a tabela seguinte.

Assim

$$a = \frac{1394.169}{280} \approx 4.979175 \quad \text{e} \quad b = \frac{2218.006}{15} = 147.867067.$$

Devido ao facto de trabalharmos com observações codificadas, o coeficiente  $b$  não é igual ao coeficiente que encontrámos para observações não codificadas. O coeficiente  $a$  não é alterado.

Como previsão para o consumo doméstico em Coimbra para 2002, e tendo em conta que este ano é agora codificado com o número 8, obtemos:

$$4.979175 \times 8 + 147.867067 = 187.700467$$

ou seja,

$$1^{\text{a}} \text{ previsão para o consumo doméstico em 2002} = 187700467 \text{ Kwh.}$$



ano	$t$	$y_t$	$t^2$	$t y_t$
1987	-7	111.724	49	-782.068
1988	-6	114.459	36	-686.754
1989	-5	121.529	25	-607.645
1990	-4	127.476	16	-509.904
1991	-3	134.870	9	-404.610
1992	-2	149.202	4	-298.404
1993	-1	143.766	1	-143.766
1994	0	149.742	0	0
1995	1	148.163	1	148.163
1996	2	158.834	4	317.668
1997	3	158.797	9	476.391
1998	4	161.730	16	646.920
1999	5	173.132	25	865.660
2000	6	179.556	36	1077.336
2001	7	185.026	49	1295.182
$\Sigma$	0	2218.006	280	1394.169

Usando agora na previsão apenas os anos de 1998 a 2001 (4 anos), obtemos:

ano	$t$	$y_t$	$t^2$	$t y_t$
1998	-3	161.730	9	-485.190
1999	-1	173.132	1	-173.132
2000	1	179.556	1	179.556
2001	3	185.026	9	555.078
$\Sigma$	0	699.444	20	76.312

Assim

$$a = \frac{76.312}{20} = 3.8156 \quad \text{e} \quad b = \frac{699.444}{4} = 174.861.$$

Como previsão para o consumo doméstico em Coimbra para 2002, e tendo em conta que este ano é codificado com o número 5, obtemos:

$$3.8156 \times 5 + 174.861 = 193.939$$

ou seja,

$$2^{\text{a}} \text{ previsão para o consumo doméstico em 2002} = 193939000 \text{ Kwh.}$$

Reencontramos, como seria de esperar, as previsões anteriormente calculadas.

### 3.6 Bibliografia

Abraham, B., Ledolter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*, Wiley.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.

Murteira, B.J.F. (1993). *Análise Exploratória de Dados. Estatística Descritiva*, McGraw-Hill.

Pestana, D.D., Velosa, S.F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian.

## Parte II

# A caminho da Inferência Estatística



## Capítulo 4

# A recolha dos dados

*Estudos observacionais e experiências. Planeamento de experiências. Factor, nível, tratamento. Experiências controladas. Números aleatórios e aleatorização na constituição dos grupos. Constituição de blocos e emparelhamento. Planeamento de estudos por amostragem. População, amostra, parâmetro, estatística. Amostragem aleatória simples, estratificada e em várias etapas. Métodos de amostragem não-aleatórios. Viés e variabilidade. Distribuição amostral.*

### 4.1 A importância duma adequada recolha de dados

Até ao momento estivemos interessados em descrever gráfica e numericamente um conjunto de dados provenientes da observação de determinadas variáveis num conjunto de indivíduos. A detecção de padrões, a identificação de observações discordantes ou influentes, a descrição da distribuição duma variável e a análise de possíveis relações entre variáveis, foram, de um modo geral, os objectivos principais do estudo até agora realizado.

A natureza exploratória e descritiva desse estudo não permite que as suas conclusões permaneçam válidas para além dos dados considerados. Em alguns dos exemplos focados, é claro que a análise até agora feita só parcialmente responde às principais questões colocadas quando recolhemos os dados. Exemplos do que acabámos de referir são o Exemplo 1.2.3, onde se pretende avaliar os efeitos duma nova farinha para a alimentação de pintos, e o exemplo da sondagem de opinião a que fizemos referência no capítulo introdutório. Quando utilizámos gráficos de caule-e-folhas e de extremos-e-quartis para comparar os dois grupos de pintos do Exemplo 1.2.3 (ver pág. 45), o objectivo principal é saber se a nova farinha deve ser utilizada na alimentação de todos os pintos do aviário, ou mesmo na de pintos de outros aviários que estejam em condições semelhantes às dos pintos observados. O mesmo se passa na realização duma

sondagem eleitoral, dum estudo de saúde pública ou dum estudo sobre o consumo. O seu interesse principal está na possibilidade de extrapolar para toda a população, os resultados obtidos para os indivíduos inquiridos.

Para que esse procedimento inferencial não conduza a resultados inválidos, é necessário que os dados sejam recolhidos de forma apropriada, que permita, em particular, a utilização duma **metologia estatística adequada** para os analisar. Sobre essa metodologia falaremos em capítulos futuros.

**Exemplo 4.1.1** Para realçar a importância duma adequada recolha de dados, retomemos o Exemplo 1.2.3 (pág. 20) e imaginemos que os 40 pintos seleccionados para testar a nova farinha se encontravam numa caixa grande, da qual retirávamos, um a um, 20 pintos para formar o grupo ao qual era ministrada a farinha habitual. Para evitar factores pessoais na escolha dos pintos, suponhamos que, sem olhar, introduzíamos a mão na caixa e retirávamos o primeiro pinto que apanhássemos. Este procedimento de **selecção dos grupos experimentais** não é o mais apropriado, encerrando vícios que podem deturpar o resultado do estudo. Por exemplo, será de esperar que os pintos mais fracos se deixem apanhar mais facilmente, ficando no grupo ao qual era ministrada a nova farinha, os pintos mais fortes e saudáveis. Não seria de estranhar que desse grupo proviessem os pintos mais gordos quando passado alguns dias todos eles fossem pesados.

Nos próximos parágrafos abordaremos sucintamente questões relacionadas com a recolha ou produção de dados em **estudos observacionais por amostragem**, cujo principal objectivo é o de recolher informação sobre um conjunto de indivíduos a partir da observação de uma pequena parte destes, e nos quais os indivíduos são observados sem tentar influenciar as suas respostas, e na **realização de experiências** em que o observador impõe deliberadamente um tratamento ou regime específico aos indivíduos intervenientes no estudo com o objectivo de observar a sua resposta.

## 4.2 Planeamento de experiências

Como referimos atrás, um estudo diz-se uma **experiência** quando uma ou várias condições experimentais específicas são deliberadamente impostas aos indivíduos, também chamados de **unidades experimentais**, de modo a observar a sua resposta. A cada uma dessas condições experimentais chamamos **tratamento**. Usando uma linguagem já nossa conhecida, cada um destes tratamentos resulta da alteração de uma ou de várias variáveis a que chamámos **independentes** ou **explicativas**, e que no contexto das experiências são também chamadas de **factores**. Os diferentes valores que os factores tomam dizem-se também **níveis** desse factor. Os níveis não são assim mais

do que os diferentes valores que as variáveis explicativas, quantitativas ou qualitativas, tomam. O objectivo duma experiência é estudar o efeito dessas alterações na variável **resposta** a que chamámos também variável **dependente**.

**Exemplo 4.2.1** A comparação dos dois tratamentos para a recuperação de jovens anoréxicas apresentados no Exemplo 0.2.1 (pág. 3), é um exemplo típico duma experiência. Os dois tratamentos em confronto dizem respeito à forma como é aplicada a terapia habitual. A variável resposta é aqui o peso e há apenas um factor, a terapia, com dois níveis respeitantes ao regime, ambulatório ou de internamento, em que a terapia habitual é aplicada.

**Exemplo 4.2.2** A comparação das duas dietas para os pintos do Exemplo 1.2.3 (pág. 20), é outro exemplo duma experiência. Os tratamentos são constituídos aqui pelas duas dietas impostas aos pintos. A variável resposta é o peso e há apenas um factor com dois níveis respeitantes ao tipo de dieta aplicado. Além do efeito da farinha, poderíamos estar também interessados no efeito produzido por um complexo proteico que era, ou não, adicionado à farinha. Teríamos assim mais um factor com dois níveis possíveis. A conjugação destes dois **factores**, cada um deles com dois **níveis**, dá origem a quatro tratamentos diferentes.

Algumas questões importantes relativas ao **planeamento das experiências** anteriores ou de quaisquer outras experiências, podem ser levantadas. Tais questões têm, no essencial, a ver com o objectivo de controlar a variação de variáveis distintas da variável que está a ser medida que podem ter influência nessa variável. É importante para a validade do estudo que, quer no início, quer durante a aplicação dos diferentes tratamentos, o efeito dessas variáveis, a ocorrer, se manifeste de igual forma nos indivíduos dos vários grupos de tratamento. Dizemos neste caso que a **experiência** está **controlada**.

**Exemplo 4.2.2** (cont.) Retomemos o exemplo dos pintos, e suponhamos que a nova farinha era dada a 20 pintos que manteríamos afastados dos restantes pintos do aviário para garantir que estes só se alimentavam com a nova farinha, e que passado alguns dias comparávamos o seu peso com o de 20 outros pintos seleccionados no aviário. Ao planearmos a experiência desta forma, os pintos que comem a nova farinha vivem sob condições diferentes das dos restantes pintos do aviário. Podem ter mais ou menos espaço, mais ou menos calor, mais ou menos quantidade de alimento, etc. Como todas estas variáveis podem influenciar o seu crescimento, no final da experiência ficaríamos sem saber se as possíveis diferenças observadas na variável resposta se devem às diferentes farinhas utilizadas, ou ao efeito de algumas das variáveis que não foram controladas.

Neste exemplo concreto, o controlo dessas variáveis pode passar por garantir que os pintos de ambos os grupos vivam sob condições semelhantes **durante a realização do estudo**.

Outra questão importante é relativa à forma como os indivíduos são divididos pelos vários grupos de tratamento. Como já fizemos notar no parágrafo anterior, esta é uma questão importante que quando não é tida em conta, pode conduzir ao favorecimento sistemático de determinado resultado. Nesse caso dizemos que há um **enviesamento** dos resultados do estudo. Em populações humanas a constituição dos grupos é por vezes feita de forma a que esses grupos sejam semelhantes relativamente a algumas variáveis tidas como possivelmente influentes na resposta ao tratamento. Por razões já avançadas, este pode não ser o método mais adequado para constituir os grupos pois pode haver **variáveis omissas** que influenciem fortemente a resposta aos diferentes tratamentos.

A **aleatorização** na constituição dos grupos experimentais é uma forma simples de evitar o problema anterior. Isto quer dizer que os indivíduos a incluir em cada um dos grupos devem ser escolhidos **ao acaso**, evitando-se assim escolhas pessoais ou subjectivas na sua selecção. Voltando ao exemplo dos pintos, a aleatorização produz grupos de pintos que devem ser semelhantes em todos os aspectos **antes de começar o estudo**. Desta forma estamos a esbater diferenças que surgem sempre entre os indivíduos. No caso dos pintos haverá, por exemplo, pintos com mais tendência a engordar do que outros. Ao procedermos da forma anterior, as diferenças observadas no final do estudo são devidas aos diferentes tratamentos ou ao papel desempenhado pelo acaso na constituição dos grupos. Quando uma tal diferença é tão grande que raramente poderia ocorrer por acaso, dizemos que se trata duma diferença **estatisticamente significativa**.

Para proceder à constituição dos grupos experimentais por métodos aleatórios, devemos começar por numerar, da forma mais simples possível, todos os indivíduos intervenientes no estudo. Destes devemos escolher **ao acaso** alguns que integrarão um dos grupos experimentais. Para os outros grupos procede-se da mesma maneira. Ao dizermos que escolhemos **ao acaso** alguns indivíduos, digamos  $m$ , queremos dizer que todas as possíveis amostras com  $m$  indivíduos deverão ter todas a mesma possibilidade de serem seleccionadas. A maior partes das aplicações informáticas com rotinas de estatística, ou mesmo uma calculadora mais evoluída, têm uma função (random ou aleatório) para executar a tarefa anterior.

**Exemplo 4.2.2** (cont.) No exemplo dos pintos, os 40 indivíduos podem ser numerados de 1 a 40. Destes 40 números, devem ser escolhidos 20 **ao acaso** que integrarão um



dos grupos do estudo. Usando o SPSS obtemos os seguintes números (excluídas as repetições):

36, 28, 33, 06, 32, 01, 30, 18, 12, 29, 02, 17, 16, 27, 15, 20, 35, 13, 08, 19

Sem auxílio dum computador podemos também efectuar a aleatorização dos grupos usando uma **tabela de números aleatórios**.

Uma **tabela de números aleatórios** é uma lista dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 com as propriedades seguintes:

- ⊙ qualquer posição da lista é ocupada com igual possibilidade por qualquer um dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- ⊙ algarismos colocados em diferentes posições na lista são independentes, no sentido em que o valor de um não influencia o valor de outro.

Das propriedades anteriores deduz-se ainda que:

- ⊙ qualquer par de algarismos seleccionado tem igual possibilidade de ser um dos pares 00, 01, 02, ..., 98, 99;
- ⊙ qualquer terno de algarismos tem igual possibilidade de ser um dos ternos 000, 001, 002, 998, 999;
- ⊙ valem propriedades análogas para grupos de quatro ou mais algarismos.

A Tabela B é um exemplo duma tabela de números aleatórios. Apesar desta ter sido gerada por computador, uma tabela deste tipo poderia ter sido construída com o auxílio duma esfera de extracção de bolas da lotaria (ou outro sistema análogo), na qual introduzíamos 10 bolas com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e da qual extraíamos uma bola registando o seu algarismo. Depois de repor na esfera a bola extraída, o processo seria repetido tanta vezes quantos os números que desejássemos incluir na tabela.

Uma tabela de números aleatórios pode ser lida por qualquer ordem, ao longo duma linha, ao longo duma coluna, da esquerda para a direita, da direita para a esquerda, etc. Para fixar um modo de leitura que todos utilizemos, vamos ler a tabela por colunas, de cima para baixo e da esquerda para a direita, só passando às colunas seguintes da tabela depois de esgotar todas as linhas da tabela.

**Exemplo 4.2.2** (cont.) Relativamente ao exemplo dos pintos, iniciando a leitura da tabela na linha 01 da coluna 11, e agrupando os algarismos em grupos de dois, obtemos os 20 números seguintes (excluídas as repetições e os agrupamentos de dois algarismos 00, 41, 42, . . . , 98, 99):

03, 14, 15, 32, 04, 10, 11, 36, 40, 23, 12, 33, 22, 02, 39, 16, 18, 17, 24, 31

O processo de **aleatorização** na constituição dos grupos que acabámos de descrever, é, como referimos, um método simples de constituir grupos que sejam homogéneos relativamente a variáveis, identificadas ou não à partida, que possam influenciar a resposta dos indivíduos aos diferentes tratamentos.

No entanto, a aleatorização na constituição dos grupos não nos guarda da possibilidade de obtermos grupos que sejam pouco homogéneos relativamente a variáveis influentes, omissas ou não, na variável que medimos. No caso particular de algumas dessas **variáveis influentes** estarem **identificadas à partida**, processos diferentes para a constituição dos grupos podem ser utilizados.

Se, por exemplo, pretendemos comparar duas dietas numa população humana de indivíduos entre os 25 e os 30 anos, e tivermos razão para acreditar que a variável sexo possa influenciar fortemente os resultados, em vez de se proceder à aleatorização na constituição dos grupos a partir de todo o conjunto de indivíduos independentemente do seu sexo, é preferível conduzir experiências separadas para homens e para mulheres, e proceder à aleatorização na constituição dos grupos dentro de cada um destes grupos, a que chamamos habitualmente **blocos**. Ao constituirmos **blocos** de indivíduos que são semelhantes relativamente a uma variável que afecta a resposta ao tratamento, podemos ainda tirar conclusões separadas acerca de cada um desses blocos.

Na comparação de dois tratamentos, é por vezes possível aplicar ambos os tratamentos num mesmo indivíduo ou em dois indivíduos que sejam semelhantes relativamente às variáveis influentes na variável resposta. Dizemos então que os indivíduos, as observações, ou as amostras, estão **emparelhados**. No primeiro caso, em algumas experiências os dois tratamentos são aplicados ao indivíduo por ordem aleatória, enquanto que no segundo caso os indivíduos emparelhados são afectos a um ou a outro dos grupos de forma aleatória.

### 4.3 Planeamento de estudos por amostragem

Neste parágrafo centramos a nossa atenção nos chamados **estudos por amostragem** que têm como objectivo tirar conclusões gerais acerca dum conjunto **finito** de indivíduos a partir da observação dum número restrito desses indivíduos. Contrariamente a uma experiência em que certas condições são impostas aos indivíduos de modo

a observar a sua resposta, nos estudos por amostragem os indivíduos são observados nas condições habituais com o objectivo de determinar alguma ou algumas características particulares da população.

O conjunto total dos indivíduos, ou **unidades individuais**, sobre o qual queremos obter informação é denominado **população**. À parte da população que é sujeita a observação chamamos **amostra**. Ao número de indivíduos da amostra chamamos **dimensão da amostra**.

Num estudo deste género, pretendemos normalmente obter informação sobre características numéricas dessa população, a que chamamos **parâmetros**. Para o efeito utilizamos as características amostrais correspondentes a que chamamos **estatísticas**. As estatísticas são assim funções da amostra não dependendo dos parâmetros populacionais.

**Exemplo 4.3.1** A título de exemplo, suponhamos que algum tempo antes das eleições para a AAC pretendemos conhecer a percentagem  $p$  de estudantes que vão votar. A população é aqui constituída por todos os alunos da UC. A percentagem de alunos que vão votar é aqui o parâmetro em que estamos interessados. Para o conhecermos teríamos de inquirir todos os alunos da UC, isto é, teríamos de realizar um **censo**. Sendo esta tarefa difícil, ou mesmo impossível, de ser realizada num período curto de tempo, seríamos conduzidos a inquirir alguns, não muitos, alunos da UC aos quais perguntávamos se iriam votar no dia das eleições. Para uma tal amostra é fácil calcular a percentagem de alunos que vão votar. Essa percentagem é uma estatística.

Um ponto essencial do **planeamento dum estudo por amostragem** é o da escolha do método a utilizar para recolher a amostra. A fase da recolha da amostra é de grande importância pois esta deve ser, na medida do possível, representativa da população que se pretende estudar. Quando tal acontece, será de esperar que a estatística calculada seja uma aproximação razoável da característica populacional de interesse. Amostras representativas da população dizem-se **sem viés** ou **não-enviesadas**. Caso contrários dizemos que as amostras são **enviesadas**. O caso das **amostras de resposta voluntária**, que ocorrem quando em programas televisivos é lançada uma questão para ser respondida pelo espectadores, são exemplos de amostras que apresentam enviesamentos claros favorecendo de forma sistemática um dos resultados.

Tal como para o caso das experiências que abordámos no parágrafo anterior, uma forma simples de evitar o enviesamento da amostra, evitando preferências pessoais na sua escolha ou o problema da resposta voluntária, é proceder à sua selecção por **métodos aleatórios**.

Descrevemos a seguir três destes métodos, a **amostragem aleatória simples**, a **amostragem estratificada** e a **amostragem em várias etapas**, para os quais indicamos algumas vantagens e desvantagens.

A **amostragem aleatória simples** é um dos métodos mais simples de selecção de amostras de tamanho fixo  $n$  numa população. Uma amostra aleatória simples obtém-se seleccionando ao acaso, e sem reposição, os elementos da amostra tendo por base a população. Em particular, todas as possíveis amostras com  $n$  elementos têm a mesma possibilidade de ser seleccionadas. Este foi precisamente o método utilizado na aleatorização dos grupos numa experiência. A aleatorização na constituição dos grupos numa experiência não é mais do que uma amostragem aleatória simples que tem por base o conjunto dos indivíduos intervenientes no estudo. Para obter uma amostra aleatória simples, é necessário listar todos os indivíduos da população atribuindo um número a cada um deles. A seguir utilizamos uma tabela de números aleatórios e seleccionamos a amostra com o tamanho desejado.

A **amostragem estratificada** realiza-se quando possuímos informação suplementar sobre a população que permita fazer a sua divisão em subpopulações ou **estratos**. A ideia da amostragem estratificada é a de seleccionar em cada um desses estratos uma amostra aleatória simples, combinando depois essas diferentes amostras para obter informação sobre a população. Como vantagens da estratificação da população podemos referir o facto dela permitir obter informação sobre cada um dos estratos, tornar o processo de amostragem mais simples, e oferecer mais garantia de representatividade à amostra uma vez que uma amostra aleatória simples com base na população poderia não conter qualquer elemento de um dos estratos. Pode provar-se matematicamente que a amostragem estratificada permite obter resultados mais exactos do que a amostragem aleatória simples quando a população é muito heterogénea mas as subpopulações que integram os estratos são razoavelmente homogéneas. Ao pretendermos obter uma amostra estratificada de dimensão  $n$ , é preciso saber a dimensão das amostras a recolher em cada estrato. Uma forma de o fazer, conhecida como **afecção proporcional**, consiste em recolher em cada estrato uma amostra de dimensão proporcional à dimensão do estrato. Notemos, no entanto, que a afecção proporcional nem sempre é a mais indicada. É razoável pensar que em estratos homogéneos relativamente à característica em estudo, a dimensão da amostra a recolher deverá ser mais pequena do que em estratos mais heterogéneos.

Os dois métodos de amostragem anteriores, exigem que a população, ou melhor, que as suas unidades individuais estejam listadas. Casos há, em que apesar de não ser possível listar toda a população é possível identificar grupos de indivíduos e listar tais grupos. A **amostragem aleatória em várias etapas**, também designada por

**amostragem por grupos**, é um método de amostragem aleatória em que a escolha aleatória da amostra é feita em várias fases. Para a sua utilização a população é dividida em grupos ditos **unidades amostrais**. Esta começa por ser dividida em **unidades primárias**, cada um destes grupos pode ser dividido em subgrupos ditos **unidades secundárias**, e assim sucessivamente. Cada unidade corresponde a uma etapa do processo de amostragem, etapas essas que vão sendo percorridas até se chegar às **unidades finais** que são as únicas a serem inquiridas. Em cada etapa a selecção das unidades a considerar pode ser feita por amostragem aleatória simples ou por outros métodos de amostragem aleatórios. Como as unidades finais são as únicas a serem inquiridas, apenas estas necessitam de ser listadas.

**Exemplo 4.3.1** (cont.) No quadro seguinte indica-se o número de alunos por cada uma das Faculdades da UC (dados do Prospecto da UC de 2003/04):

Faculdade	n <sup>o</sup> de alunos	n <sup>o</sup> de licenciaturas
FL	4606	17
FD	3145	2
FM	1512	2
FCT	7669	23
FF	934	1
FE	2460	4
FPCE	1271	2
FCDEF	475	1
Total	22072	52

Havendo listas de todos os alunos da UC, qualquer um dos métodos anteriores de amostragem pode ser aplicado. Apenas no sentido de ilustrar a sua aplicação, admitamos que pretendíamos recolher uma amostra de tamanho 100 para estimar a percentagem  $p$  de estudantes que neste momento pensam ir votar nas próximas eleições da AAC.

Usando a **amostragem aleatória simples**, teríamos que numerar todos os alunos, por exemplo de 00001 a 22072 (FL: 00001 a 04606, FD: 04606 a 07751, FM: 07752 a 09263, FCT: 09264 a 16932, etc), e usar um computador ou uma tabela de números aleatórios para seleccionar a amostra. Usando a Tabela B e iniciando a leitura na primeira linha da primeira coluna, os alunos seleccionados são os numerados por: 15685, 14768, 05374, 15252, 07908, ...

Usando agora a **amostragem estratificada** com afectação proporcional, em que os estratos são as diversas Faculdades, é preciso começar por determinar o número de alunos de cada uma das Faculdades que devemos incluir na amostra. Sendo a afectação proporcional, obtemos FL: 21, FD: 14, FM: 7, FCT: 35, FF: 4, FE: 11, FPCE: 6, FCDEF: 2. Para extrair uma amostra aleatória simples de dimensão 21 da Faculdade de Letras, listamos os seus alunos da 0001 a 4606. Iniciando a leitura da Tabela B

na primeira linha da primeira coluna (por exemplo), os alunos a incluir na amostra são o 4156, 4596, 1568, 2581, 1476, . . . De igual modo procederíamos para as restantes Faculdades.

Usando agora a **amostragem aleatória a várias etapas**, poderíamos considerar as Faculdades as unidades primárias, e os alunos dessas Faculdades as **unidades secundárias e finais**. Neste caso, este tipo de amostragem é também conhecido por **amostragem aleatória bietápica**. Na primeira etapa escolheríamos algumas Faculdades, e na segunda escolheríamos alguns alunos das Faculdades seleccionadas. Em vez duma amostragem em duas etapas, poderíamos ter também considerado uma amostragem a três etapas em que as **unidades terciárias e finais** seriam os alunos de cada uma das licenciaturas das Faculdades. Assim, enquanto que na primeira etapa escolhíamos algumas das Faculdades, na segunda etapa, para cada uma das Faculdades escolhidas na etapa anterior, escolhíamos alguma ou algumas das suas licenciaturas, e na etapa final seriam seleccionados aleatoriamente alguns alunos das licenciaturas escolhidas.

Uma segunda classe de métodos para selecção de amostras é bastante utilizada na prática pela sua maior facilidade de implementação e economia, quando comparados com os métodos aleatórios. Nestes, a amostra é escolhida de modo que, segundo determinados critérios mais ou menos subjectivos, se assemelhe à população. Contrariamente aos métodos aleatórios, estes métodos de amostragem, ditos **não-aleatórios** ou **determinísticos, não permitem medir o grau de confiança** que podemos ter nos resultados que com base neles obtemos. Os métodos não-aleatórios mais utilizados são a **amostragem de resposta voluntária**, que surge na forma de questionários de rua, questionários incluídos em revistas, questionários televisivos, etc, a **amostragem orientada**, em que a escolha da amostra é dirigida por peritos que detêm grande informação sobre os elementos da população, e a **amostragem por quotas**, que é usada com frequência nos estudos de mercado, em que para o entrevistador são definidas quotas para os diferentes grupos de indivíduos em que a população foi dividida.

Um conveniente planeamento dum estudo de amostragem não se resume apenas à escolha dum método apropriado de amostragem, que como vimos deve ser aleatório para evitar o enviesamento da amostra. Outras fontes de enviesamento da amostra devem ser acauteladas, como são o problema da **não-cobertura**, que ocorre quando a população que realmente foi alvo do estudo não coincide com a população que se pretende estudar, e o problema da **não-resposta**, que ocorre em populações humanas, quando um indivíduo seleccionado para integrar a amostra se recusa a participar no estudo. Em estudos de amostragem que envolvam a resposta a um questionário, o comportamento do entrevistador e do entrevistado, bem como a clareza das questões

que são formuladas, podem influenciar fortemente a qualidade do estudo.

#### 4.4 Viés, variabilidade e distribuição amostral

Os métodos aleatórios utilizados nos dois parágrafos anteriores a propósito da constituição de grupos de tratamento numa experiência ou da selecção duma amostra num estudo por amostragem, foram motivadas pelo objectivo comum de evitar o enviesamento dos resultados obtidos nesses estudos.

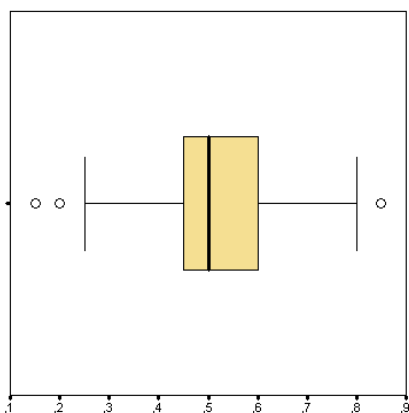
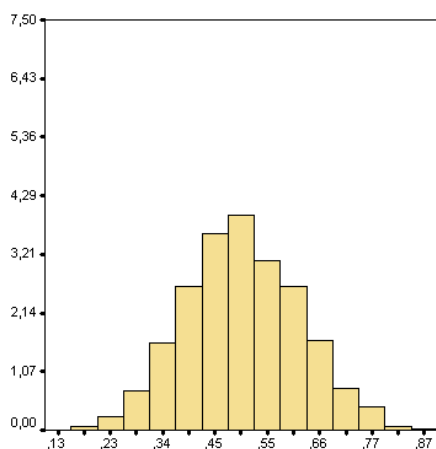
Com o duplo objectivo de precisar um pouco mais a noção de **enviesamento** e de motivar a noção de **variabilidade**, vamos centrar-nos num estudo observacional por amostragem em que, para uma determinada população, pretendemos conhecer a proporção  $p$  de indivíduos que possuem determinada característica. Essa proporção é o **parâmetro de interesse**. Admitamos que utilizamos o método de amostragem aleatória simples para recolher uma amostra. A partir da amostra recolhida podemos calcular a **estatística**  $\hat{p}$  associada ao parâmetro de interesse que, neste caso, não é mais do que a **proporção de indivíduos nessa amostra que possuem essa característica**. A  $\hat{p}$  chamamos **proporção amostral**. Não havendo enviesamento no que respeita à amostragem, esperamos que esta estatística nos dê uma boa informação sobre o parâmetro desconhecido  $p$ .

Para ir um pouco mais longe nesta interpretação, admitamos que várias amostras aleatórias simples, todas com a mesma dimensão, são recolhidas, e que para cada uma delas calculamos  $\hat{p}$ . Será de esperar que diferentes valores de  $\hat{p}$  sejam obtidos para as diferentes amostras. Este facto é conhecido como **variabilidade amostral**. Estes vários valores obtidos para a estatística  $\hat{p}$  podem ser interpretados como diferentes observações da estatística  $\hat{p}$ . Utilizando os métodos do Capítulo 1 será possível saber mais sobre esta estatística? Qual é o centro e a variabilidade da sua distribuição? Qual é a sua forma? Uma vez que diferentes valores de  $\hat{p}$  são obtidos a partir de diferentes amostras, à distribuição de  $\hat{p}$  chamamos **distribuição amostral de  $\hat{p}$** . **A distribuição amostral duma estatística descreve assim o comportamento da estatística em sucessivas repetições do processo de amostragem.**

**Exemplo 4.4.1** Para lançar algumas pistas de resposta a estas questões, vamos reduzir-nos ao exemplo concreto duma população de 10000 indivíduos, que numeramos de 1 a 10000, em que (estranhamente) os indivíduos numerados de 1 a 5000 possuem a característica em estudo, e os restantes, numerados de 5001 a 10000, não possuem essa característica. Neste caso  $p = 1/2$ . Para cada uma de 2000 amostras de dimensão 20 recolhidas desta população, calculámos  $\hat{p}$ . Para as 100 primeiras obtivemos os valores:

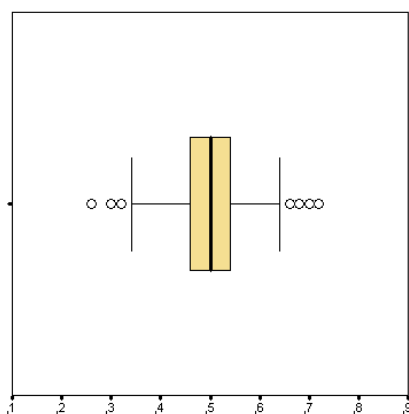
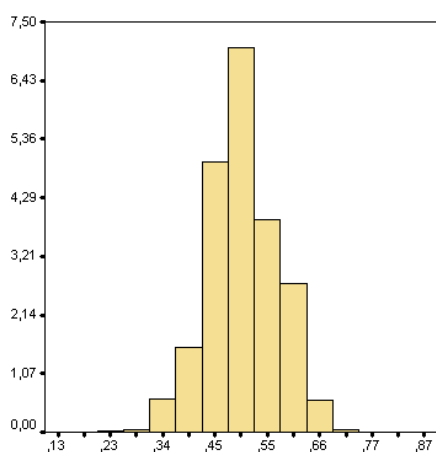
.45, .75, .55, .60, .40, .45, .50, .30, .65, .55, .50, .50, .50, .40, .65, .35, .50, .50, .35, .65, .35, .60, .35, .45, .55, .55, .65, .60, .60, .35, .50, .55, .40, .60, .60, .55, .65, .50, .60, .60, .60, .45, .45, .50, .70, .30, .70, .35, .60, .50, .40, .50, .55, .50, .50, .50, .60, .50, .35, .55, .50, .35, .50, .60, .50, .35, .40, .45, .45, .40, .45, .25, .50, .30, .65, .40, .50, .55, .55, .55, .50, .65, .60, .60, .60, .65, .65, .65, .60, .45, .50, .50, .45, .40, .55, .60, .50, .45, .50, .50

Usando todos os valores obtidos para  $\hat{p}$ , apresentamos a seguir dois resumos gráficos da distribuição amostral de  $\hat{p}$ . Começemos por notar que o centro da distribuição de  $\hat{p}$  é aproximadamente igual ao verdadeiro parâmetro  $p = 1/2$ . Dizemos assim que a estatística  $\hat{p}$  **não é enviesada** ou que **não tem viés**. Esta excelente propriedade é uma das consequências de termos usado um método de amostragem aleatório na selecção das amostras. Assim, dizer que os resultados do estudo por amostragem não são enviesados significa que a estatística de interesse, neste caso  $\hat{p}$ , possui como centro da sua distribuição amostral o verdadeiro parâmetro  $p$  (desconhecido). O centro da distribuição duma estatística **enviesada** ou **com viés** não coincide com o verdadeiro valor do parâmetro.





A **variabilidade** da estatística  $\hat{p}$  é naturalmente descrita pela variabilidade da sua distribuição amostral. Uma menor variabilidade corresponde naturalmente a resultados mais precisos. Esta variabilidade depende da dimensão da amostra recolhida. **Quanto maior a dimensão da amostra menor a variabilidade da estatística  $\hat{p}$ .** Este facto é ilustrado pelos gráficos seguinte relativos à distribuição amostral da estatística  $\hat{p}$  obtida a partir de 2000 amostras de dimensão 50. Para facilitar a comparação, as escalas usadas nestes e nos gráficos anteriores são iguais.

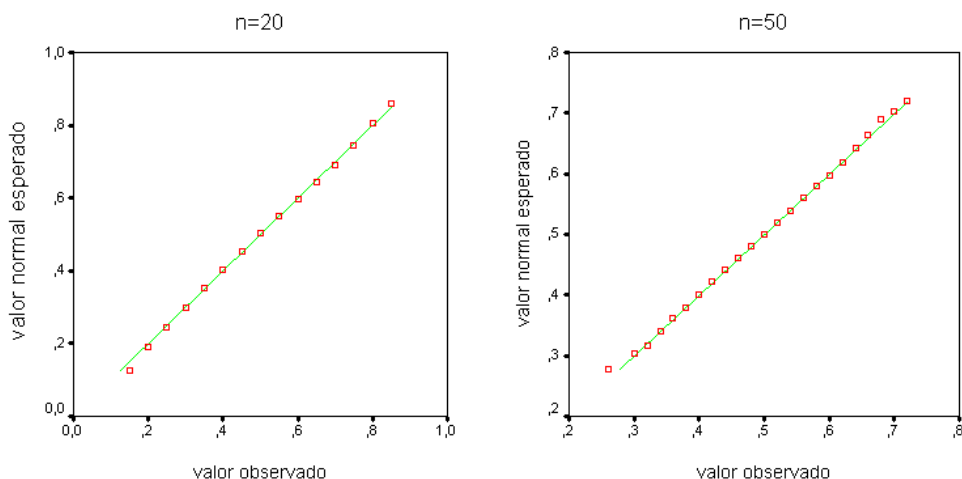


As conclusões anteriores, válidas para a amostragem aleatória simples e para a estatística  $\hat{p}$ , permanecem válidas para estatísticas apropriadamente escolhidas quando as amostras são seleccionadas por métodos aleatórios, ou quando se procede à aleatorização na constituição de grupos de tratamento numa experiência. Assim sendo, tais estatísticas não têm viés e a sua variabilidade pode ser reduzida pelo aumento da dimensão da amostra ou do tamanho dos grupos experimentais.

Há no entanto outra enorme vantagem na utilização de procedimentos aleatórios que não é partilhada pelos métodos não-aleatórios de selecção de amostras a que fizemos

breve referência no parágrafo anterior: **a forma da distribuição da estatística de interesse é conhecida**, sendo em muitos casos normal.

No caso particular da estatística  $\hat{p}$ , quando a selecção da amostra é feita por amostragem aleatória simples, a forma da distribuição é simétrica, unimodal, com a forma dum sino como é ilustrado pelos histogramas apresentados no parágrafo anterior. Utilizando a noção de probabilidade, veremos mais à frente que a distribuição de  $\hat{p}$  é aproximadamente normal independentemente do valor do parâmetro desconhecido  $p$ . No caso dos valores atrás obtidos para  $\hat{p}$ , este facto é sugerido pelos histogramas e gráficos de extremos-e-quartis anteriores, mas principalmente pelos gráficos de quantis normais seguintes:



O conhecimento da distribuição da estatística de interesse é de primeira importância no procedimento inferencial de que temos vindo a falar, e que abordaremos em capítulos futuros. Como veremos, esse conhecimento permitirá, em particular, medir o grau de confiança que podemos ter nos resultados que obtemos a partir dessa estatística.

Neste parágrafo, para podermos ter uma ideia sobre a forma da sua distribuição, admitimos que possuíamos várias observações dessa mesma estatística, o que só foi possível extraíndo outras tantas amostras, todas com a mesma dimensão, da população que pretendemos estudar. Numa situação prática, apenas uma amostra é recolhida, isto é, apenas uma observação da estatística de interesse é conhecida. A partir dessa observação nada podemos dizer sobre a distribuição da estatística.

É por isso fundamental desenvolver métodos matemáticos que nos permitam, a partir de outra informação associada às observações que realizamos, ter acesso à forma, mesmo que aproximada, da distribuição da estatística de interesse. Tais métodos são baseados na noção de probabilidade que abordaremos no próximo capítulo.

## 4.5 Bibliografia

Levy, P. (1999). *Sampling of populations: methods and applications*, Wiley.

McPherson, G. (1990). *Statistics in scientific investigation : its basis, application, and interpretation*, Springer.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.

Pestana, D.D., Velosa, S.F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian.

Vicente, P., Reis, E., Ferrão, F. (1996). *Sondagens: a amostragem como factor decisivo de qualidade*, Edições Sílabo.



## Capítulo 5

# Introdução à probabilidade

*Experiência aleatória e acontecimentos aleatórios. Acontecimentos e conjuntos. Princípios clássico e frequentista para atribuição de probabilidade a um acontecimento aleatório. Probabilidade via curvas densidade. Lei dos grandes números. Propriedades da probabilidade. Independência de acontecimentos.*

### 5.1 Experiência e acontecimentos aleatórios

O lançamento de um dado é um caso particular numa classe mais vasta de experiências, a que chamamos **experiências aleatórias**, que gozam das seguintes propriedades:

- podem repetir-se, mesmo que hipoteticamente, nas mesmas condições, ou em condições muito semelhantes;
- o resultado observado em cada uma dessas repetições é um de entre um conjunto de resultados possíveis conhecidos antes de realizar a experiência;
- esse resultado é consequência dum conjunto de factores que não podemos, na totalidade, controlar, e que atribuímos ao **acaso**.

Os exemplos seguintes de experiências aleatórias, incluem exemplos já considerados em capítulos anteriores:

1. lançamento numa moeda de um euro ao ar e observação da face que fica voltada para cima;

2. lançamento dum moeda de um euro ao ar 100 vezes consecutivas e registo do número de vezes que ocorreu a face europeia;
3. lançamento dum dado e observação do número de pontos obtidos;
4. extracção dum carta dum baralho e observação das suas características;
5. registo do número de lançamentos dum dado necessários à obtenção, pela primeira vez, da face 6;
6. registo do tempo de duração dum lâmpada;
7. tempo que medeia a chegada de dois clientes consecutivos a um caixa de supermercado (ver pág. 29);
8. registo do peso de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina (ver pág. 26);
9. número de chamadas que por minuto chegam a uma central telefónica (ver pág. 29);
10. proporção de indivíduos numa amostra aleatória simples de tamanho 20 que possuem determinada característica (neste exemplo o acaso está presente no processo de amostragem; ver pág. 119).

A cada uma destas experiências aleatórias podemos associar **acontecimentos aleatórios**, isto é, acontecimentos que podem, ou não, ocorrer dependendo do resultado da experiência em causa. Os acontecimentos aleatórios são normalmente representados pelas letras maiúsculas:  $A, B, C, \dots$ . Relativamente a cada uma das experiências anteriores, são exemplos de acontecimentos aleatórios:

1.  $A$  = “ocorrência da face portuguesa”;
2.  $A$  = “mais de 45 e menos de 55 ocorrências”;  $B$  = “95 ou mais ocorrências”;
3.  $A$  = “saída de 6”;  $B$  = “saída de número par”;
4.  $A$  = “saída de naipe de paus”;  $B$  = “saída de ás”;
5.  $A$  = “menos de 3 lançamentos”;  $B$  = “mais de 5 lançamentos”;
6.  $A$  = “duração superior a 200 horas”;
7.  $A$  = “menos de 1 minuto”;  $B$  = “mais de meio minuto”;

8.  $A$  = “peso superior a 1010 gramas”;  $B$  = “peso superior a 980 gramas e inferior a 1020 gramas”;
9.  $A$  = “mais de 5 chamadas”;
10.  $A$  = “proporção superior a  $3/8$  e inferior a  $5/8$ ”.

No caso da experiência aleatória 3., se sai 2 no lançamento do dado o acontecimento  $B$  realiza-se enquanto que o acontecimento  $A$  não se realiza. Na experiência 8., se um pacote tem 1015 gramas realizam-se ambos os acontecimentos  $A$  e  $B$ .

No estudo que vamos fazer, o nosso objectivo não é o de prever o resultado particular duma experiência aleatória. O que pretendemos é **quantificar** a maior ou menor possibilidade que cada um dos acontecimentos aleatórios associados à experiência tem de se realizar ou ocorrer. Por outras palavras, pretendemos associar a cada acontecimento um número, número esse que traduzirá essa maior ou menor possibilidade de realização. A esse número chamaremos **probabilidade** do acontecimento.

## 5.2 Acontecimentos e conjuntos

A cada uma das experiências aleatória que descrevemos no parágrafo anterior, podemos associar um conjunto, que denotaremos por  $\Omega$ , constituído por todos os resultados possíveis da experiência aleatória. Por outras palavras, cada resultado particular da experiência aleatória é representado por um e um só elemento de  $\Omega$ . A este conjunto  $\Omega$  chamamos **espaço dos resultados**.

Relativamente aos exemplos anteriores, podemos tomar:

1.  $\Omega = \{E, P\}$ , onde  $E$  representa a saída da face europeia, e  $P$  a saída da face portuguesa; ou então  $\Omega = \{0, 1\}$ , onde 0 representa a saída da face europeia, e 1 a saída da face portuguesa;
2.  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$ , onde, por exemplo, o número 34 significa que nos 100 lançamentos da moeda, a face europeia ocorreu 34 vezes;
3.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , onde, por exemplo, o número 2 representa a saída da face com dois pontos;
4.  $\Omega = \{A_p, R_p, V_p, D_p, 10_p, \dots, 2_p, A_o, R_o, \dots\}$ ;
5.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ;
6.  $\Omega = [0, +\infty[$ ;
7.  $\Omega = [0, +\infty[$ ;

8.  $\Omega = [0, +\infty[;$
9.  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\};$
10.  $\Omega = \{0, 1/20, 2/20, \dots, 19/20, 1\}.$

Notemos agora que cada um dos acontecimentos aleatórios considerados no parágrafo anterior, pode ser representado pelo subconjunto de  $\Omega$  cujos elementos são **favoráveis à realização desse acontecimento**:

1.  $A = \{E\};$  ou  $A = \{0\};$
2.  $A = \{46, 47, \dots, 54\};$
3.  $A = \{6\}; B = \{2, 4, 6\};$
4.  $A = \{A_p, R_p, V_p, D_p, 10_p, \dots, 2_p\};$
5.  $A = \{1, 2\}; B = \{6, 7, \dots\};$
6.  $A = ]200, +\infty[;$
7.  $A = [0, 1[; B = ]0.5, +\infty[;$
8.  $A = ]1010, +\infty[; B = ]980, 1020[;$
9.  $A = \{5, 6, \dots\};$
10.  $A = \{8/20, \dots, 12/20\}.$

Há acontecimentos aos quais damos nomes especiais:

- Os acontecimentos constituídos por um só elemento dizem-se **acontecimentos elementares**. Este é o caso dos acontecimentos  $A$  das experiências 1. e 3..
- Um acontecimento que se realiza independentemente do resultado da experiência aleatória diz-se **acontecimento certo**. No lançamento da moeda, o acontecimento “saída de uma das duas faces”, é um acontecimento certo. O subconjunto de  $\Omega$  que devemos associar a um acontecimento certo deve conter todos os possíveis resultados da experiência. Assim, o acontecimento certo é representado pelo próprio  $\Omega$ .
- Por oposição ao acontecimento certo, o **acontecimento impossível** é um acontecimento que, independentemente do resultado da experiência aleatória, não se realiza. No lançamento de um dado vulgar, o acontecimento “saída de face com 7 pontos”, é um acontecimento impossível. Como nenhum resultado da experiência



aleatória é favorável ao acontecimento impossível, o subconjunto de  $\Omega$  que lhe devemos associar não deve possuir nenhum elemento. Por outras palavras, ao acontecimento impossível associamos o conjunto vazio que representamos pelo símbolo  $\emptyset$ .

As operações usuais entre conjuntos que a seguir recordamos, **complementação**, **intersecção** e **reunião**, permitem exprimir ou construir acontecimentos a partir de outros acontecimentos.

**Exemplo 5.2.1** Para ilustrar o que acabámos de dizer, consideremos a experiência aleatória do lançamento dum dado vulgar e tomemos os acontecimentos aleatórios:

$$\begin{aligned} A &= \text{“saída de número par”} = \{2, 4, 6\}, \\ B &= \text{“saída de número inferior a 3”} = \{1, 2\}, \\ C &= \text{“saída de número par superior a 3”} = \{4, 6\}. \end{aligned}$$

O acontecimento aleatório

$$\text{“saída de número ímpar”} = \{1, 3, 5\},$$

realiza-se quando o acontecimento  $A$  não se realiza, isto é, o conjunto dos resultados da experiência que lhe são favoráveis, não são favoráveis ao acontecimento  $A$ . Este acontecimento diz-se **acontecimento contrário de  $A$** . O subconjunto de  $\Omega$  que lhe associamos é o conjunto dos elementos de  $\Omega$  que não pertencem a  $A$ . Um tal conjunto é denotado por  $A^c$  e diz-se **complementar de  $A$** :

$$\{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6\}^c = A^c.$$

Reparemos que o acontecimento contrário do acontecimento certo é o acontecimento impossível, e que o acontecimento contrário do acontecimento impossível é o acontecimento certo.

O acontecimento aleatório

$$\text{“saída de número par inferior a 3”} = \{2\},$$

realiza-se quando ambos os acontecimentos  $A$  e  $B$  se realizam. Por outras palavras, os resultados da experiência aleatória favoráveis ao acontecimento anterior, são favoráveis a  $A$  e a  $B$  simultaneamente. O subconjunto de  $\Omega$  que lhe associamos é o conjunto dos elementos que pertencem a  $A$  e a  $B$  simultaneamente. Um tal conjunto é denotado por  $A \cap B$  e diz-se **intersecção dos conjuntos  $A$  e  $B$** :

$$\{2\} = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2\} = A \cap B.$$

De forma análoga, o conjunto dos resultados da experiência aleatória favoráveis à realização de  $B$  e  $C$  é

$$B \cap C = \{1, 2\} \cap \{4, 6\} = \emptyset.$$

Não havendo resultados da experiência aleatória favoráveis à realização simultânea de  $B$  e  $C$ , o acontecimento  $B \cap C$  é impossível. Os acontecimentos  $B$  e  $C$  dizem-se por isso **acontecimentos incompatíveis**.

Reparemos que um acontecimento e o seu contrário são sempre acontecimentos incompatíveis.

O acontecimento aleatório

$$\text{“saída de número par ou de número inferior a 3”} = \{1, 2, 4, 6\},$$

realiza-se quando pelo menos um dos acontecimentos  $A$  ou  $B$  se realiza. Os resultados da experiência aleatória favoráveis ao acontecimento anterior, são favoráveis a pelo menos um dos acontecimentos  $A$  ou  $B$ . O subconjunto de  $\Omega$  que lhe associamos é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos  $A$  ou  $B$ . Um tal conjunto é denotado por  $A \cup B$  e diz-se **reunião dos conjuntos  $A$  e  $B$** :

$$\{1, 2, 4, 6\} = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2\} = A \cup B.$$

Atendendo à correspondência que podemos estabelecer entre acontecimentos aleatórios e subconjuntos do espaço dos resultados, daqui para a frente simplificaremos a linguagem usando a designação de acontecimento aleatório quer se trate do acontecimento aleatório em si mesmo, quer se trate do subconjunto do espaço dos resultados que lhe podemos associar. Neste sentido, falaremos da intersecção de acontecimentos aleatórios, e não da intersecção dos subconjuntos que podemos associar a esses acontecimentos aleatórios. Mais exemplos dessa simplificação de linguagem são dados a seguir:

acontecimento que se realiza quando $A$ não se realiza	$\rightarrow$	complementar de $A$	$\rightarrow$	$A^c$
acontecimento que se realiza quando $A$ e $B$ se realizam simultaneamente	$\rightarrow$	intersecção de $A$ e $B$	$\rightarrow$	$A \cap B$
acontecimento que se realiza quando pelo menos um dos acontecimentos $A$ e $B$ se realiza	$\rightarrow$	reunião de $A$ e $B$	$\rightarrow$	$A \cup B$

### 5.3 Atribuição de probabilidade

Como referimos no §5.1, o objectivo principal do estudo duma experiência aleatória é o da atribuição de probabilidade aos acontecimentos aleatórios que lhe estão associados. **A probabilidade dum acontecimento**  $A$ , que denotamos por  $P(A)$ , não é mais do que um número real, que vamos supor pertencer ao intervalo  $[0, 1]$ , que **traduz a maior ou menor possibilidade do acontecimento  $A$  ocorrer**.

Neste parágrafo apresentaremos dois princípios fundamentais para atribuir probabilidade aos acontecimentos aleatórios duma experiência aleatória. Tais princípios são conhecidos por **definição clássica de probabilidade** e **definição frequentista de probabilidade**. Falaremos também da atribuição de probabilidade utilizando curvas densidade.

O exemplo seguinte ilustra as principais características de cada um dos princípios anteriores.

**Exemplo 5.3.1** Suponhamos que uma moeda portuguesa de um euro é lançada 50 vezes, tendo-se obtido 45 vezes a face europeia e 5 vezes a face portuguesa. **Se lançarmos a moeda uma vez mais, qual é a probabilidade de sair a face europeia?** Esta probabilidade pode ser obtida a partir de duas perspectivas distintas. Se estamos convencidos que a moeda é equilibrada, isto é, se julgamos haver igual possibilidade de ocorrer cada uma das faces, a resposta poderá ser 0.5. No entanto, é-nos dito também que nos 50 lançamentos efectuados ocorreu a face europeia em 45 deles. Utilizando esta informação podemos pensar em estimar a probabilidade de sair a face europeia por  $45/50 = 0.9$ .

Como veremos de seguida, a primeira das respostas anteriores utiliza o conceito clássico de probabilidade. Para a sua aplicação, usámos apenas o facto da experiência em causa ter dois resultados possíveis que avaliámos como sendo igualmente prováveis. Os resultados obtidos em anteriores realizações da experiência aleatória não tiveram qualquer influência na resposta dada. Na segunda resposta tivemos apenas em conta tais resultados, possivelmente por pensarmos que os resultados obtidos nas realizações anteriores da experiência são pouco compatíveis com a hipótese da moeda ser equilibrada. Usámos por isso o conceito frequentista de probabilidade.

#### 5.3.1 Definição clássica de probabilidade

O primeiro princípio para atribuição de probabilidade de que vamos falar, é conhecido como **definição clássica de probabilidade** ou **definição de probabilidade de Laplace**.

A utilização desta definição é limitada ao caso em que o conjunto dos resultados possíveis da experiência aleatória é finito sendo esses resultados **igualmente prováveis** ou **equiprováveis**. Com estes pressupostos é natural quantificar a maior ou menor possibilidade de realização de um acontecimento  $A$  através do número de resultados da experiência aleatória que são favoráveis a  $A$ .

**Definição clássica de probabilidade:**

Numa experiência aleatória com um número finito de resultados possíveis e equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento  $A$  é dada pelo quociente entre os resultados favoráveis a  $A$  e o número total de resultados possíveis:

$$P(A) = \frac{\text{número dos resultados favoráveis a } A}{\text{número de resultados possíveis}}.$$

Vejam os dois exemplos de aplicação da definição clássica de probabilidade.

**Exemplo 5.3.2** No caso da extracção de uma carta de um baralho de 52 cartas que supomos bem baralhadas, é natural admitir que cada carta tem igual possibilidade de ser escolhida. Assim,

$$P(\text{"saída de paus"}) = P(\{A_p, R_p, V_p, D_p, 10_p, \dots, 2_p\}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25$$

e

$$P(\text{"saída de ás"}) = P(\{A_p, A_o, A_c, A_e\}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 0.0769.$$

**Exemplo 5.3.3** Voltemos à experiência aleatória do lançamento de um dado (ver Exemplo 5.2.1). Se tivermos boas razões para acreditar que o dado em questão é equilibrado (ou melhor, se não tivermos motivos para duvidar que ele seja equilibrado), a definição clássica de probabilidade pode ser utilizada. Nesse caso,

$$P(\text{"saída da face 1"}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6} \approx 0.1667,$$

$$P(\text{"saída de número inferior a 3"}) = P(\{1, 2\}) = \frac{2}{6} \approx 0.3333$$

e

$$P(\text{"saída de número par"}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = 0.5.$$

### 5.3.2 Frequência relativa e probabilidade

Uma das características de uma experiência aleatória é, como já referimos, a possibilidade de ser repetida sempre nas mesmas condições. Ao repetirmos um determinado número de vezes uma experiência aleatória, podemos calcular a **frequência relativa** dum determinado acontecimento  $A$ , isto é, é possível calcular a proporção de ocorrências de  $A$  nas várias repetições da experiência. Por outras palavras, podemos calcular o quociente entre o número de vezes em que  $A$  ocorreu, a que chamamos **frequência absoluta do acontecimento  $A$** , e o número de repetições da experiência aleatória:

$$\text{frequência relativa de } A = \frac{\text{número de ocorrências de } A}{\text{número de repetições}}$$

**Exemplo 5.3.4** Simulámos 10000 lançamentos dum dado equilibrado, tendo obtido as pontuações seguintes nos primeiros 500 lançamentos:

5, 4, 6, 5, 4, 6, 6, 2, 1, 6, 4, 5, 1, 3, 4, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 6, 6, 5, 3, 5, 2, 3,  
 3, 6, 3, 2, 1, 3, 1, 5, 2, 2, 1, 5, 5, 2, 6, 1, 3, 1, 4, 4, 2, 1, 5, 2, 6, 5, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 2, 1,  
 1, 3, 4, 2, 2, 5, 4, 2, 4, 2, 4, 4, 3, 1, 5, 6, 5, 6, 6, 4, 2, 6, 3, 3, 2, 5, 5, 6, 4, 1, 1, 5, 3, 4,  
 6, 4, 3, 4, 6, 1, 5, 4, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 1, 6, 1, 3, 5, 3, 5, 1, 2, 3, 1, 6, 3, 1, 4, 6, 4, 4, 3, 6,  
 1, 3, 6, 5, 1, 3, 6, 5, 5, 5, 2, 5, 5, 2, 1, 4, 4, 5, 4, 6, 2, 4, 5, 5, 5, 2, 4, 2, 6, 6, 2, 1, 3, 2,  
 5, 3, 5, 5, 1, 3, 3, 2, 2, 2, 4, 3, 5, 1, 2, 2, 1, 3, 6, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 6, 4, 2, 6, 1, 4, 5, 3, 3,  
 3, 4, 6, 6, 6, 1, 2, 3, 3, 6, 4, 5, 2, 4, 1, 2, 2, 2, 6, 3, 6, 6, 3, 4, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 2, 4, 5, 1,  
 4, 5, 2, 6, 1, 5, 5, 4, 3, 6, 2, 4, 2, 4, 5, 1, 6, 5, 1, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 3, 1, 4, 1, 5, 5,  
 6, 6, 3, 5, 4, 5, 5, 5, 2, 6, 3, 1, 1, 2, 6, 1, 4, 3, 2, 2, 4, 3, 6, 6, 6, 3, 1, 3, 4, 6, 1, 3, 5, 4,  
 2, 3, 2, 6, 1, 4, 5, 4, 4, 5, 5, 4, 6, 3, 6, 2, 4, 3, 5, 4, 2, 4, 6, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 6, 4, 2, 3, 6,  
 1, 3, 3, 6, 6, 1, 5, 5, 4, 4, 1, 3, 5, 4, 6, 3, 2, 1, 6, 2, 3, 6, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 6, 1, 4, 1, 4, 1,  
 6, 4, 1, 4, 2, 4, 1, 3, 1, 6, 1, 6, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 6, 6, 6, 5, 6, 4, 5, 4, 5, 5, 1, 6,  
 2, 2, 4, 3, 5, 4, 2, 5, 4, 3, 1, 4, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 1, 3, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 6, 3, 5, 6, 2, 6, 2, 5,  
 3, 6, 3, 5, 4, 6, 2, 5, 4, 6, 1, 5, 4, 5, 1, 4, 2, 4, 5, 3, 6, 3, 3, 6, 5, 1, 5, 6, 1, 6, 5, 4, 6, 1,  
 2, 4, 1, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 6, 1, 3, 4, 2, 6, 2, 5, 6, 4, 1, 5, 2, 2, 4

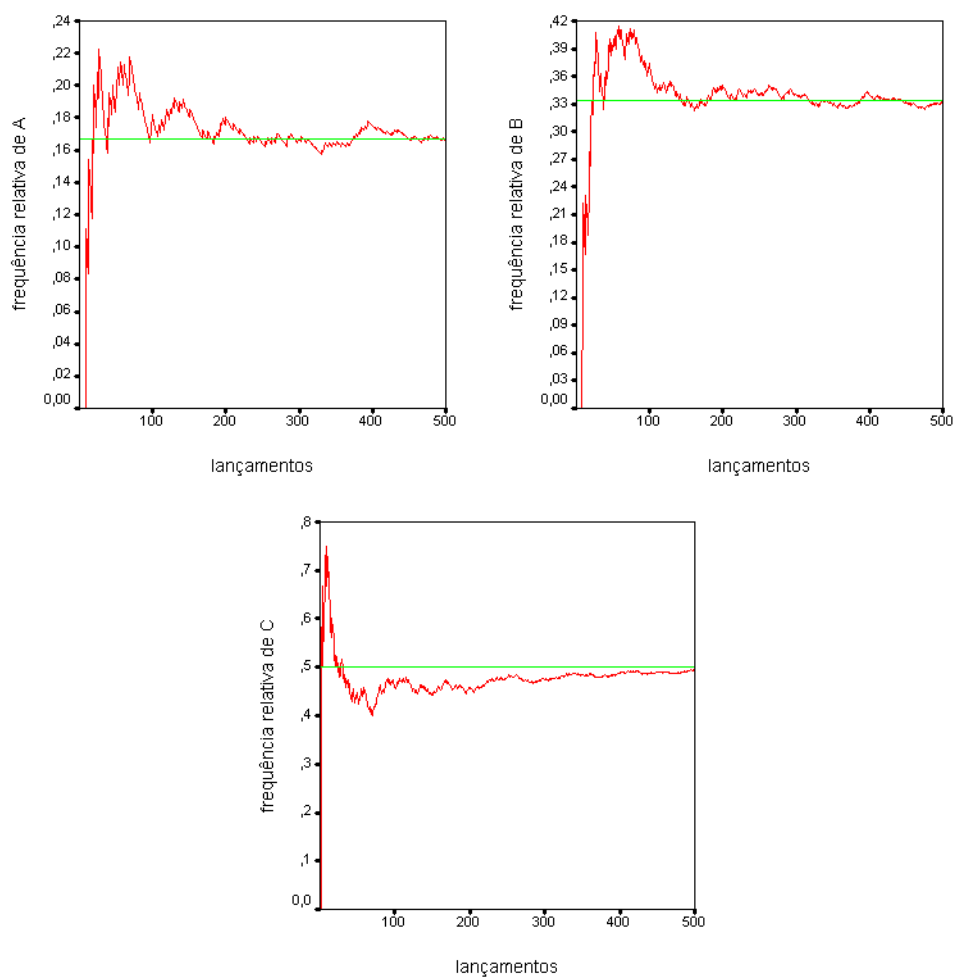
No quadro seguinte damos conta do número de ocorrências de cada uma das faces nos primeiros 100 e 1000 lançamentos, e nos 10000 lançamentos do dado:

Faces \ Repetições	100	1000	10000
1	18	175	1722
2	19	164	1646
3	18	178	1661
4	13	157	1590
5	18	152	1769
6	14	174	1612

Para cada um dos acontecimentos  $A = \{1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  e  $C = \{2, 4, 6\}$  considerados nos Exemplos 5.2.1 e 5.3.3 (cont., pág. 129, 132), as suas frequências relativas são dadas no quadro seguinte:

Acontecimentos \ Repetições	100	1000	10000
$A$	0.18	0.175	0.1722
$B$	0.37	0.339	0.3368
$C$	0.46	0.495	0.4848

Para termos uma ideia mais clara sobre a evolução da frequência relativa de cada um dos acontecimentos anteriores à medida que o número de repetições da experiência aumenta, apresentamos os gráficos seguintes relativos às primeiras 500 observações realizadas:



Constatamos que à medida que repetimos a experiência mais e mais vezes, a frequência relativa de cada um dos acontecimentos anteriores aproxima-se da probabilidade

desse acontecimento.

O facto anterior, que verificámos ocorrer no exemplo anterior para os lançamentos que simulámos, ocorre também em outra qualquer sucessão de lançamentos. Mais geralmente, ocorre ainda para uma qualquer experiência aleatória. Com efeito, pode ser demonstrado matematicamente o seguinte resultado, conhecido por **lei dos grandes números**:

**Lei dos grandes números:**

Para uma qualquer experiência aleatória, quando o número de repetições desta é muito elevado, a frequência relativa dum acontecimento aleatório aproxima-se, tanto quanto queiramos, da probabilidade desse acontecimento.

**Exemplo 5.3.5** No lançamento de três dados equilibrados, 9 e 10 pontos podem ser obtidos de seis maneiras diferentes:

126 135 144 225 234 333  
136 145 226 235 244 334

Por outro lado, as frequências absolutas desses acontecimentos indicam que a soma 9 ocorre menos vezes que a soma 10:

soma \ lançamentos	100	1000	10000	20000
9	12	109	1150	2296
10	10	147	1247	2529

À luz da lei dos grandes números, como podem ser compatíveis os factos anteriores? Reparemos que a contagem dos casos favoráveis a cada uma das somas não está correcta pois os casos apresentados não têm todos a mesma possibilidade de ocorrerem. Por exemplo, a ocorrência de 333 tem seis vezes menos possibilidade de ocorrer que 126, uma vez que devemos ter em conta o dado em que esses números ocorrem. Assim, escondido sob a designação 126 estão 6 casos igualmente prováveis, o mesmo acontecendo em todas as situações anteriores com três números diferentes. Nos casos em que em dois dados ocorre o mesmo número e no dado restante ocorre um número diferente, temos

3 casos igualmente prováveis:

soma 9	casos igual.prov.	soma 10	casos igual.prov.
126	6	136	6
135	6	145	6
144	3	226	3
225	3	235	6
234	6	244	3
333	1	334	3
total	25	total	27

Usando a definição clássica podemos então calcular a probabilidade da ocorrência de “soma 9” e de “soma 10”:

$$P(\text{“soma 9”}) = \frac{25}{216} \approx 0.1157$$

e

$$P(\text{“soma 10”}) = \frac{27}{216} = 0.125.$$

### 5.3.3 Definição frequencista de probabilidade

A lei dos grandes números está na base da chamada **definição frequencista de probabilidade** que apresentamos neste parágrafo. Esta definição é especialmente útil quando pouco conhecemos *a priori* sobre a experiência em causa, mas conhecemos os resultados obtidos na repetição da experiência aleatória, sempre nas mesmas condições, um grande número de vezes.

#### **Definição frequencista de probabilidade:**

A probabilidade de um acontecimento aleatório  $A$ , pode ser aproximada pela sua frequência relativa obtida pela repetição, um grande número de vezes, da experiência aleatória:

$$P(A) \underset{n \approx \infty}{\approx} \text{frequência relativa de } A.$$

Apesar da frequência relativa ser tomada, para todos os efeitos, como probabilidade exacta do acontecimento em causa, não nos devemos esquecer que ela não é mais do que uma aproximação para a verdadeira probabilidade (desconhecida) do acontecimento.



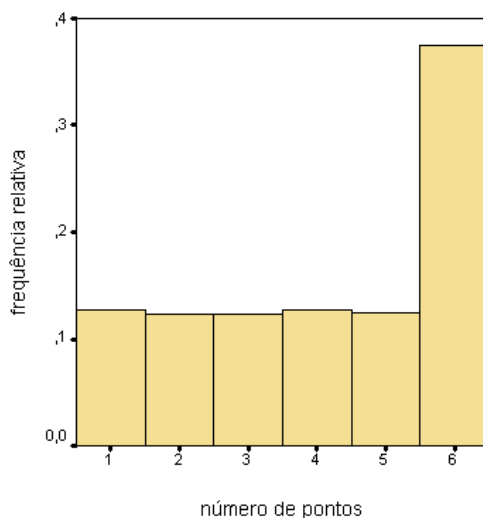
**Exemplo 5.3.6** Suponhamos que em sucessivos lançamentos de um dado obtemos as seguintes frequências relativas para cada uma das faces:

Faces \ Repetições	100	1000	10000
1	0.10	0.118	0.1268
2	0.08	0.116	0.1228
3	0.08	0.125	0.1231
4	0.18	0.125	0.1278
5	0.11	0.132	0.1247
6	0.45	0.384	0.3748

Atendendo às frequências relativas anteriores, que representamos no gráfico seguinte para 10000 repetições da experiência, fica claro que a utilização da definição clássica de probabilidade terá aqui pouco sentido. É neste caso mais apropriado utilizar a definição frequencista de probabilidade. Tomando para probabilidade de cada face a sua frequência relativa em 10000 lançamentos do dado, obtemos:

$$P(\{1\}) = 0.1268, \quad P(\{2\}) = 0.1228, \quad P(\{3\}) = 0.1231,$$

$$P(\{4\}) = 0.1278, \quad P(\{5\}) = 0.1247, \quad P(\{6\}) = 0.3748.$$



Para cada um dos acontecimentos considerados nos parágrafos anteriores, as suas probabilidades são dadas por

$$P(\{1\}) = 0.1268,$$

$$P(\{1, 2\}) = 0.1268 + 0.1228 = 0.2496$$

e

$$P(\{2, 4, 6\}) = 0.1228 + 0.1278 + 0.3748 = 0.6254.$$

No cálculo destas probabilidades usamos novamente a definição frequencista de probabilidade e o facto da frequência relativa dos acontecimentos  $\{1, 2\}$  e  $\{2, 4, 6\}$ , ser a soma das frequências relativas dos acontecimentos  $\{1\}$  e  $\{2\}$ , e  $\{2\}$ ,  $\{4\}$  e  $\{6\}$ , respectivamente.

**Exemplo 5.3.5** (cont. pág. 135) No caso do lançamento dos três dados, havendo razões para admitir que algum dos dados era viciado, seria mais apropriado usar a definição frequencista para obter aproximações para as probabilidades da ocorrência da “soma 9” e da “soma 10”. Usando os resultados obtidos em 20000 lançamentos dos três dados obteríamos

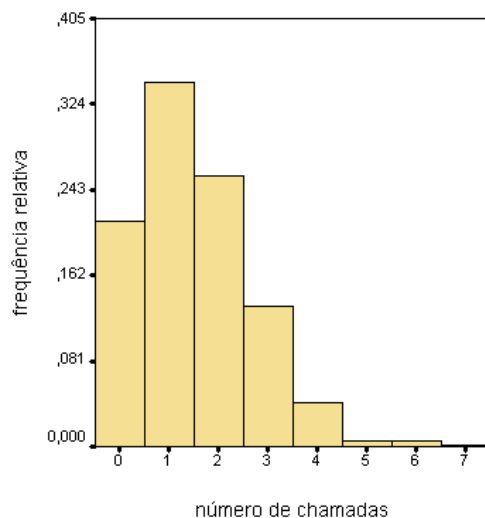
$$P(\text{“soma 9”}) = \frac{2296}{20000} = 0.1148$$

e

$$P(\text{“soma 10”}) = \frac{2529}{20000} = 0.12645.$$

Sendo estes valores muito próximos dos que calculámos pela definição clássica, é razoável pensar que os dados são efectivamente equilibrados.

**Exemplo 5.3.7** Retomemos um exemplo anterior, relativo ao número de chamadas telefónicas por minuto que chegam a uma central telefónica dum determinado serviço público, cuja distribuição é descrita pelo histograma seguinte



As frequências relativas observadas são dadas na tabela de frequências seguinte:

	Frequency	Percent	Relative Frequency
0	132	21,36	,2136
1	213	34,47	,3447
2	158	25,57	,2557
3	82	13,27	,1327
4	26	4,21	,0421
5	3	,49	,0049
6	3	,49	,0049
7	1	,16	,0016
Total	618	100,0	100,0

Tomando para probabilidade dum acontecimento a sua frequência relativa calculada a partir do número de chamadas verificadas nos 618 minutos observados, a probabilidade de, na central telefónica observada, ocorrerem mais que 5 chamadas num minuto é assim igual a

$$P(\{6, 7, 8, \dots\}) = 0.0049 + 0.0016 + 0.0000 + \dots = 0.0065$$

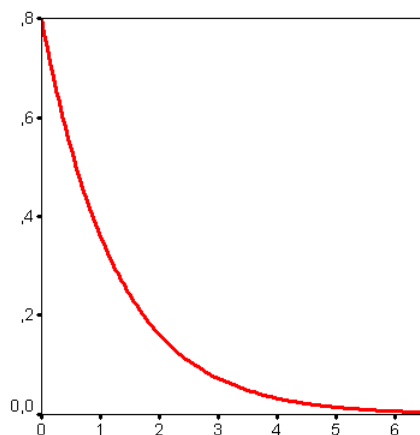
#### 5.3.4 Probabilidade via curvas densidade

No Capítulo 2 vimos que uma **curva densidade** podia ser usada para descrever a distribuição de frequências dum conjunto de observações  $x_1, \dots, x_n$ . Com efeito, constatámos que a frequência relativa dum qualquer intervalo que marquemos no eixo dos  $xx$  era aproximadamente igual à área da região compreendida entre a curva densidade e o eixo dos  $xx$  que tem por base esse intervalo. Sempre que as observações realizadas possam ser interpretadas como resultados da repetição, sempre nas mesmas condições, dum experiência aleatória, da definição frequencista de probabilidade podemos concluir que, quando o número de observações é grande, uma tal área é aproximadamente igual à probabilidade de obter observações no intervalo considerado.

Duma forma geral, podemos dizer que **a probabilidade dum acontecimento  $A$ , é aproximadamente igual à área da região compreendida entre a curva densidade e o eixo dos  $xx$  que tem por base o conjunto de valores de  $X$  que conduzem à realização de  $A$ .**

À luz da definição frequencista de probabilidade, vemos agora que quando no Capítulo 2 calculávamos frequências relativas de determinados acontecimentos a partir da curva densidade normal, o que estávamos a fazer não era mais do que calcular aproximações para a probabilidade de ocorrência desses acontecimentos. No Exemplo 2.5.3, podemos também dizer que a probabilidade do teodolito cometer um erro de medição inferior a  $-3$  ou superior a  $3$  milímetros é de aproximadamente 0.0026. No caso do Exemplo 2.5.4, podemos dizer que a probabilidade dum aluno obter uma classificação inferior a 8 valores é aproximadamente igual a 0.4168.

**Exemplo 5.3.8** Tendo em conta a distribuição de frequências dos tempos de interchegada de clientes a uma caixa dum hipermercado dada pelo histograma do Exemplo 1.2.7, é razoável descrever uma tal distribuição pela curva densidade seguinte:

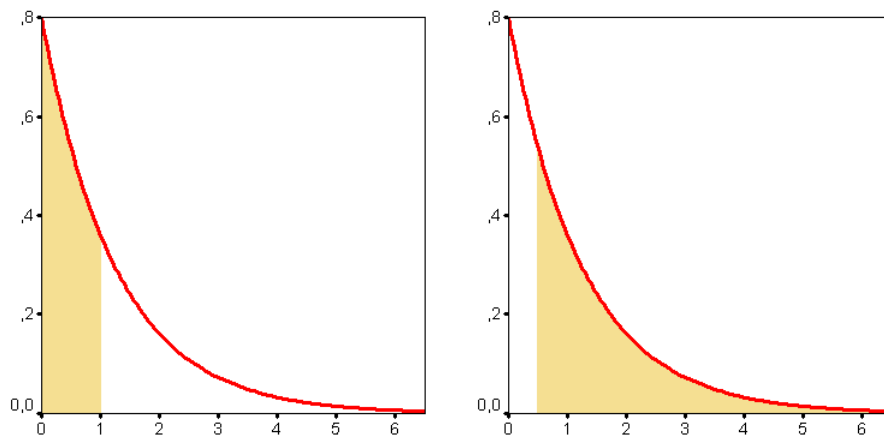


A probabilidade de cada um dos acontecimentos

$A =$  “tempo de interchegada inferior a 1 minuto”

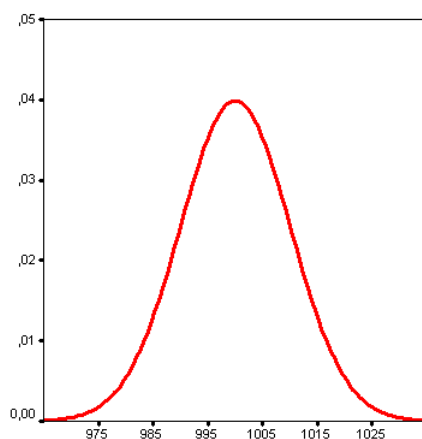
$B =$  “tempo de interchegada superior a meio minuto”,

é igual, respectivamente, à área de cada uma das regiões representadas nas figuras seguintes:



No exemplo anterior levanta-se o problema de saber como calcular cada uma das áreas que associámos aos acontecimentos aleatórios de interesse. Como já dissemos, um tal cálculo nem sempre é simples. No caso particular em que a curva densidade é uma curva normal, sabemos bem como calcular tais áreas. Vejamos mais um exemplo de cálculo de probabilidades a partir duma curva densidade normal.

**Exemplo 5.3.9** Tendo em conta a Figura 2.1.1 é razoável descrever a distribuição dos pesos dos pacotes de açúcar depois da calibragem da máquina pela curva densidade normal seguinte de média 1000 gramas e com desvio-padrão de 10 gramas:

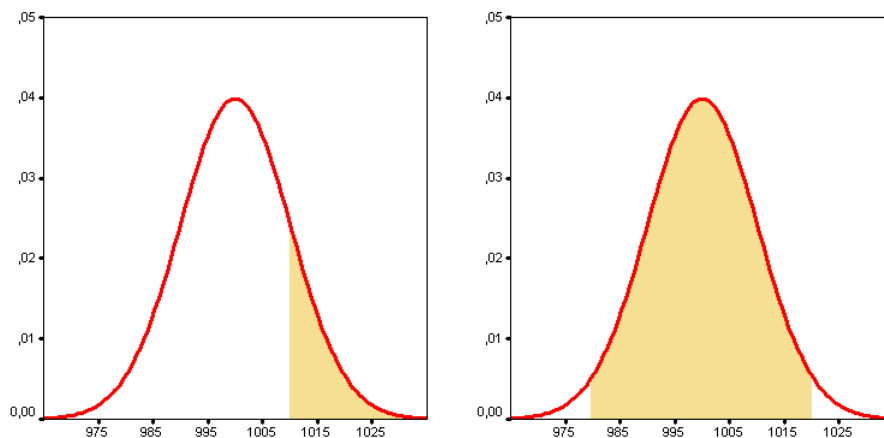


A probabilidade de cada um dos acontecimentos

$A =$  “peso superior a 1010 gramas”

$B =$  “peso superior a 980 gramas e inferior a 1020 gramas”,

é igual à área das regiões seguintes:



Sabemos que o cálculo das áreas anteriores pode ser feito recorrendo à tabela da distribuição normal standard. Representando por  $Y$  o peso, em gramas, de pacotes de açúcar empacotados pela máquina, e denotando por  $Z$  a variável normal standard, temos então:

$$P(A) = P(Y > 1010)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\frac{Y - 1000}{10} < \frac{1010 - 1000}{10}\right) \\
&= P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) \\
&= 1 - 0.8413 = 0.1587
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(980 < Y < 1020) \\
&= P\left(\frac{980 - 1000}{10} < \frac{Y - 1000}{10} < \frac{1020 - 1000}{10}\right) \\
&= P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z \leq -2) \\
&= 0.9772 - 0.0228 = 0.9544.
\end{aligned}$$

## 5.4 Propriedades da probabilidade

Nos parágrafos anteriores estudámos três maneiras de atribuir probabilidade aos acontecimentos de uma experiência aleatória. Dito de outro modo, estudámos diferentes formas de modelar matematicamente uma experiência aleatória. Dizemos então que obtivemos um **modelo probabilístico** para a experiência aleatória em estudo. Como vimos, esse modelo é constituído pelo espaço dos resultados  $\Omega$ , pela família de todos os acontecimentos aleatórios associados à experiência aleatória, e pela probabilidade  $P$  que a cada acontecimento  $A$  associa a sua probabilidade  $P(A)$ .

Para qualquer uma das formas que estudámos de atribuir probabilidade aos acontecimentos duma experiência aleatória, a probabilidade  $P$  satisfaz algumas propriedades das quais realçamos as seguintes:

**P.1)** *A probabilidade de qualquer acontecimento  $A$  é um número real maior ou igual a zero e menor ou igual a 1*

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

**P.2)** *A probabilidade do acontecimento certo é igual a 1:*

$$P(\Omega) = 1.$$

**P.3)** *A probabilidade do acontecimento contrário do acontecimento  $A$  é dada por:*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

**P.4)** A probabilidade do acontecimento impossível é igual a zero:

$$P(\emptyset) = 0.$$

**P.5)** A probabilidade da reunião de dois acontecimentos incompatíveis  $A$  e  $B$ , é igual à soma das suas probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ se } A \cap B = \emptyset.$$

As duas primeiras propriedades não levantam qualquer problema. São trivialmente verificadas por ambas as definições de probabilidade, bem como pela probabilidade atribuída a partir duma curva densidade. Recordemos apenas que neste último caso P.1 e P.2 são consequência do facto da área total sob uma curva densidade ser igual a 1. Relativamente à terceira propriedade, pensemos, por exemplo, no caso da definição clássica. Se a experiência tem  $n$  resultados possíveis sendo  $m$  deles favoráveis a  $A$ , então os restantes  $n - m$  resultados são contrários a  $A$ , isto é, são favoráveis a  $A^c$ . Assim

$$P(A^c) = \frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

A propriedade P.4 é verificada por ambas as definições. Reparemos, no entanto, que se trata duma propriedade que não é independente das três primeiras já enunciadas. Qualquer forma de atribuir probabilidade aos acontecimentos duma experiência aleatória que satisfaça as três primeiras propriedades, satisfaz necessariamente esta quarta propriedade. Para justificar esta afirmação, basta ter em conta P.1 e P.2 e o facto do acontecimento impossível ser contrário ao acontecimento certo. Com efeito,

$$P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

Relativamente à propriedade P.5, vejamos o que se passa com a definição frequentista. Suponhamos que a experiência aleatória é repetida  $n$  vezes, tendo ocorrido  $A$  em  $p$  repetições e  $B$  em  $q$  repetições. Como  $A$  e  $B$  são incompatíveis,  $A$  e  $B$  não podem ocorrer simultaneamente numa mesma repetição da experiência, e assim  $A \cup B$  ocorreu em  $p + q$  das  $n$  repetições da experiência. Pela definição frequentista temos então

$$P(A \cup B) = \frac{p + q}{n} = \frac{p}{n} + \frac{q}{n} = P(A) + P(B).$$

Poderíamos sem grande esforço enunciar outras propriedades comuns às probabilidades definidas no §5.3 e que são verificadas por toda e qualquer forma de atribuir

probabilidade a acontecimentos de uma experiência aleatória que satisfaça as propriedades anteriores. O facto de realçarmos estas põe em relevo a sua importância.

Estudámos até aqui três maneiras de atribuir probabilidade aos acontecimentos duma experiência aleatória. Terminamos este parágrafo notando que as propriedades da probabilidade, conjuntamente com a observação da experiência aleatória, podem também ser usadas para atingirmos esse objectivo. Este facto é ilustrado no exemplo seguinte.

**Exemplo 5.4.1** Atendendo às frequências relativas obtidas para cada uma das faces do dado Exemplo 5.3.6 (pág. 137), é perfeitamente razoável conjecturar que as faces 1, 2, 3, 4 e 5, têm igual probabilidade de ocorrer, e que a face 6 tem três vezes mais probabilidade de ocorrer que cada uma das outras:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\})$$

e

$$P(\{6\}) = 3P(\{1\}).$$

Tendo em conta P.2 e P.5, sabemos também que

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1 \quad (\text{porquê?}).$$

Concluimos então que

$$5P(\{1\}) + 3P(\{1\}) = 1,$$

ou seja,

$$P(\{1\}) = \frac{1}{8}.$$

Assim

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{8}$$

e

$$P(\{6\}) = \frac{3}{8}.$$

Tal como fizemos atrás, calculemos agora a probabilidade dos acontecimentos  $\{1\}$ ,  $\{1, 2\}$  e  $\{2, 4, 6\}$ . Usando a propriedade P.5 relativa à probabilidade da reunião de acontecimentos incompatíveis obtemos:

$$P(\{1\}) = \frac{1}{8} = 0.125,$$

$$P(\{1, 2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

e

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 0.625.$$



Apesar da modelação da experiência aleatória que agora fizemos ter sido distinta da do parágrafo anterior, o que se reflecte nas diferentes probabilidades encontradas para os acontecimentos anteriores, notemos que tais probabilidades são próximas das então obtidas. Este facto reforça a conjectura em que baseámos a presente modelação.

## 5.5 Independência de acontecimentos

A propriedade P.5 anterior, dá-nos uma regra para calcular a probabilidade da reunião de dois acontecimentos exclusivamente a partir da probabilidade de cada um deles. Para aplicarmos essa regra é essencial que os acontecimentos em causa sejam incompatíveis.

Como vamos ver a seguir, há também uma regra que permite calcular a probabilidade da intersecção de dois acontecimentos  $A$  e  $B$ , a partir exclusivamente da probabilidade de cada um deles. Para a podermos aplicar é necessário que **a ocorrência, ou não ocorrência, de qualquer um dos acontecimentos não afecte a probabilidade de realização do outro**. Quando isto acontece, dizemos que os acontecimentos  $A$  e  $B$  são **independentes**.

Atendendo à propriedade P.3, se a ocorrência, ou não ocorrência, do acontecimento  $A$  não afecta a probabilidade de realização do acontecimento  $B$ , também não afecta a probabilidade de realização do acontecimento contrário  $B^c$ . Quer isto dizer, que se  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, também  $A$  e  $B^c$ ,  $A^c$  e  $B$ , e  $A^c$  e  $B^c$ , são pares de acontecimentos independentes.

O exemplo seguinte motiva a propriedade de que goza a probabilidade da intersecção de acontecimentos independentes que enunciaremos mais à frente.

**Exemplo 5.5.1** Numa esfera de extracção de números da lotaria foram colocadas 20 bolas idênticas (excepto na cor) numeradas de 1 a 20, sendo as 10 primeiras vermelhas e as restantes 10 azuis. Considere a experiência aleatória que consiste na extracção de uma bola da esfera e anotação do seu número, e os acontecimentos aleatórios:

$$\begin{aligned} A &= \text{“saída de bola vermelha”} \\ B &= \text{“saída de bola com múltiplo de 4”} \\ C &= \text{“saída de bola com número par”}. \end{aligned}$$

O espaço dos resultados da experiência aleatória é

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 20\},$$

e os acontecimentos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são dados por

$$A = \{1, 2, \dots, 10\},$$

$$B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

e

$$C = \{2, 4, \dots, 18, 20\}.$$

Tendo todas as bolas igual possibilidade de serem extraídas, usamos a definição clássica de probabilidade para obter a probabilidade de ocorrência de cada um dos acontecimentos  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

$$P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

e

$$P(C) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Admitamos agora que ocorreu o acontecimento  $C$ , isto é, a bola que saiu tem um número par. Será que este facto altera a probabilidade de ocorrência de algum dos acontecimentos  $A$  ou  $B$ ? Dos dez resultados agora possíveis, cinco deles são favoráveis a  $A$  e também cinco deles são favoráveis a  $B$ . Quer isto dizer que  $A$  é tão provável como antes, enquanto que  $B$  é agora mais provável que antes. Por isso,  **$A$  e  $C$  são acontecimento independentes**, enquanto que  **$B$  e  $C$  não são acontecimentos independentes**.

Reparemos que apenas no primeiro dos casos anteriores, a probabilidade da intersecção dos acontecimentos em causa, é igual ao produto das probabilidades respectivas. Com efeito,

$$A \cap C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

e

$$P(A \cap C) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(A)P(C),$$

enquanto que,

$$B \cap C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

e

$$P(B \cap C) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{4} \frac{1}{2} = P(B)P(C).$$

Suponhamos agora que ocorreu o acontecimento  $A$ , isto é, a bola que saiu é vermelha, mas que não conseguimos ver o seu número. Como dos dez resultados agora possíveis, apenas dois são favoráveis a  $B$ , o acontecimento  $B$  é agora menos provável que antes.  **$A$  e  $B$  não são, por isso, acontecimentos independentes**. Mais uma vez, reparemos que a probabilidade da intersecção não é igual ao produto das probabilidades. Com efeito,

$$A \cap B = \{4, 8\}$$

e

$$P(A \cap B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

A noção de independência está intimamente relacionada com a primeira das propriedades que enunciámos das experiências aleatórias. Ao dizermos que uma experiência aleatória pode repetir-se nas mesmas condições, estamos implicitamente a dizer que o resultado de uma qualquer das repetições não influencia o resultado de qualquer outra. Os acontecimentos aleatórios associados a cada uma das repetições da experiência são, por isso, independentes. Esta situação é ilustrada no exemplo seguinte.

**Exemplo 5.5.2** Uma moeda equilibrada é lançada duas vezes ao ar e é registada a face que fica voltada para cima. Consideremos os acontecimentos:

$A =$  “saída de face portuguesa no 1<sup>o</sup> lançamento”

$B =$  “saída de face portuguesa no 2<sup>o</sup> lançamento”

Atendendo a que a ocorrência de  $A$  não afecta a probabilidade de ocorrência de  $B$ , nem a ocorrência de  $B$  afecta a probabilidade de ocorrência de  $A$ , estes acontecimentos são independentes. Reparemos uma vez mais que neste caso a probabilidade da intersecção  $A \cap B$  é igual ao produto das probabilidades de  $A$  e de  $B$ . Com efeito, neste caso

$$\Omega = \{PP, PE, EP, EE\},$$

$$A = \{PP, PE\},$$

$$B = \{PP, EP\},$$

$$A \cap B = \{PP\},$$

e, da definição clássica de probabilidade, vale a igualdade

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(A)P(B).$$

Estamos agora em condições de enunciar a regra já anunciada para o cálculo da probabilidade da intersecção de acontecimentos aleatórios.

**P.6)** *A probabilidade da intersecção de dois acontecimentos independentes  $A$  e  $B$ , é igual ao produto das suas probabilidades:*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Como ficou implícito dos exemplos anteriores, mais do que uma propriedade dos acontecimentos que são entre si independentes, a igualdade anterior é verdadeira apenas para acontecimentos aleatórios que são entre si independentes.

Terminamos este parágrafo com um exemplo que reforça a importância da noção de independência, para o cálculo da probabilidade de acontecimentos associados a uma experiência aleatória.

**Exemplo 5.5.3** Quando uma máquina está a funcionar adequadamente, apenas 0.1% das peças que produz apresentam defeito por razões várias que não podem na totalidade ser controladas. Admitamos que em dois momentos, razoavelmente afastados no tempo, decidimos observar duas peças que acabaram de ser produzidas pela máquina, e que pretendemos saber qual é a probabilidade de nenhuma das peças ser defeituosa.

Neste caso, o conjunto dos resultados da experiência é

$$\Omega = \{00, 01, 10, 11\},$$

onde, por exemplo, 01 significa que a primeira peça observada não é defeituosa mas que a segunda o é. Estamos interessado na probabilidade do acontecimento

$$A = \{00\}.$$

Como os resultados da experiência não são igualmente prováveis não podemos recorrer à definição clássica para calcular a probabilidade de  $A$ . Também não temos informação suficiente para usar a definição frequencista. No entanto, tendo em conta que

$$A = A_1 \cap A_2,$$

onde

$$A_1 = \text{“peça defeituosa na primeira observação”},$$

$$A_2 = \text{“peça defeituosa na segunda observação”},$$

e que é razoável admitir que  $A_1$  e  $A_2$  são acontecimentos independentes, uma vez que as duas observações foram realizadas em momentos afastados no tempo, então

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0.999 \times 0.999 = 0.99801.$$

## 5.6 Bibliografia

Albert, J.H. (2003). College students' conceptions of probability, *The American Statistician*, 57, 37–45.

Graça Martins, M.E., Cerveira, A.G. (1999). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*, Universidade Aberta.

Moore, D.S. (1985). *Statistics: Concepts and Controversies*, W.H. Freeman and Company.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.



## Capítulo 6

# Variáveis aleatórias

*Noção de variável aleatória. Variáveis discretas e contínuas. Distribuição de probabilidade. Histograma de probabilidade. Densidade de probabilidade. Média e variância duma variável aleatória. Propriedades da média e da variância. Lei dos grandes números.*

### 6.1 Noção de variável aleatória

Em cada uma das experiências aleatórias descritas nos parágrafos anteriores, estivemos interessados na observação duma variável que, tendo em conta a distinção que fizemos no Capítulo 1, podemos classificar de qualitativa ou de quantitativa. Quer num, quer no outro caso, quando uma variável associa um valor numérico a cada resultado duma experiência aleatória, vamos chamar-lhe **variável aleatória**.

Nos parágrafos 1.2 e 1.3 estudámos métodos gráficos e numéricos para descrever a distribuição duma variável a partir de observações efectuadas dessa variável. A noção de distribuição duma variável como sendo o conjunto de valores que a variável toma e também a **frequência** com que os toma, está intimamente relacionada com as observações realizadas. Dois conjuntos de dados conduzem normalmente a frequências diferentes para um mesmo valor assumido pela variável. Apesar disso, será de esperar que esses dois conjuntos de dados, porque relativos a uma mesma variável, comportem informação semelhante no que respeita ao centro, à dispersão e à forma da distribuição dessa variável.

Lançando mão da noção de probabilidade que estudámos no capítulo anterior, vamos precisar um pouco mais a noção de **distribuição duma variável aleatória**, tornando-a, em particular, independente do conjunto de observações realizadas. Vamos chamar-lhe por isso, **distribuição de probabilidade** da variável. Como veremos, a distribuição de probabilidade pode ser interpretada como uma versão idealizada da

distribuição de frequências dessa variável.

## 6.2 Distribuição de probabilidade

A **distribuição de probabilidade** dum variável dá-nos conta dos valores que a variável toma e da **probabilidade** com que os toma. Para uma variável aleatória  $X$  que toma os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$  com probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , respectivamente, a sua distribuição de probabilidade pode ser apresentada numa tabela do tipo seguinte:

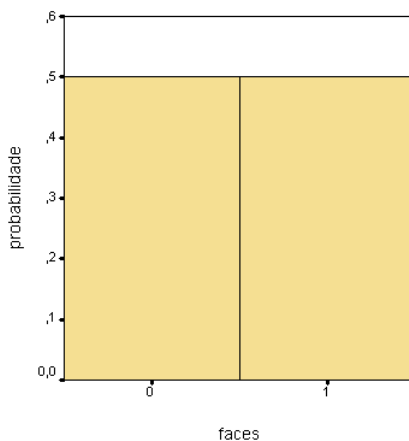
valores de $X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$
probabilidade	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$

Como a probabilidade de ocorrência de cada um dos valores  $x_i$  é aproximada pela sua frequência relativa obtida a partir dum grande número de observações da variável, há uma relação óbvia entre a tabela anterior e uma tabela de frequências relativas da variável. Neste sentido, é por vezes útil interpretar a distribuição de probabilidade como sendo a verdadeira distribuição da variável ou uma descrição idealizada da distribuição de frequências relativas da variável, sendo esta última distribuição, a que podemos aceder através da observação da variável, uma aproximação da verdadeira distribuição.

**Exemplo 6.2.1** Consideremos o caso do lançamento dum moeda equilibrada de um euro, em que  $X$  representa a face que ocorre em cada lançamento. Representando por 0 a ocorrência da face europeia e por 1 a ocorrência da face portuguesa, a distribuição de probabilidade de  $X$  é dada por:

valores de $X$	0	1
probabilidade	1/2	1/2

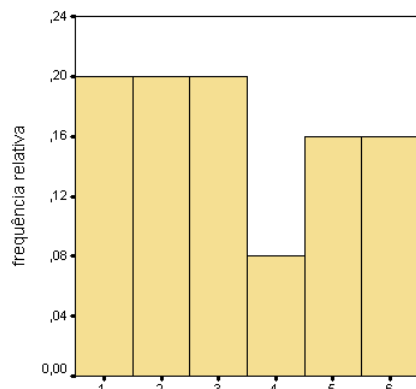
Esta distribuição pode também ser representada graficamente na forma de histograma, a que chamamos **histograma de probabilidade**:



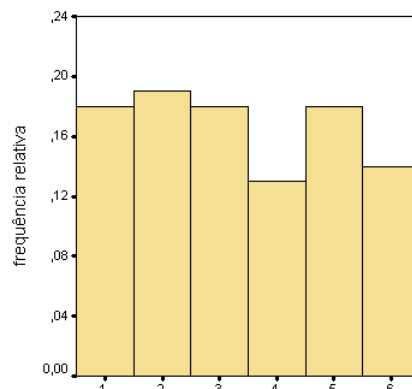




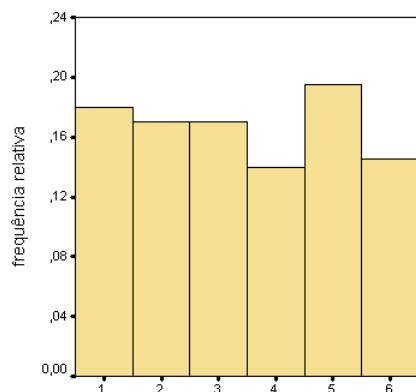
A partir de 50, 100, 200 e 400 lançamentos do dado, obtemos os histogramas de frequências relativas seguintes:



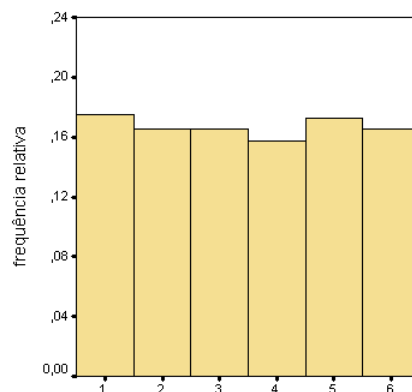
n=50



n=100

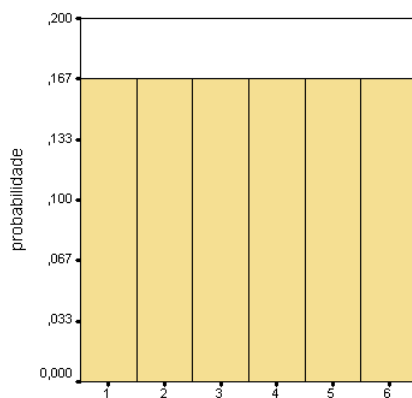


n=200



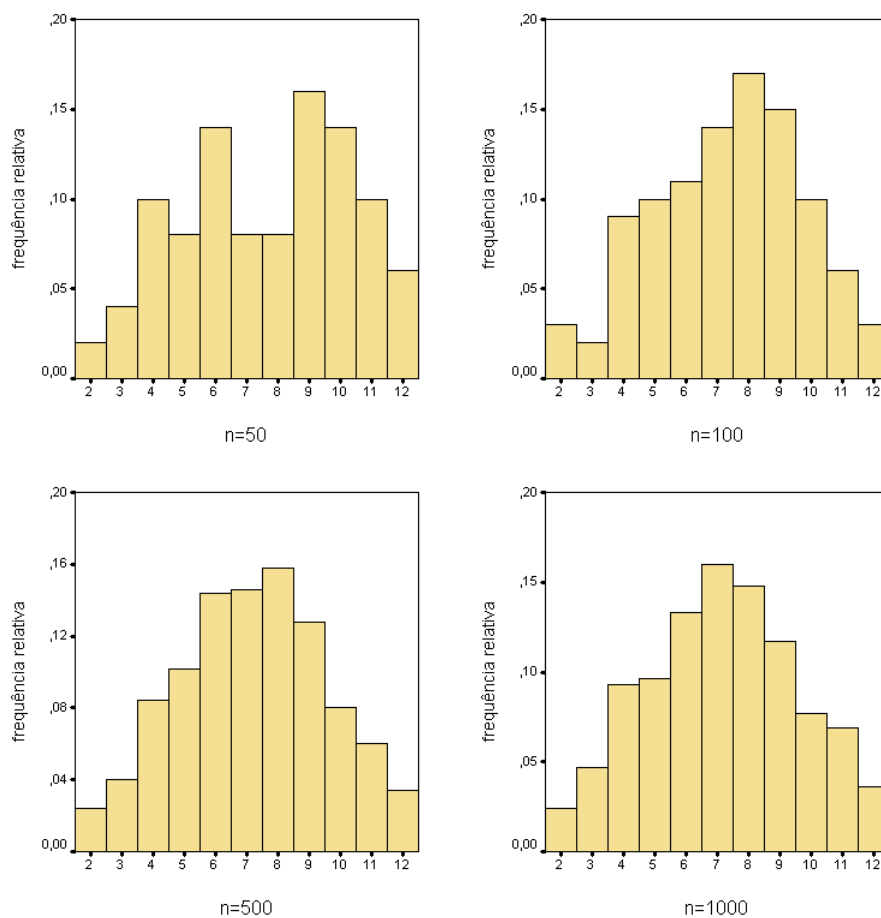
n=400

Tal como no caso da moeda, à medida que o número de observações aumenta, o histograma de frequências relativas aproxima-se do histograma de probabilidade, que neste caso é dado por

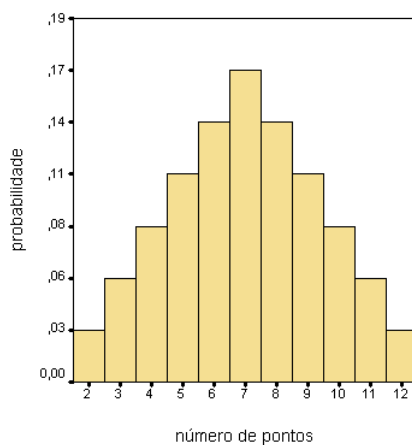


número de pontos

**Exemplo 6.2.3** No lançamento de dois dados equilibrados usuais, observaram-se as seguintes frequências relativas para o número total de pontos obtidos nos dois dados em 50, 100, 500 e 1000 lançamentos dos mesmos:



Pela lei dos grandes números, estes histogramas aproximar-se-ão do histograma de probabilidade



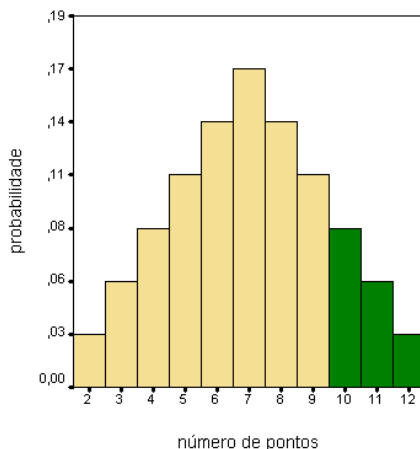
correspondente à variável aleatória  $S$  que nos dá a soma dos pontos obtidos em ambos os dados, cuja distribuição de probabilidade é

valores de $S$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilidade	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A probabilidade de obter 10 ou mais pontos no lançamento de dois dados equilibrados é igual a

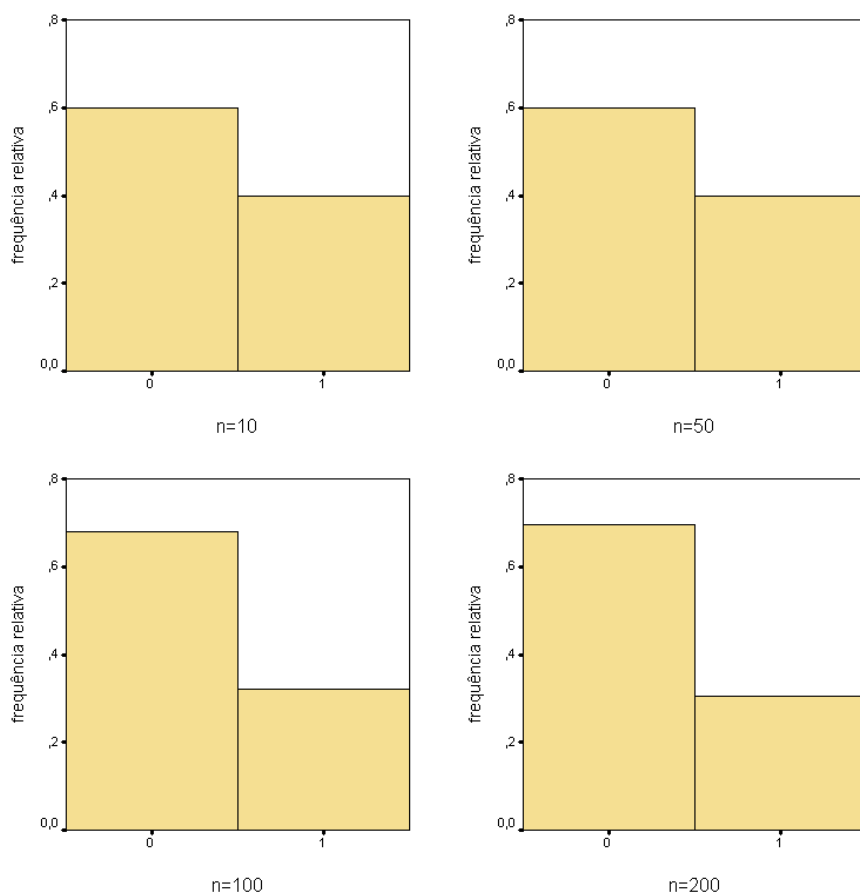
$$P(S \geq 10) = P(S = 10) + P(S = 11) + P(S = 12) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Notemos que tal probabilidade não é mais do que a área da região marcada a seguir no histograma de probabilidade:



Os exemplos anteriores, apesar de importantes para motivar a noção de distribuição de probabilidade a partir da noção de distribuição de frequências, são pouco interessantes dum ponto de vista da inferência estatística. Com efeito, nos casos anteriores sabemos tudo sobre a experiência aleatória em causa, isto é, conseguimos, a partir da informação dada *a priori* sobre a experiência, explicitar a distribuição de probabilidade das variáveis  $X$ ,  $Y$  e  $S$ . No exemplo seguinte isso não acontece.

**Exemplo 6.2.4** Os gráficos seguintes resumem os resultados obtidos no lançamento duma moeda de um euro, para 10, 50, 100 e 200 lançamentos da moeda, onde por 0 representamos a ocorrência da face europeia e por 1 a ocorrência da face portuguesa.



Achando que os resultados anteriores revelam fortes indícios de que a moeda não é equilibrada, uma vez que os histogramas anteriores não parecem aproximar-se do histograma de probabilidade relativo a uma moeda equilibrada, não podemos explicitar a distribuição de probabilidade da variável  $Z$  que representa a face que ocorre em cada lançamento. No entanto, se representarmos por  $p$  a probabilidade de ocorrência da face portuguesa, podemos dizer que a distribuição de probabilidade de  $Z$  é da forma

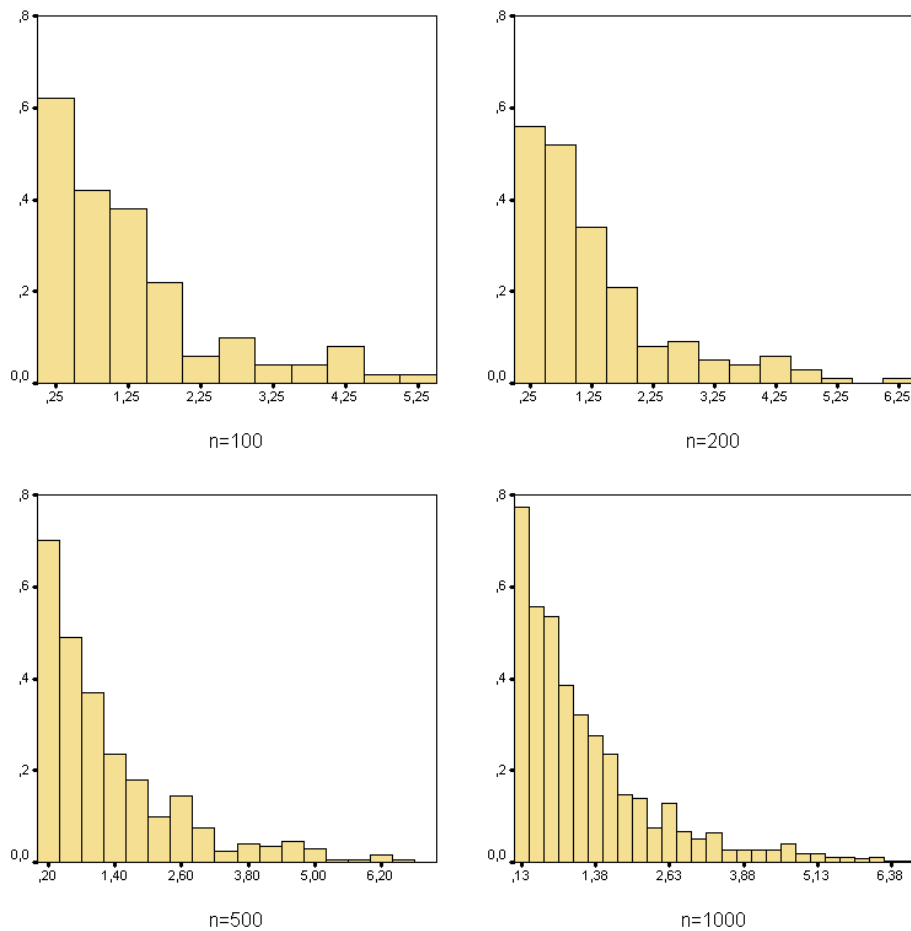
valores de $Z$	1	0
probabilidade	$p$	$1 - p$

Usando a linguagem dos estudos observacionais por amostragem,  $p$  pode ser interpretado como uma característica numérica desconhecida da população em estudo, isto é,  $p$  é um parâmetro. A inferência sobre o verdadeiro valor do parâmetro  $p$  é um problema do interesse da estatística inferencial. Em particular, podemos querer saber se a moeda é equilibrada, isto é, se  $p = 1/2$ .

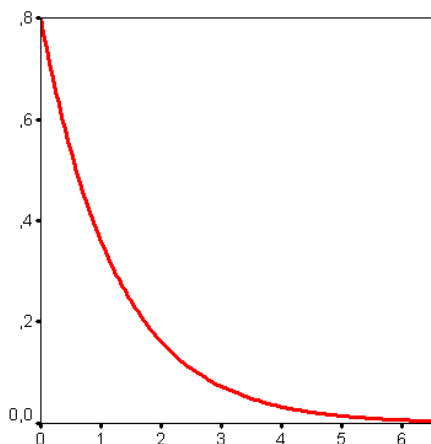
A estabilização do histograma de frequências relativas à medida que o número de observações da variável em estudo aumenta, ocorre não só no caso das variáveis

que tomam um número finito de valores distintos, a que chamamos **discretas**, como para aquelas que tomam todos os valores dum determinado intervalo, a que chamamos **contínuas**. Este facto é ilustrado nos dois exemplos seguintes.

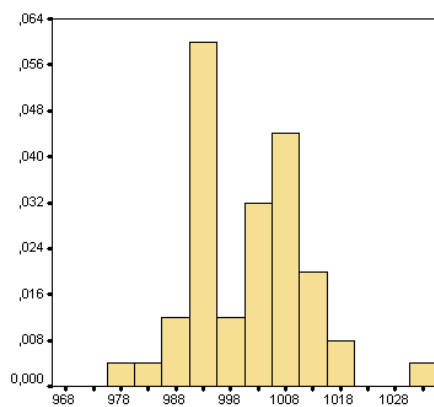
**Exemplo 6.2.5** Representemos por  $X$  o tempo que medeia a chegada de dois clientes consecutivos a uma caixa de supermercado.



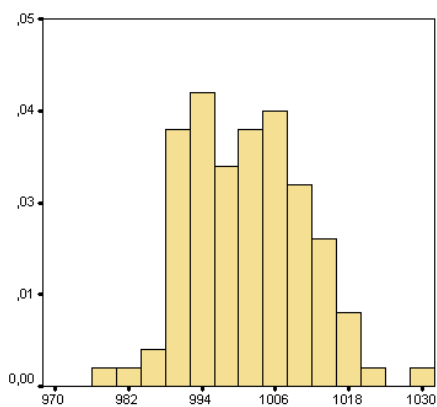
Os histogramas normalizados anteriores (ver também pág. 24) descrevem a distribuição de  $X$  a partir de amostras de tamanho 100, 200, 500 e 1000. Tal como nos exemplos anteriores, os histogramas tendem a estabilizar quando o número de observações é grande. Pode ainda ser demonstrado que à medida que o número de observações aumenta e o tamanho das classes diminui não muito violentamente, a sua forma aproxima-se duma curva regular. No caso presente, uma tal curva é representada no gráfico seguinte.



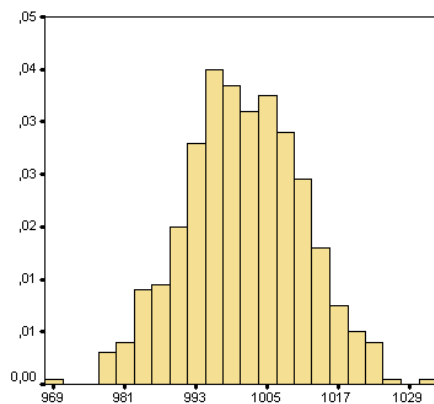
**Exemplo 6.2.6** Seja agora  $Y$  o peso, em gramas, de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina. Os histogramas normalizados seguintes descrevem a distribuição de  $Y$  para de amostras de tamanho 50, 100, 500 e 1000:



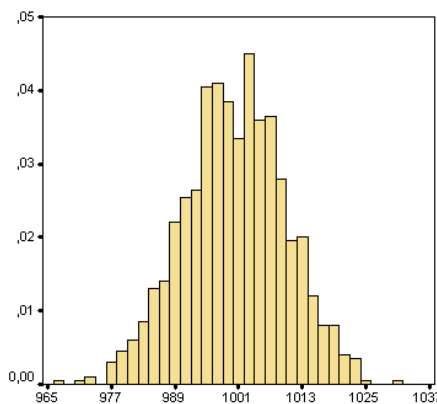
n=50



n=100

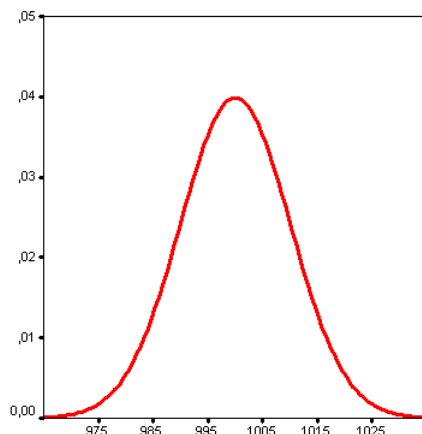


n=500



n=1000

Com o aumento do números de observações e a diminuição da amplitude das classes, os histogramas aproximam-se da curva seguinte



Sendo os histogramas anteriores normalizados, será de esperar que as curvas anteriores estejam sempre acima do eixo dos  $xx$  e a área compreendida entre ela e esse eixo seja igual a 1. Além disso, e ainda pelas propriedades dos histogramas normalizados, a frequência relativa de qualquer intervalo marcado que marquemos no eixo dos  $xx$  é aproximadamente igual à área da região compreendida entre cada uma das curvas anteriores e o eixo dos  $xx$  que tem por base esse intervalo. Por outras palavras, as curvas anteriores são **curvas densidade**.

Contrariamente ao que fizemos no Capítulo 2, onde este tipo de curvas foi utilizado para descrever o padrão geral da distribuição de frequências duma variável, as curvas densidade surgem-nos agora associadas à **distribuição de probabilidade duma variável contínua**, sendo por isso chamadas de **densidade de probabilidade**.

Interpretando a distribuição de probabilidade como a verdadeira distribuição da variável em estudo, uma vez que esta é obtida a partir dum conjunto idealmente infinito de observações da variável, podemos dizer que conhecendo a densidade de probabilidade duma variável  $X$ , somos capazes de calcular a verdadeira probabilidade de acontecimentos aleatórios que lhe estão associados. De forma análoga ao que fizemos atrás, a probabilidade dum acontecimento  $A$ , é igual à área da região compreendida entre a curva densidade de probabilidade e o eixo dos  $xx$  que tem por base o conjunto de valores de  $X$  que conduzem à realização de  $A$  (ver §5.3.4).

Sempre que a densidade de probabilidade de  $X$  seja uma curva densidade normal, com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , dizemos que  $X$  **possui uma distribuição normal**, e indicamos  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Por simplicidade de linguagem, dizemos também que  $X$  **é uma variável aleatória normal**. Tal como no Exemplo 6.2.4,  $\mu$  e  $\sigma$  são por vezes quantidades desconhecidas, caso em que não podemos especificar completamente



a distribuição de probabilidade da variável  $X$  mas tão somente conhecer a forma da sua distribuição.

### 6.3 Média e variância duma variável aleatória

No §1.3 vimos como calcular a média  $\bar{x}$  e a variância  $s_x^2$  dum conjunto de  $n$  observações duma variável  $X$ . Se  $x_1, x_2, \dots, x_k$  são os valores distintos que ocorrem nessas observações, e  $n_1, n_2, \dots, n_k$  o número de vezes que cada um deles ocorre, as fórmulas para o cálculo da média e da variância são, respectivamente,

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \sum \frac{n_i}{n} x_i$$

e

$$s_x^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \sum \frac{n_i}{n - 1} (x_i - \bar{x})^2,$$

onde  $n_i/n$  é a frequência relativa do valor  $x_i$  assumido pela variável  $X$ .

A média e a variância assim calculadas, dependem duma distribuição de frequências particular de  $X$ . Outro conjunto de observações conduziria a outra distribuição de frequências e, conseqüentemente, a outros valores para  $\bar{x}$  e  $s_x^2$ . Para reforçar o facto de  $\bar{x}$  e  $s_x^2$  variarem de amostra para amostra,  $\bar{x}$  e  $s_x^2$  são também ditas **média amostral** e **variância amostral**.

Utilizando a noção de distribuição de probabilidade de  $X$ , é fácil introduzir uma noção de **média e de variância da variável aleatória  $X$**  que não dependa de qualquer conjunto de observações de  $X$ . Para as distinguir das média e variância amostrais, vamos denotá-las por  $\mu_X$  e  $\sigma_X^2$ , ou, simplesmente, por  $\mu$  e  $\sigma^2$ . À raiz quadrada da variância,  $\sigma_X$ , chamamos **desvio-padrão da variável aleatória  $X$** .

Para uma **variável aleatória discreta  $X$**  com distribuição de probabilidade dada por

valores de $X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$
probabilidade	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$

a **média**,  $\mu_X$ , e a **variância**,  $\sigma_X^2$ , são definidas, respectivamente, por

$$\mu_X = \sum p_i x_i$$

e

$$\sigma_X^2 = \sum p_i (x_i - \mu_X)^2.$$

Como podemos constatar, estas fórmulas são semelhantes às fórmulas de cálculo das média e variância amostrais. Em vez de utilizarmos uma distribuição de frequências de  $X$ , utilizamos a distribuição de probabilidade de  $X$ .

Tal como para as características amostrais respectivas, a média  $\mu_X$  é uma medida do centro da distribuição de probabilidade de  $X$ , enquanto que a variância  $\sigma_X^2$ , ou o desvio-padrão  $\sigma_X$ , são medidas de dispersão da distribuição de probabilidade de  $X$  em torno da média  $\mu_X$ . Variáveis aleatórias com distribuições concentradas em torno da média têm pequenos desvios-padrão, contrariamente a variáveis mais dispersas em torno da média.

A interpretação geométrica que apresentámos anteriormente para  $\bar{x}$  como sendo o ponto do eixo horizontal que “equilibra” o histograma de frequências relativas da variável  $X$ , mantém-se para  $\mu_X$ , mas relativamente ao seu histograma de probabilidade.

Tal como já acontecia com o cálculo da variância amostral, a fórmula anterior não é a mais apropriada para o cálculo de  $\sigma_X^2$ . Para esse efeito é preferível utilizar a fórmula

**Cálculo da variância de  $X$ :**

$$\sigma_X^2 = \sum p_i x_i^2 - \mu_X^2.$$

**Exemplo 6.3.1** Ilustremos a aplicação das fórmulas anteriores, efectuando o cálculo da média e da variância das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  definidas nos Exemplos 6.2.1 e 6.2.2, respectivamente. Para a variável  $X$  temos,

$$\mu_X = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} = 0.5, \text{ e}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - 0.5^2 = 0.25$$

e para  $Y$  obtemos

$$\mu_Y = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3.5, \text{ e}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{6} \times 1^2 + \frac{1}{6} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 + \frac{1}{6} \times 4^2 + \frac{1}{6} \times 5^2 + \frac{1}{6} \times 6^2 - 3.5^2 \approx 2.9167.$$

Tendo em conta a interpretação geométrica da média, reparemos que dos histogramas de probabilidade das variáveis  $X$  e  $Y$  (ver pág. 152 e 154) poderíamos ter concluído imediatamente, e sem efectuar qualquer cálculo, que

$$\mu_X = 0.5 \quad \text{e} \quad \mu_Y = 3.5.$$

Reparemos na interpretação simples das médias anteriores como número médio, ou esperado, de faces portuguesas, em cada lançamento da moeda, ou de pontos, em cada lançamento do dado. Com efeito, no caso do lançamento da moeda, sendo ela equilibrada, esperamos, em média, obter uma face portuguesa em cada dois lançamentos, isto é, esperamos obter um ponto em cada dois lançamentos, ou seja, 0.5 pontos por lançamento. No caso do lançamento do dado esperamos, em média, obter cada uma das faces em cada seis lançamentos, isto é, esperamos obter em média  $(1+2+3+4+5+6)/6 = 3.5$  pontos por lançamento.

**Exemplo 6.3.2** Suponhamos agora que um dado equilibrado tem marcados os números 1, em três das faces, 2, em duas das faces, e o número 3 na face restante. Se  $Z$  representar o número de pontos obtidos num lançamento do dado, a distribuição de probabilidade de  $Z$  é dada por

valores de $Z$	1	2	3
probabilidade	1/2	1/3	1/6

A média e a variância de  $Z$  são dadas por

$$\mu_Z = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{5}{3}, \text{ e}$$

$$\sigma_Z^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{3} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

No caso da variável  $X$  ser contínua, a sua distribuição de probabilidade é caracterizada pela densidade de probabilidade de  $X$ . Neste caso, a **média**,  $\mu_X$ , e a **variância**,  $\sigma_X^2$ , da variável contínua  $X$  são definidas como sendo a **média** e a **variância da densidade de probabilidade de  $X$** , isto é,  $\mu_X$  e  $\sigma_X^2$  são a média e a variância duma curva densidade. Como referimos no §2.2, atendendo à complexidade das técnicas analíticas envolvidas, o cálculo da média e da variância duma curva densidade ultrapassa em muito os objectivos desta disciplina. Por isso, nada mais avançaremos sobre este tópico para além do que já dissemos no Capítulo 2.

De acordo com o que vimos no §2.3, no caso particular das variáveis normais, temos:

**Média e variância duma variável normal:**

Se

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

então

$$\mu_X = \mu \quad \text{e} \quad \sigma_X^2 = \sigma^2.$$

## 6.4 Propriedades da média e da variância

Por razões análogas às expostas no §1.4, a média,  $\mu$ , e a variância,  $\sigma^2$ , duma variável aleatória, gozam das propriedades da média e variância amostrais. Mais precisamente, se duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , estão relacionadas através duma relação do tipo

$$Y = aX + b,$$

para determinados valores reais  $a$  e  $b$ , o que acontece quando ocorre alteração da unidade de medida, então valem as relações seguintes entre as médias e variâncias de  $X$  e  $Y$ :

**Efeito da transformação linear  $Y = aX + b$ :**

⊙ média:

$$\mu_Y = a\mu_X + b;$$

⊙ variância e desvio-padrão:

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2, \quad \sigma_Y = a \sigma_X.$$

Conhecidas a média e a variância de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , é por vezes importante saber como calcular a média e a variância da variável soma  $X + Y$ , à custa das médias e variâncias de cada uma das variáveis  $X$  e  $Y$  (nos casos em que tal seja possível). Vejamos um exemplo duma tal situação.

**Exemplo 6.4.1** O Abel joga com um adversário o seguinte jogo: cada um deles lança uma moeda portuguesa de um euro; por cada face portuguesa que ocorra nas duas moedas o Abel paga ao adversário 5 euros; por cada face europeia que ocorra nas duas moedas o Abel recebe do adversário 5 euros. Representemos por  $X$  o ganho (ou perda) do Abel com a sua moeda em cada lançamento da mesma, e por  $Y$  o ganho (ou perda) do Abel devido à moeda do seu adversário. Reparemos que  $X$  e  $Y$  têm a mesma distribuição de probabilidade que é dada por

valores de $X$ ( $Y$ )	-5	5
probabilidade	1/2	1/2

As médias e variâncias de  $X$  e  $Y$ , que nos dão o ganho médio por partida do Abel com a sua moeda e com a moeda do seu adversário, respectivamente, coincidem, sendo dadas por:

$$\mu_X = \mu_Y = \frac{1}{2} \times (-5) + \frac{1}{2} \times 5 = 0, \text{ e}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{1}{2} \times (-5)^2 + \frac{1}{2} \times 5^2 - 0^2 = 25.$$

O ganho total do Abel em cada repetição do jogo é dado pela variável  $Z = X + Y$ . Como fazer para calcular a média e a variância de  $Z$ ? Seguindo o procedimento anterior, precisamos de determinar a distribuição de probabilidade de  $Z$ :

valores de $Z$	-10	0	10
probabilidade	1/4	1/2	1/4

Assim

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \frac{1}{4} \times (-10) + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 10 = 0 \\ \sigma_Z^2 &= \frac{1}{4} \times (-10)^2 + \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{4} \times 10^2 - 0^2 = 50. \end{aligned}$$

No exemplo anterior, valem as igualdades

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$$

e

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2.$$

Serão estas relações válidas em geral? No caso da média, tal é com efeito verdade:

**Média da soma  $X + Y$ :**

Para quaisquer duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , a média da soma  $X + Y$  é igual à soma das médias respectivas:

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y.$$

Reparemos que esta propriedade é partilhada pela média amostral. Com efeito, se  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  são os valores observados para duas variáveis  $X$  e  $Y$ , onde os valores  $x_i$  e  $y_i$  são observações relativas a um mesmo indivíduo, a média amostral  $\bar{z}$  relativa à variável  $Z = X + Y$ , é dada por

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\sum z_i}{n} = \frac{\sum (x_i + y_i)}{n} \\ &= \frac{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_n + y_n}{n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \\ &= \bar{x} + \bar{y}. \end{aligned}$$

Notemos, no entanto, que a variância amostral da soma de duas variáveis não é necessariamente igual à soma das variâncias amostrais de cada uma das variáveis. Com efeito, efectuando mais alguns cálculos chegaríamos à conclusão que a variância amostral  $s_z^2$  de  $Z$  era dada por

$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2r s_x s_y,$$

onde  $r$  é o já nosso conhecido coeficiente de correlação linear entre as variáveis  $X$  e  $Y$ . Assim, para obter a variância da soma precisamos, da variância de cada uma das variáveis  $X$  e  $Y$ , e também do respectivo coeficiente de correlação linear.

Da igualdade anterior, concluímos ainda que se associação linear entre  $X$  e  $Y$  for positiva, a variância da soma é maior do que a soma das variâncias de  $X$  e  $Y$ , enquanto que se associação linear entre  $X$  e  $Y$  for negativa, a variância da soma é menor do que a soma das variâncias de  $X$  e  $Y$ . Finalmente, sendo igual a zero o coeficiente de correlação linear entre  $X$  e  $Y$ , a variância amostral da soma é igual à soma das variâncias amostrais de  $X$  e  $Y$ .

Esta última propriedade da variância amostral, permanece válida para a variância duma soma de variáveis aleatórias, sendo, em particular, verdadeira quando as variáveis  $X$  e  $Y$  são **independentes**, isto é, **quando a ocorrência de qualquer um dos valores de uma das variáveis não afecta a probabilidade de ocorrência de qualquer um dos valores da outra variável**:

**Variância da soma  $X + Y$ :**

Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes, a variância da soma  $X + Y$  é igual à soma das variâncias respectivas:

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2.$$

**Exemplo 6.4.1** (cont.) Tendo em conta as duas propriedades anteriores, e a independência entre as variáveis  $X$  e  $Y$  (uma vez que o resultado obtido numa moeda não influencia, nem é influenciado, pelo resultado obtido na outra), concluímos que o cálculo da média e da variância da variável  $X + Y$ , que nos dá o ganho total obtido pelo Abel em cada repetição do jogo, pode ser feito sem ser necessário obter a distribuição de probabilidade de  $X + Y$ . Basta conhecermos as média e variância de cada uma das variáveis  $X$  e  $Y$ . Assim

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y = 0 + 0 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 25 + 25 = 50.$$

**Exemplo 6.4.2** Relativamente ao Exemplo 6.2.3 (pág. 155), se representarmos por  $S_1$  e  $S_2$  os pontos que saem no primeiro e no segundo dado, respectivamente, a soma,  $S$ , dos pontos obtidos nos dois dados é dada por  $S = S_1 + S_2$ , onde as variáveis  $S_1$  e  $S_2$  são independentes. Como  $\mu_{S_1} = \mu_{S_2} = 3.5$  e  $\sigma_{S_1}^2 = \sigma_{S_2}^2 \approx 2.9167$ , obtemos

$$\mu_S = \mu_{S_1} + \mu_{S_2} = 3.5 + 3.5 = 7, \text{ e}$$

$$\sigma_S^2 = \sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2 \approx 2.9167 + 2.9167 = 5.8334.$$

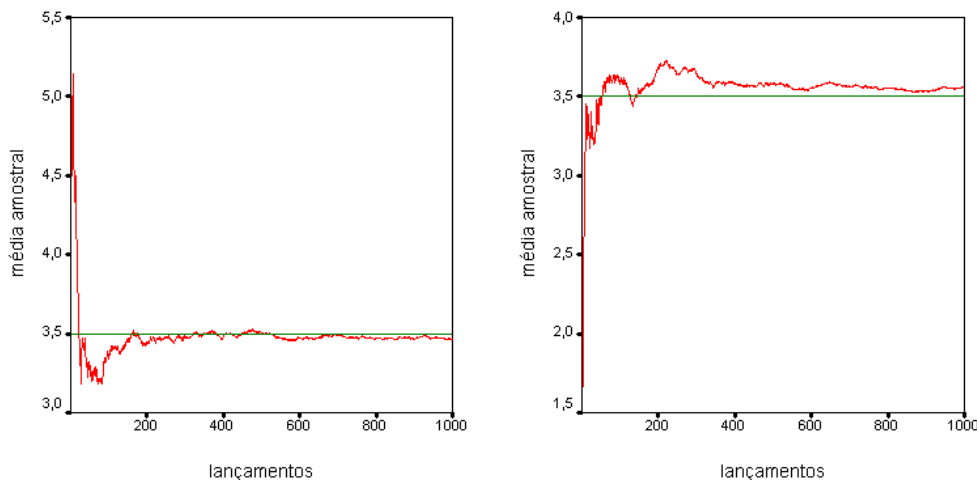
Em lançamentos sucessivos de dois dados equilibrados obtemos assim em média 7 pontos por lançamento.

Para reforçar a importância da condição de independência, ou mais precisamente, de ausência de associação linear, para a validade da regra anterior para o cálculo da variância da soma de duas variáveis aleatórias, atentemos no exemplo seguinte.

**Exemplo 6.4.3** Para um adulto do sexo masculino medimos o comprimento de ambos os braços. Admitamos que a variável  $X$  representa o comprimento do braço esquerdo, enquanto que o simétrico do comprimento do braço direito é representado pela variável  $Y$ . Por exemplo, para um adulto com um braço esquerdo com  $750\text{ mm}$  e um braço direito com  $755\text{ mm}$ ,  $X$  vale  $750$  e  $Y$  vale  $-755$ . Como todos temos os braços esquerdo e direito com aproximadamente o mesmo tamanho, será de esperar que a variável  $X + Y$  possua uma variabilidade pequena, e por conseguinte uma pequena variância. No entanto, há adultos com braços pequenos, adultos com braços médios e adultos com braços grandes. A variabilidade de cada uma das variáveis  $X$  e  $Y$  será, por isso, grande. Neste caso, a variância da soma  $X + Y$  será seguramente inferior à soma das variâncias de  $X$  e de  $Y$ . Pelo que vimos atrás, este facto pode ser explicado pela forte associação negativa existente entre  $X$  e  $Y$ .

## 6.5 Lei dos grandes números

Que relação existirá entre a média duma variável  $X$  e a média amostral  $\bar{x}$  calculada a partir de observações da variável  $X$ ? No caso particular de  $X$  representar os pontos obtidos em cada lançamento dum dado equilibrado, o gráficos seguintes sugerem que, com à medida que o número de lançamento aumenta, a média amostral se aproxima da média de  $X$ , que com vimos atrás é igual a  $\mu = 3.5$ .



Se recordarmos a lei dos grandes números enunciada no §5.3.2, sabemos que à medida que o número de observações aumenta, e se essas observações são realizadas aproximadamente nas mesmas condições, isto é, se as várias observações da variável  $X$  são independentes, a probabilidade  $p_i$ , de ocorrer qualquer um dos valores  $x_i$ , pode ser aproximada pela frequência relativa  $n_i/n$  desse valor, quando  $n$  é grande:

$$\frac{n_i}{n} \approx p_i.$$

Consequentemente,

$$\bar{x} = \sum \frac{n_i}{n} x_i \approx \sum p_i x_i = \mu_X,$$

isto é, a média amostral aproxima-se da média da variável  $X$ .

Esta igualdade explica o observado nos gráficos anteriores. A média  $\mu = 3.5$  pode ser assim interpretada como o número médio de pontos obtidos por lançamento, quando o número de lançamentos é grande.

Este facto é também conhecido como **lei dos grandes números**:

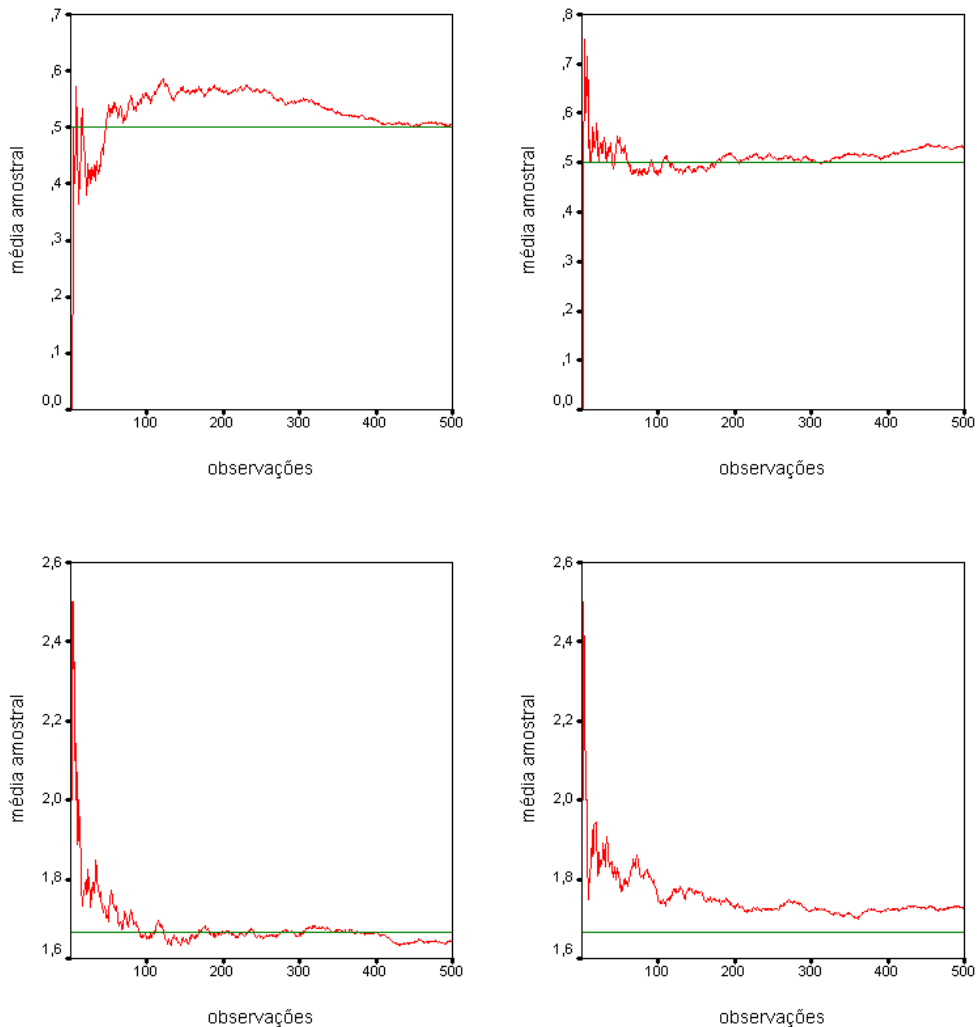
#### **Lei dos grandes números:**

Se as várias observações duma variável  $X$  com média  $\mu$  são independentes, a média amostral  $\bar{x}$  aproxima-se, tanto quanto queiramos, de  $\mu$ , à medida que o número de observações aumenta.

**Exemplo 6.5.1** Para cada uma das variáveis  $X$  e  $Z$  definidas nos Exemplos 6.3.1 e 6.3.2 (pág. 162), respectivamente, relativas aos resultados observados no lançamento



duma moeda equilibrada, e dum dado equilibrado que tem marcados os números 1, em três das faces, 2, em duas das faces, e o número 3 na face restante, a lei dos grandes números é ilustrada nos gráficos seguintes que dão conta da evolução das médias amostrais com o aumento das observações, para dois conjuntos de observações de cada uma das variáveis. Notemos que no caso da variável  $X$ ,  $\bar{x}$  não é mais do que a proporção de faces portuguesas nos  $n$  primeiros lançamentos da moeda.



Vejamos mais um exemplo que reforça a interpretação da média  $\mu_X$  dum variável  $X$ , como o valor do qual se aproxima a média amostral, quando o número de observações aumenta.

**Exemplo 6.5.2** No jogo da roleta, a roda da roleta está dividida em 37 partes iguais numeradas de 0 a 36, e um jogador, que à partida aposta num dos números de 1 a 36,

recebe em caso de vitória 36 vezes mais do que aquilo que apostou. Admitindo que a aposta do jogador é sempre de 10 euros, ele recebe os 10 euros que apostou mais 350 euros pagos pelo casino se sair o número em que apostou. Caso contrário, perde o que apostou. Representando por  $X$  o ganho líquido do jogador em cada partida,  $X$  tem como distribuição de probabilidade

valores de $X$	-10	350
probabilidade	36/37	1/37

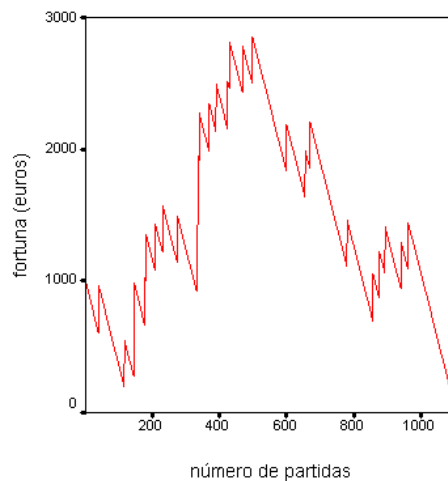
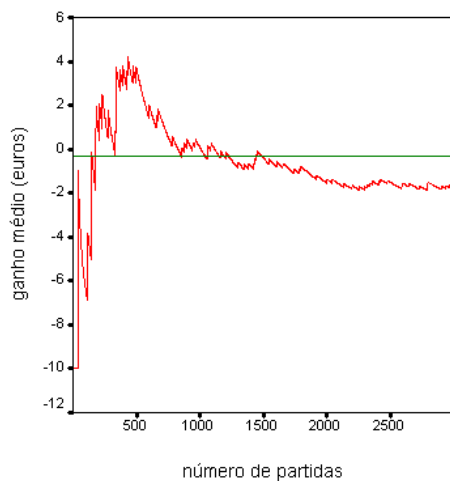
O ganho médio por partida é dado por

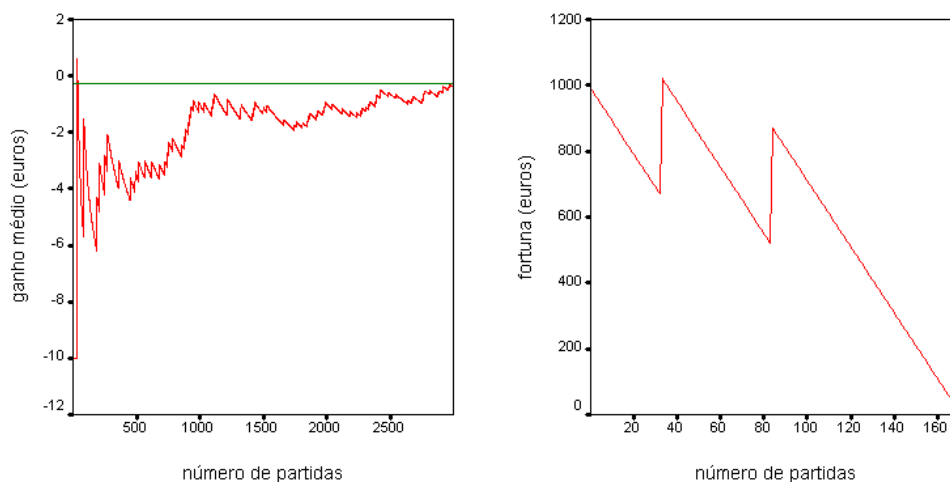
$$\mu_X = \frac{36}{37} \times (-10) + \frac{1}{37} \times 350 = -\frac{10}{37} = -0.27,$$

isto é, em cada partida, por cada 10 euros apostados, o jogador perde 27 centimos. Atendendo à lei dos grandes números, quer isto dizer que, independentemente do dinheiro que o jogador leva para o casino, ao fim dum grande número de partidas ficará sem dinheiro nenhum. Notemos, no entanto, que atendendo à grande variabilidade da variável  $X$  que é traduzida pela sua grande variância

$$\sigma_X^2 = \frac{36}{37} \times (-10)^2 + \frac{1}{37} \times 350^2 - \left(\frac{10}{37}\right)^2 \approx 3408.035,$$

a média amostral aproxima-se lentamente de  $-0.27$ . Para ilustrar os factos referidos, apresentamos nos gráficos seguintes, não só duas possíveis evoluções da média amostral, ou seja, do ganho médio por partida para um jogador com uma grande fortuna inicial, mas também as correspondentes evoluções da fortuna (até ficar sem dinheiro) de um jogador que entra para o casino com 1000 euros para jogar na roleta.





## 6.6 Lei dos grandes números e inferência estatística

Contrariamente aos exemplos anteriores em que a população de onde recolhemos a amostra pode ser considerada infinita, uma vez que a experiência aleatória pode ser repetida tantas vezes quantas quisermos, num estudo observacional por amostragem a população é finita, sendo a amostra recolhida por métodos aleatórios, por exemplo, por amostragem aleatória simples. Apesar deste método de recolha de amostras não produzir observações independentes (basta pensar que se um indivíduo é observado, não volta a sê-lo), se o tamanho da população é grande relativamente à dimensão da amostra, as observações podem ser consideradas aproximadamente independentes, valendo ainda nesse caso a lei dos grandes números. Tendo em conta a linguagem introduzida quando falámos de estudos por amostragem, **a lei dos grandes números permite-nos concluir que quando o parâmetro de interesse é uma média  $\mu$ , este pode ser aproximado pela estatística  $\bar{x}$  quando a dimensão da amostra for grande.**

Num estudo observacional por amostragem em que, para uma determinada população de grande dimensão, pretendemos conhecer a proporção  $p$  de indivíduos que possuem determinada característica, vimos já que a partir da amostra recolhida podemos calcular a **estatística  $\hat{p}$**  associada ao parâmetro de interesse  $p$  que, neste caso, não é mais do que a proporção de indivíduos nessa amostra que possuem a característica em estudo. Reparemos que  $\hat{p}$  não é mais do que a média amostral associada à variável aleatória  $X$  que toma o valor 1 se o indivíduo observado tem a característica em estudo, e 0 se isso não acontece. Como  $X$  é (aproximadamente) uma variável aleatória com distribuição de probabilidade

valores de $X$	1	0
probabilidade	$p$	$1 - p$

a sua média é precisamente o parâmetro  $p$ :

$$\mu_X = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p.$$

**A lei dos grandes números permite concluir que, quando a amostra é grande,  $\hat{p}$  é uma boa aproximação de  $p$ .** Desta forma justificamos uma afirmação anteriormente feita de que, não havendo enviesamento no que respeita à amostragem, esperávamos que a estatística  $\hat{p}$  nos desse uma boa informação sobre o parâmetro desconhecido  $p$  (ver §4.4).

Os factos anteriores têm grande importância na inferência estatística pois nos asseguram que na inferência sobre a média populacional  $\mu$  (ou sobre uma proporção  $p$ ), a estatística  $\bar{x}$  que calculamos a partir das observações realizadas é, quando o tamanho da amostra é grande, uma aproximação para  $\mu$ . No entanto, a lei dos grandes números não nos permite, por si só, quantificar a confiança que podemos depositar na estimativa  $\bar{x}$  de  $\mu$ . Para tal é fundamental que tenhamos informação sobre a distribuição amostral de  $\bar{x}$  (ver §4.4), isto é, informação sobre os valores que a estatística  $\bar{x}$  toma para as diferentes amostras bem como a probabilidade com que toma esses valores. Este será o assunto que abordaremos no próximo capítulo.

## 6.7 Bibliografia

Blume, J.D., Royall, R.M. (2003). Illustrating the law of large numbers, *The American Statistician*, 57, 51–55.

Moore, D.S. (1985). *Statistics: Concepts and Controversies*, W.H. Freeman and Company.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.

## Capítulo 7

# Distribuições amostrais para proporções e médias

*Distribuição amostral dum estatística. Experiência aleatória binomial. Variável aleatória binomial: distribuição de probabilidade, média e variância. Distribuição amostral de  $\hat{p}$ . Média e desvio-padrão de  $\hat{p}$ . Aproximação normal para a distribuição de  $\hat{p}$ . Distribuição amostral de  $\bar{x}$ . Média e desvio-padrão de  $\bar{x}$ . Teorema do limite central.*

### 7.1 Distribuição amostral dum estatística

Quando na realização dum estudo observacional por amostragem pretendemos conhecer a proporção,  $p$ , de indivíduos da população em estudo que possuem determinada propriedade (proporção de votantes num determinado partido político, proporção de famílias com baixos rendimentos, etc.), ou a média,  $\mu$ , de determinada característica numérica associada à população (peso médio, altura média, rendimento mensal médio, etc.), a inferência sobre esses parâmetros desconhecidos é baseada numa amostra recolhida dessa população.

Para essa amostra, e com o objectivo de inferir sobre o parâmetro desconhecido de interesse, calculamos normalmente a estatística associada a esse parâmetro: se o parâmetro é uma proporção, calculamos a proporção,  $\hat{p}$ , de indivíduos na amostra que possuem a propriedade em estudo; se o parâmetro é uma média, calculamos a média,  $\bar{x}$ , dos valores da amostra.

Como já referimos no §4.4, diferentes amostras conduzem a diferentes valores para as estatísticas  $\hat{p}$  e  $\bar{x}$ , facto este a que chamámos **variabilidade amostral**. Estas estatísticas funcionam assim como variáveis aleatórias: a cada amostra aleatória, que aqui toma o papel de resultado da experiência aleatória, associam um valor numérico.

Assim sendo, faz sentido falar na distribuição de probabilidade de tais estatísticas a que chamamos **distribuição amostral da estatística** em causa. Uma tal distribuição dá-nos os valores que a estatística toma para as diferentes amostras bem como a probabilidade com que os toma.

Neste capítulo estudaremos a distribuição amostral das estatísticas  $\hat{p}$  e  $\bar{x}$  que, como veremos, surgem em muitos problemas de inferência estatística. Nos capítulos seguintes, ilustraremos a sua aplicação a dois problemas muito importantes do âmbito da estatística inferencial como são os casos dos **intervalos de confiança** e dos **testes de hipóteses**.

## 7.2 Distribuição amostral de $\hat{p}$

Suponhamos que lançamos  $n$  vezes consecutivas um dado que suspeitamos não ser equilibrado, e que estamos interessados na proporção  $\hat{p}$  de faces 6 que obtemos nos lançamentos realizados. Se representarmos por  $X$  o número de faces 6 obtidas nos  $n$  lançamentos,  $\hat{p}$  é dada por

$$\hat{p} = \frac{X}{n},$$

que, pela lei dos grandes números, sabemos ser uma aproximação da probabilidade de ocorrência da face 6, quando  $n$  é grande.

A variável aleatória  $X$  toma os valores

$$0, 1, 2, \dots, n-1, n,$$

enquanto que  $\hat{p}$  toma os valores

$$0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1.$$

Atendendo à igualdade anterior, é claro que a **distribuição amostral de  $\hat{p}$**  está intimamente relacionada com a distribuição amostral de  $X$ . Quando a variável  $X$  toma o valor  $k$ , para algum  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ , a variável  $\hat{p}$  toma o valor  $k/n$ . Assim, a probabilidade com que  $\hat{p}$  toma o valor  $k/n$  é igual à probabilidade com que  $X$  toma o valor  $k$ :

$$P\left(\hat{p} = \frac{k}{n}\right) = P(X = k).$$

A distribuição amostral de  $\hat{p}$  pode assim ser obtida a partir da distribuição amostral da variável  $X$  que determinaremos a seguir no contexto daquilo a que chamaremos **experiência aleatória binomial**.

### 7.2.1 Variável aleatória binomial

A situação descrita do lançamento dum dado um número  $n$  de vezes, possui características que são comuns a muitas outras experiências aleatórias:

**Experiência aleatória binomial:**

1. São realizadas  $n$  observações.
2. As  $n$  observações são independentes.
3. Cada observação pode tomar dois valores possíveis, ditos *sucesso* e *insucesso*, que denotamos por 1 e por 0, respectivamente, que ocorrem sempre que o indivíduo observado possui, ou não, respectivamente, a característica em estudo.
4. A probabilidade  $p$  dum sucesso é a mesma para cada observação.

Quando se verificam as condições anteriores dizemos que estamos na presença duma **experiência aleatória binomial**. Numa experiência aleatória binomial estamos interessados na variável aleatória  $X$  que nos dá o número total de sucessos ocorridos nas  $n$  observações.

São experiências aleatórias binomiais:

1. O lançamento duma moeda equilibrada de euro 10 vezes consecutivas e a observação do número de vezes em que ocorre a face portuguesa. Neste caso  $n = 10$  e  $p = 1/2$ .
2. A observação do número de vezes que ocorre a face 6 em 20 lançamentos de um dado equilibrado. Neste caso  $n = 20$  e  $p = 1/6$ .
3. A extracção sucessiva **com reposição** de 5 cartas escolhidas ao acaso dum baralho vulgar de 52 cartas em que estamos interessados no número de cartas do naipe de paus que ocorrem nessas 5 cartas. Neste caso  $n = 5$  e  $p = 13/52 = 1/4$ . Reparemos que se a extracção das 5 cartas é feita por amostragem aleatória simples, a experiência deixa de ser binomial. Perde-se a independência entre as sucessivas observações e a probabilidade de ocorrer paus em cada observação não é sempre a mesma.

4. Para estimar a percentagem de alunos da UC que concordam com o pagamento de propinas, a partir duma listagem dos alunos da UC escolhe-se ao acaso um aluno e regista-se a sua opinião, “sim” ou “não”, sobre o pagamento de propinas. Se o processo anterior for repetido 120 vezes tendo por base a mesma listagem permitindo assim que um aluno seja seleccionado mais do que uma vez, isto é, se a **amostragem** for realizada **com reposição**, a experiência aleatória é uma experiência binomial com  $n = 120$  e  $p$  é a proporção de alunos da UC que concorda com o pagamento de propinas. Tal como no exemplo anterior, se a amostra for uma amostra aleatória simples a experiência só aproximadamente pode ser considerada binomial uma vez que nem as várias observações são independentes, nem a probabilidade de sucesso é sempre igual a  $p$ .

Como veremos a seguir, numa experiência aleatória binomial a distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X$  depende apenas do número,  $n$ , de observações e da probabilidade,  $p$ , de obter um sucesso. Chamar-lhe-emos **distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $p$** , e indicamos

$$X \sim B(n, p)$$

quando queremos dizer que  $X$  **tem, ou possui, uma distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $p$** .

Quando  $n$  é pequeno, é fácil efectuar o cálculo da distribuição de probabilidade de  $X$ , isto é, é fácil calcular as probabilidades  $P(X = k)$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Vejamos o que se passa nos casos em que  $n = 2$  e  $n = 3$ .

- No caso  $n = 2$  o espaço dos resultados é

$$\Omega = \{00, 01, 10, 11\},$$

onde, pela independência (reparemos que não podemos usar a definição clássica pois os acontecimentos elementares não são, com excepção do caso  $p = 0.5$ , igualmente prováveis):

$$P(\{00\}) = (1 - p)(1 - p) = (1 - p)^2,$$

$$P(\{01\}) = (1 - p)p,$$

$$P(\{10\}) = p(1 - p)$$

$$P(\{11\}) = pp = p^2.$$

Assim,

$$P(X = 0) = P(\{00\}) = (1 - p)^2,$$

$$P(X = 1) = P(\{01, 10\}) = P(\{01\}) + P(\{10\}) = 2p(1 - p), \quad (7.2.1)$$

$$P(X = 2) = P(\{11\}) = p^2.$$



- No caso  $n = 3$  o espaço dos resultados é

$$\Omega = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\},$$

e, pela independência,

$$\begin{aligned} P(\{000\}) &= (1 - p)^3, \\ P(\{001\}) &= P(\{010\}) = P(\{100\}) = p(1 - p)^2, \\ P(\{001\}) &= P(\{101\}) = P(\{110\}) = p^2(1 - p), \\ P(\{111\}) &= p^3. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\{000\}) = (1 - p)^3, \\ P(X = 1) &= P(\{001, 010, 100\}) = 3p(1 - p)^2, \\ P(X = 2) &= P(\{001, 101, 110\}) = 3p^2(1 - p), \\ P(X = 3) &= P(\{111\}) = p^3. \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Reparemos que os coeficientes 1, 2, 1 e 1, 3, 3, 1 que surgem nas fórmulas (7.2.1) e (7.2.2), não são mais do que o número de vezes em que como resultado duma experiência binomial não ocorre nenhum sucesso, ocorre 1 sucesso, ocorrem 2 sucessos, e assim sucessivamente, até ao último caso em que ocorrem  $n$  sucessos. Estes coeficientes são chamados **coeficientes binomiais**, e no caso geral dum qualquer valor de  $n$  podemos concluir que o número de vezes em que ocorrem  $k$  sucessos, para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , nos  $2^n$  resultados possíveis duma experiência binomial, é dado pelo **coeficiente binomial**  $C_k^n$  definido por

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n - k)!},$$

onde  $n!$  é o **factorial de  $n$**  definido por

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

e

$$0! = 1.$$

Conhecido o coeficiente binomial  $C_k^n$ , que para alguns valores de  $n$  é dado na Tabela C, é agora fácil calcular a probabilidade de obter  $k$  sucessos numa experiência binomial: basta multiplicar o número de vezes em que ocorrem  $k$  sucessos nos resultados da experiência binomial,  $C_k^n$ , pela probabilidade,  $p^k(1 - p)^{n-k}$ , dum qualquer resultado elementar da experiência em que ocorrem  $k$  sucessos.

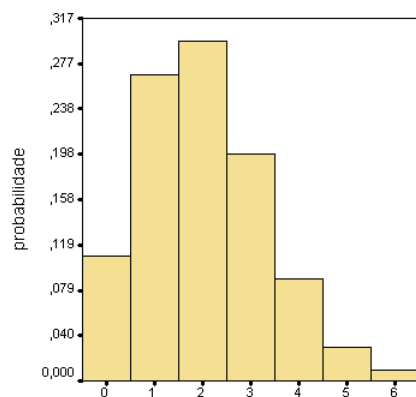
**Distribuição de probabilidade duma variável binomial:**

Se  $X \sim B(n, p)$ , então

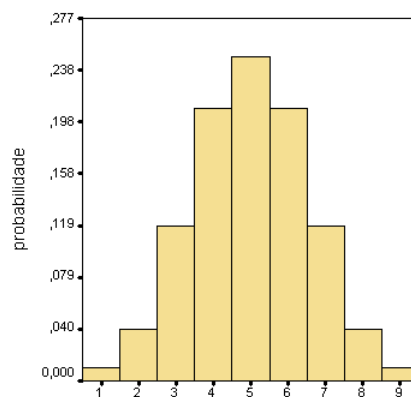
$$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k},$$

para  $k = 0, 1, \dots, n$ .

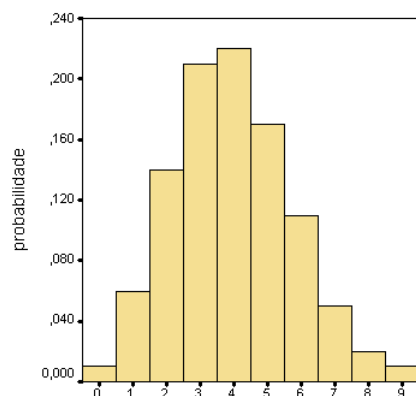
Nos gráficos seguintes apresentam-se histogramas de probabilidade duma variável binomial para alguns valores de  $n$  e  $p$  (não estão representados todos os valores da variável binomial). Reparemos na assimetria positiva (resp. negativa) que ocorre para valores pequenos de  $p$  (resp. grandes). À medida que  $p$  se aproxima de 0.5, a assimetria da distribuição diminui, obtendo-se uma distribuição perfeitamente simétrica quando  $p = 0.5$ .



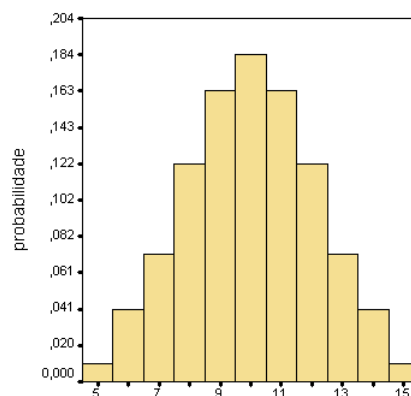
n=10, p=0.2



n=10, p=0.5



n=20, p=0.2



n=20, p=0.5

**Exemplo 7.2.3** Utilizemos a distribuição de probabilidade duma variável binomial para calcular a probabilidade de no lançamento duma moeda equilibrada de euro 10 vezes consecutivas, observarmos apenas 1 face portuguesa. Neste caso  $X \sim B(10, 0.5)$ , e a probabilidade pedida é dada por

$$P(X = 1) = C_1^{10} 0.5^1 0.5^9 = 10 \times 0.5 \times 0.5^9 \approx 0.009766.$$

A probabilidade de obter mais do que 2 faces portuguesas é dada por

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - C_0^{10} 0.5^0 0.5^{10} - C_1^{10} 0.5^1 0.5^9 - C_2^{10} 0.5^2 0.5^8 \\ &= 1 - 1 \times 0.5^0 \times 0.5^{10} - 10 \times 0.5^1 \times 0.5^9 - 45 \times 0.5^2 \times 0.5^8 \\ &\approx 1 - 0.0009766 - 0.009766 - 0.043945 \\ &= 0.9453. \end{aligned}$$

Como já referimos, da mesma forma se procede se pretendemos calcular a probabilidade de acontecimentos associados a  $\hat{p}$ .

**Exemplo 7.2.4** No lançamento de um dado equilibrado 20 vezes consecutivas, calculemos a probabilidade de obter mais que 4% de faces 6, isto é, calculemos  $P(\hat{p} > 0.04)$ , onde  $\hat{p} = X/20$  com  $X \sim B(20, 1/6)$ . Assim,

$$\begin{aligned} P(\hat{p} > 0.04) &= P(X/20 > 0.04) \\ &= P(X > 0.8) \\ &= P(X \geq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - C_0^{20} (1/6)^0 (1 - 1/6)^{20} \\ &= 0.9739 \end{aligned}$$

Como já referimos atrás, quando a **população é finita** e a amostra é recolhida por amostragem aleatória simples, as diversas observações não satisfazem as características 2. e 4. duma experiência binomial. No entanto, quando o tamanho da população é grande relativamente à dimensão  $n$  da amostra recolhida, podemos ignorar a dependência fraca que existe entre as observações e a pequena alteração da probabilidade de ocorrência de sucesso de observação para observação. Assim, **quando o tamanho da população é de pelo menos 10 vezes a dimensão da amostra**, e a amostra é uma amostra aleatória simples de tamanho  $n$ , a distribuição da variável  $X$  pode ser considerada aproximadamente binomial  $B(n, p)$ , onde  $p$  é a proporção de sucessos na população.

### 7.2.2 Média e desvio-padrão de $\hat{p}$

Conhecida a distribuição de probabilidade duma variável aleatória, é possível calcular a sua média e a sua variância. No caso duma variável binomial, devido à forma não muito simples da sua distribuição de probabilidade, é preferível efectuar o cálculo da média  $\mu_X$  e da variância  $\sigma_X^2$  utilizando um método alternativo.

Uma variável binomial dá-nos o número de sucessos que ocorrem numa experiência aleatória binomial. Se representarmos por  $S_i$  a variável que toma o valor 1 se ocorre sucesso na observação  $i$  e 0 se não ocorre sucesso nessa observação, então o número  $X$  de sucessos na experiência é dado por

$$X = S_1 + S_2 + \dots + S_n. \quad (7.2.5)$$

Como a probabilidade de sucesso numa experiência binomial é  $p$ , a distribuição de probabilidade de cada uma das variáveis  $S_i$  é dada por

valores de $S_i$	1	0
probabilidade	$p$	$1 - p$

e a sua média e variância podem ser facilmente calculadas:

$$\begin{aligned} \mu_{S_i} &= 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p \\ \sigma_{S_i}^2 &= 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p)^2 - p^2 = p(1 - p). \end{aligned}$$

Usando agora a igualdade (7.2.5) e as propriedades já estudadas da média, concluímos que

$$\begin{aligned} \mu_X &= \mu_{S_1} + \mu_{S_2} + \dots + \mu_{S_n} \\ &= p + p + \dots + p \\ &= np, \end{aligned}$$

e, pela independência das variáveis  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2 + \dots + \sigma_{S_n}^2 \\ &= p(1 - p) + p(1 - p) + \dots + p(1 - p) \\ &= np(1 - p). \end{aligned}$$

**Média e desvio-padrão duma variável binomial:**

Se  $X \sim B(n, p)$ , então

$$\begin{aligned} \mu_X &= np, \\ \sigma_X &= \sqrt{np(1 - p)}. \end{aligned}$$

Tendo agora em conta que  $\hat{p} = X/n$ , podemos facilmente calcular a média e variância da proporção  $\hat{p}$  numa experiência binomial:

**Média e desvio-padrão da proporção  $\hat{p}$ :**

Numa experiência binomial temos

$$\mu_{\hat{p}} = p,$$

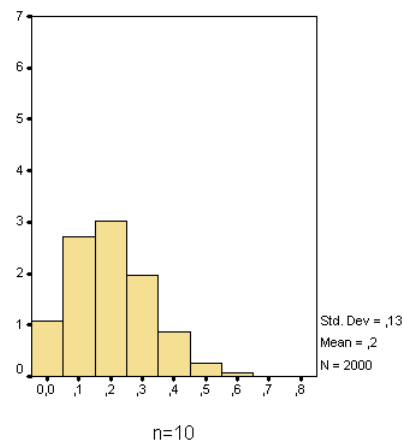
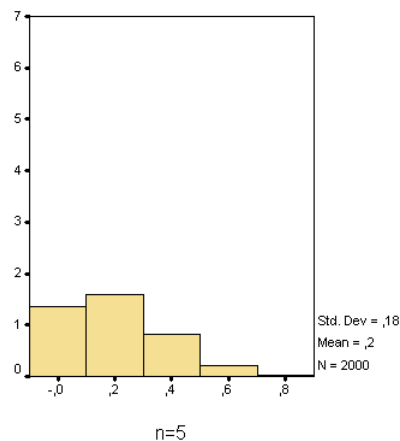
$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n}.$$

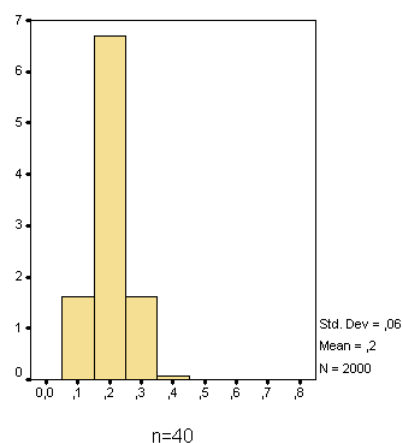
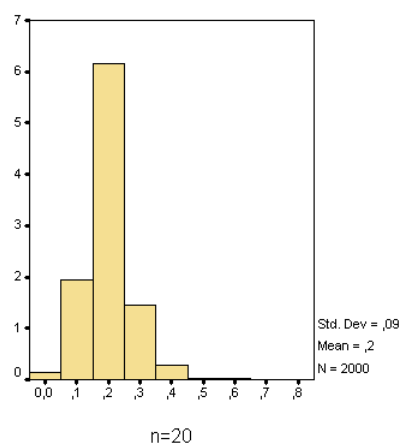
Recordemos que no §4.4 constatámos empiricamente que o centro da distribuição de  $\hat{p}$  era aproximadamente  $p$ , e que a variabilidade de  $\hat{p}$  diminuía com o aumento de dimensão da amostra. Os resultados agora obtidos vêm confirmar essa análise empírica.

### 7.2.3 Aproximação normal para a distribuição de $\hat{p}$

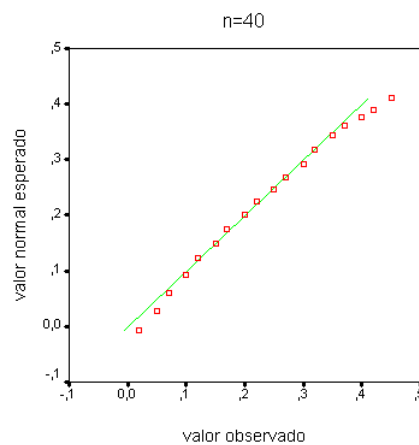
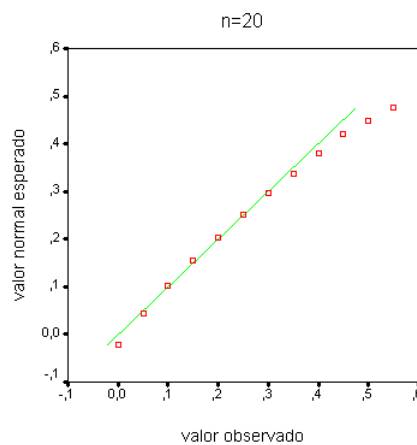
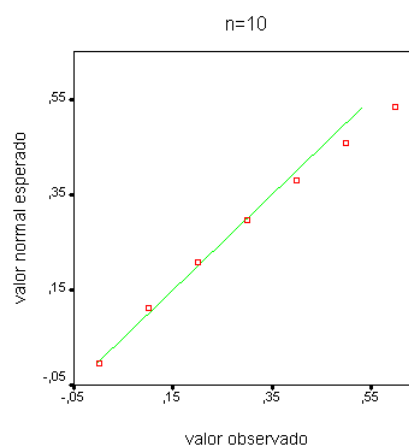
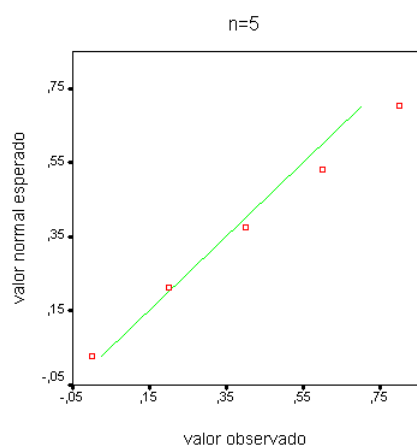
Utilizando os métodos gráficos estudados no Capítulo 1, vimos no §4.4 que numa população de 10000 indivíduos, em que metade deles possuía determinada característica, isto é,  $p = 0.5$ , a distribuição de frequências da proporção  $\hat{p}$  era, para  $n = 20$  e 50, aproximadamente normal. A seguir, exploramos um pouco mais a distribuição de frequências da proporção amostral  $\hat{p}$  para outros valores de  $p$  e de  $n$ .

**Exemplo 7.2.6** Suponhamos que numa dada população, apenas uma proporção  $p = 0.2$  dos indivíduos que a constituem possui determinada característica. Os histogramas seguintes relativos aos valores  $n = 5, 10, 20$  e 40, descrevem a distribuição de frequências de  $\hat{p}$  obtida a partir de 2000 amostras de dimensão  $n$  recolhidas da população referida.

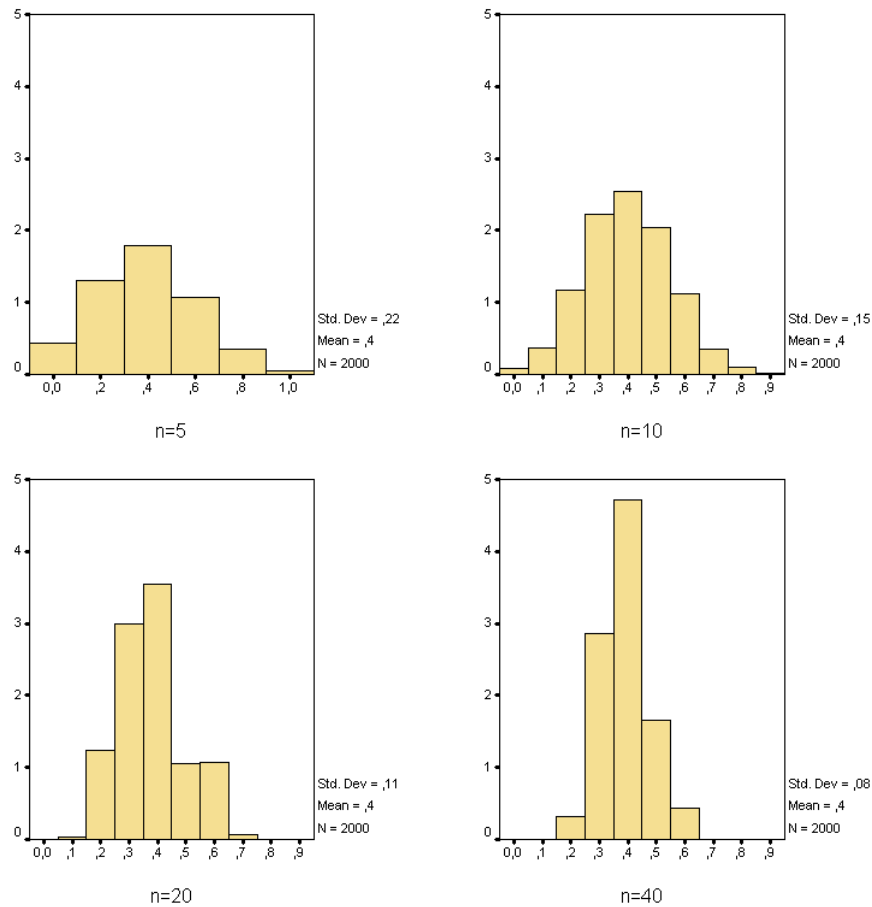




Para pequenos valores de  $n$  a distribuição  $\hat{p}$  revela uma assimetria positiva, que já tínhamos identificado na distribuição binomial para valores pequenos de  $p$ . Para valores grandes de  $n$ , a distribuição de frequências de  $\hat{p}$  torna-se cada vez menos assimétrica, sendo a sua normalidade aproximada confirmada pelos gráficos de quantis normais seguintes.

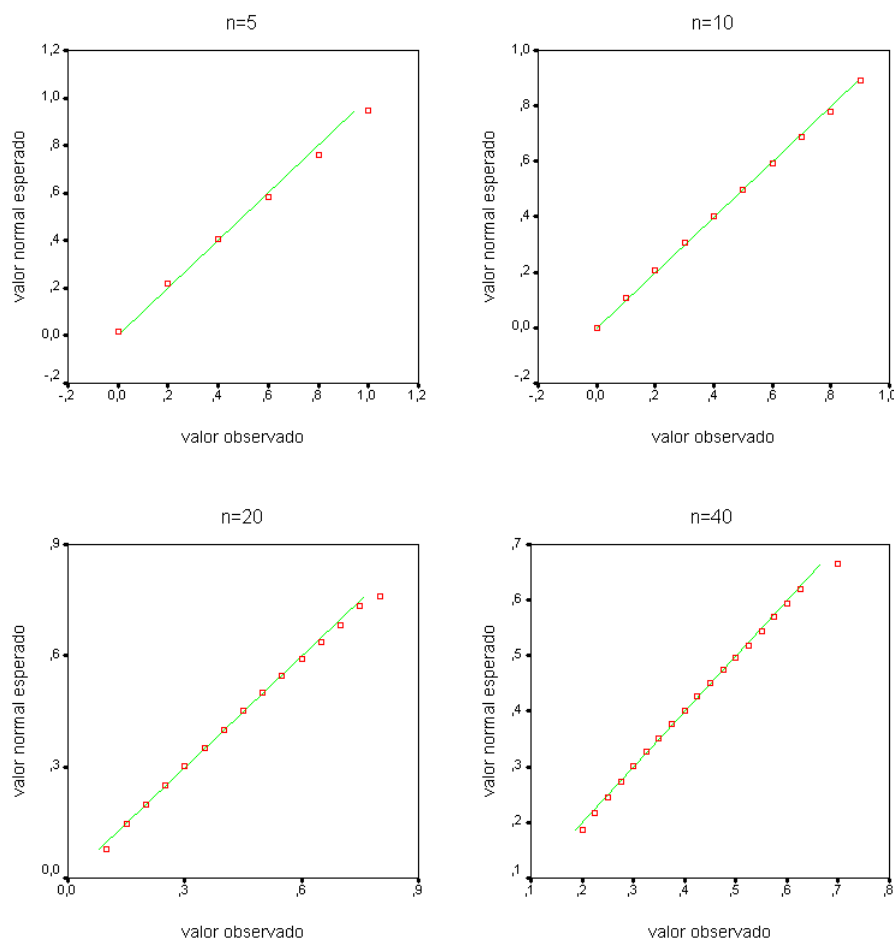


**Exemplo 7.2.7** Suponhamos agora que na população em estudo uma proporção  $p = 0.4$  dos seus membros possui determinada característica. Tal como no exemplo anterior, os histogramas seguintes relativos aos valores  $n = 5, 10, 20$  e  $40$ , descrevem a distribuição de frequências de  $\hat{p}$  obtida a partir de 2000 amostras de dimensão  $n$  recolhidas da população referida.



Como a proporção  $p$  é próxima de 0.5, caso em que a distribuição binomial é simétrica, a distribuição de frequências de  $\hat{p}$  revela, para valores pequenos de  $n$ , uma maior simetria que no exemplo anterior. A normalidade aproximada da distribuição de  $\hat{p}$  para valores pequenos e grandes de  $n$  é confirmada pelos gráficos de quantis normais seguintes.

Como já esperávamos, nos dois exemplos anteriores o centro das diversas distribuições de frequências de  $\hat{p}$  é aproximadamente igual a  $p$ , e a variabilidade respectiva decresce à medida que  $n$  aumenta. A normalidade da distribuição amostral de  $\hat{p}$  é mais evidente no caso  $p = 0.4$  do que no caso  $p = 0.2$ , o que pode ser atribuído à maior



assimetria da distribuição binomial  $B(n, 0.2)$  quando comparada com  $B(n, 0.4)$ . Por outro lado, o aumento de  $n$  conduz a uma melhor aproximação da distribuição amostral de  $\hat{p}$  pela distribuição normal.

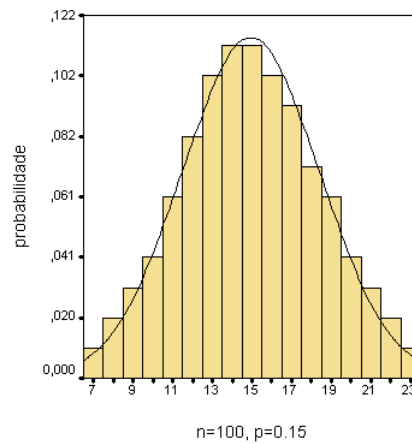
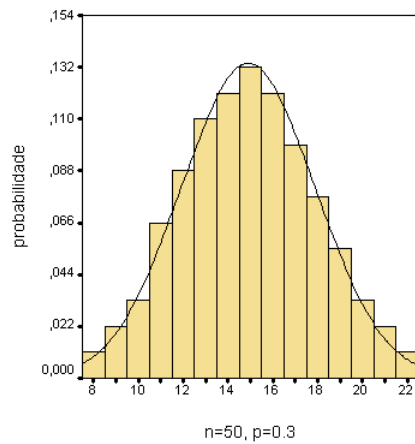
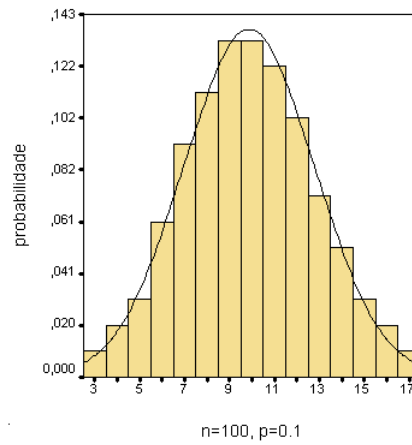
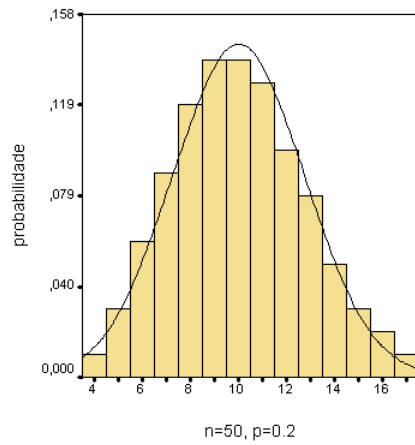
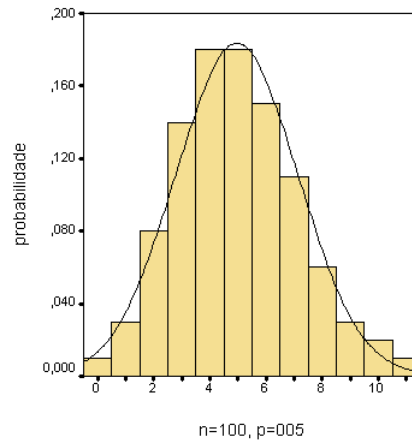
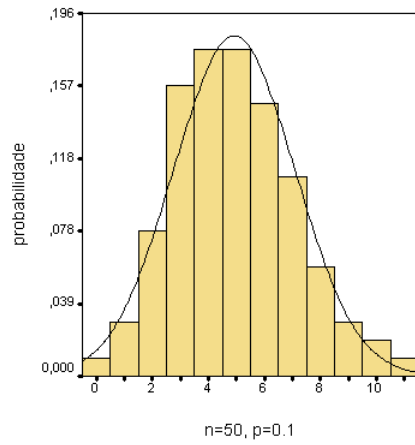
Utilizando as expressões obtidas para as distribuições de probabilidade da variável binomial  $X$  e da proporção amostral  $\hat{p}$ , que apresentámos no parágrafo anterior, é possível mostrar que tais distribuições são aproximadas por curvas normais. No caso da variável  $X$ , uma tal curva normal tem média  $np$  e desvio-padrão  $\sqrt{np(1-p)}$ , enquanto que no caso de  $\hat{p}$  a sua média é  $p$  e o seu desvio-padrão é  $\sqrt{p(1-p)/n}$ .

Estas aproximações são ilustradas nas figuras seguintes onde, para alguns valores de  $n$  e  $p$ , com  $np = 5, 10$  e  $15$ , se apresentam os histogramas de probabilidade de  $X$  e a curva normal respectiva.

Como já referimos, a qualidade da aproximação normal não é a mesma em todos os casos anteriores. Moore e McCabe, 2003, consideram que a aproximação normal para as distribuições de  $X$  e  $\hat{p}$  é boa se  $np \geq 10$  e se  $n(1-p) \geq 10$ . Já Anderson *et al.*, 2002, consideram que a aproximação normal é boa desde que se verifiquem as



condições menos restritivas  $np \geq 5$  e  $n(1 - p) \geq 5$ . Condições diferentes das anteriores são apresentadas, por exemplo, em McPherson, 1990.



**Aproximação normal para a distribuição de  $X$  e de  $\hat{p}$ :**

Se  $X \sim B(n, p)$ , então

$$X \simeq N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$$

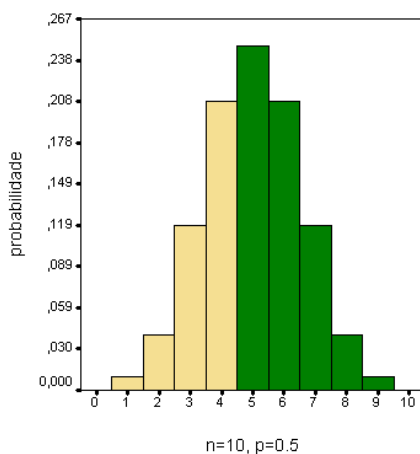
$$\hat{p} = X/n \simeq N\left(p, \sqrt{p(1-p)/n}\right)$$

A aproximação normal para as distribuições de  $X$  e de  $\hat{p}$  permitem simplificar alguns cálculos que seriam complicados de fazer sem o auxílio dum computador.

**Exemplo 7.2.8** Suponhamos que pretendemos calcular a probabilidade de no lançamento duma moeda equilibrada de euro 10 vezes consecutivas, observarmos mais do que quatro faces portuguesas. Neste caso  $X \sim B(10, 0.5)$ , e a maneira mais simples de calcular  $P(X > 4)$  passa por:

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) \\ &= 1 - C_0^{10} 0.5^0 0.5^{10} - C_1^{10} 0.5^1 0.5^9 - C_2^{10} 0.5^2 0.5^8 - C_3^{10} 0.5^3 0.5^7 - C_4^{10} 0.5^4 0.5^6 \\ &\approx 1 - 0.0009766 - 0.0097656 - 0.0439453 - 0.1171875 - 0.2050781 \\ &= 0.6230469, \end{aligned}$$

valor este que não é mais do que o valor da área representada na figura seguinte:



Utilizando a aproximação normal, sabemos que  $X \simeq N(5, \sqrt{2.5})$ . Assim, denotando por  $Z$  a variável normal standard, temos

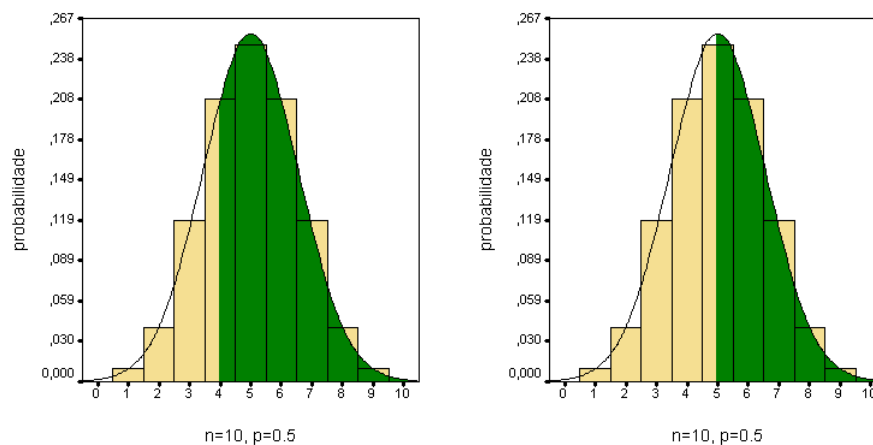
$$P(X > 4) = P\left(\frac{X - 5}{\sqrt{2.5}} > \frac{4 - 5}{\sqrt{2.5}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\approx P(Z > -0.63) \\
&= 1 - P(Z \leq -0.63) \\
&= 1 - 0.2643 = 0.7357.
\end{aligned}$$

A má qualidade da aproximação pode ser imputada ao facto da condição  $np \geq 10$  não ser satisfeita, mas também à forma como utilizámos a variável normal para efectuar a aproximação. Em particular, como  $P(X > 4) = P(X \geq 5)$  seria também legítimo efectuar a aproximação

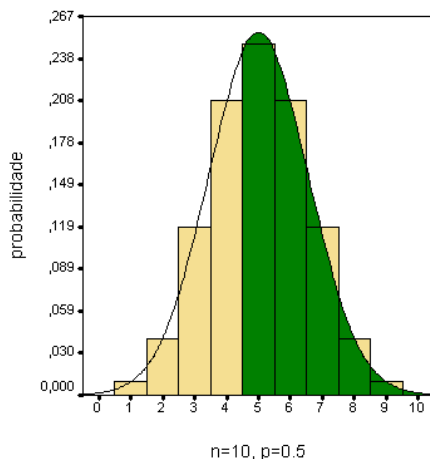
$$\begin{aligned}
P(X > 4) &= P(X \geq 5) \\
&= P\left(\frac{X - 5}{\sqrt{2.5}} > \frac{5 - 5}{\sqrt{2.5}}\right) \\
&\approx P(Z > 0) \\
&= 0.5,
\end{aligned}$$

obtendo-se agora uma aproximação por defeito, igualmente fraca, para a probabilidade pretendida.



Quando efectuamos uma aproximação pela normal duma variável binomial, é preferível utilizar não os valores 4 ou 5, mas sim o seu ponto médio, isto é, o valor 4.5. Deste modo obtemos uma aproximação de muito melhor qualidade do que qualquer das aproximações anteriores:

$$\begin{aligned}
P(X > 4) &= P(X > 4.5) \\
&= P\left(\frac{X - 5}{\sqrt{2.5}} > \frac{4.5 - 5}{\sqrt{2.5}}\right) \\
&\approx P(Z > -0.32) \\
&= 1 - P(Z \leq 0.32) \\
&= 1 - 0.3745 = 0.6255.
\end{aligned}$$



Esta regra, conhecida como **correção de continuidade**, vale para quaisquer outros valores, e, mais geralmente, sempre que uma variável discreta, que neste exemplo é a variável binomial, seja aproximada por uma variável contínua, que no caso anterior é a variável normal.

### 7.3 Distribuição amostral de $\bar{x}$

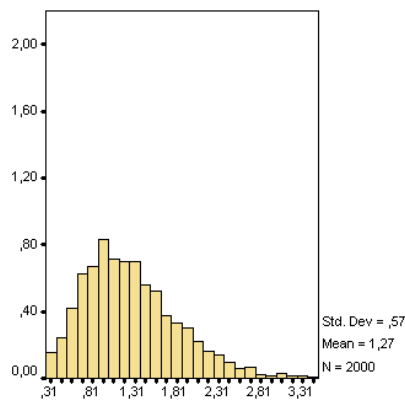
No parágrafo anterior, verificámos que a distribuição amostral da proporção  $\hat{p}$  associada a uma experiência binomial, pode, sob certas condições, ser aproximada por uma distribuição normal. Como já referimos na parte final do §6.5, a proporção amostral  $\hat{p}$  é um caso particular duma média amostral associada à variável aleatória que a cada sucesso numa experiência binomial associa 1 e a cada insucesso associa 0. Com efeito, como as observações  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são ou iguais a 1 ou a 0, a proporção de sucessos é precisamente a média dessas observações  $\hat{p} = \bar{x}$ . Neste parágrafo, verificaremos que a aproximação normal de que goza a proporção  $\hat{p}$  não é exclusiva desta estatística. Trata-se duma propriedade geral que é partilhada por qualquer média amostral associada a observações independentes duma variável aleatória.

#### 7.3.1 Distribuição de frequência de $\bar{x}$ : dois exemplos

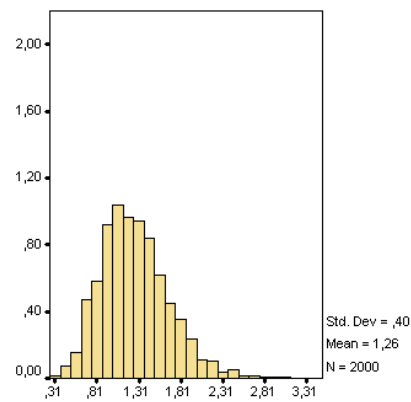
Tal como fizemos atrás, para analisar a distribuição de frequências da média amostral,  $\bar{x}$ , de duas populações com características distintas vamos extrair várias amostras com dimensões iguais, calculando para cada uma delas a média respectiva. Estes vários valores são observações da média amostral  $\bar{x}$  que, utilizando os métodos gráficos estudados no Capítulo 1, nos permitem analisar a sua distribuição de frequências, para

cada uma das populações consideradas. Uma tal distribuição de frequências dar-nos-á indicações importantes sobre a distribuição de probabilidade da média amostral.

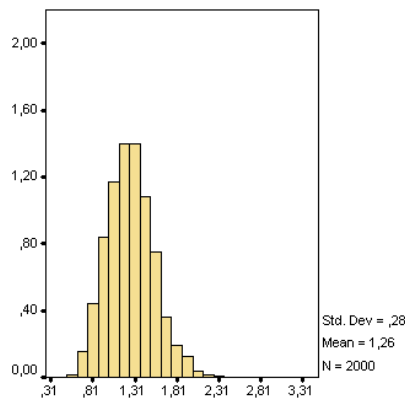
**Exemplo 7.3.1** Começemos por estudar a distribuição de frequências da média amostral  $\bar{x}$  relativa à variável aleatória  $X$  que dá o tempo que medeia a chegada de dois clientes consecutivos a uma caixa de supermercado (ver Exemplo 6.2.5, pág. 158). Os histogramas seguintes relativos aos valores  $n = 5, 10, 20$  e  $40$ , descrevem a distribuição de frequências de  $\bar{x}$  obtida a partir de 2000 amostras de dimensão  $n$  recolhidas dum conjunto vasto de observações da variável  $X$ .



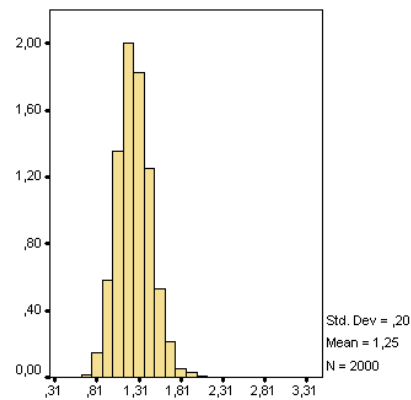
n=5



n=10



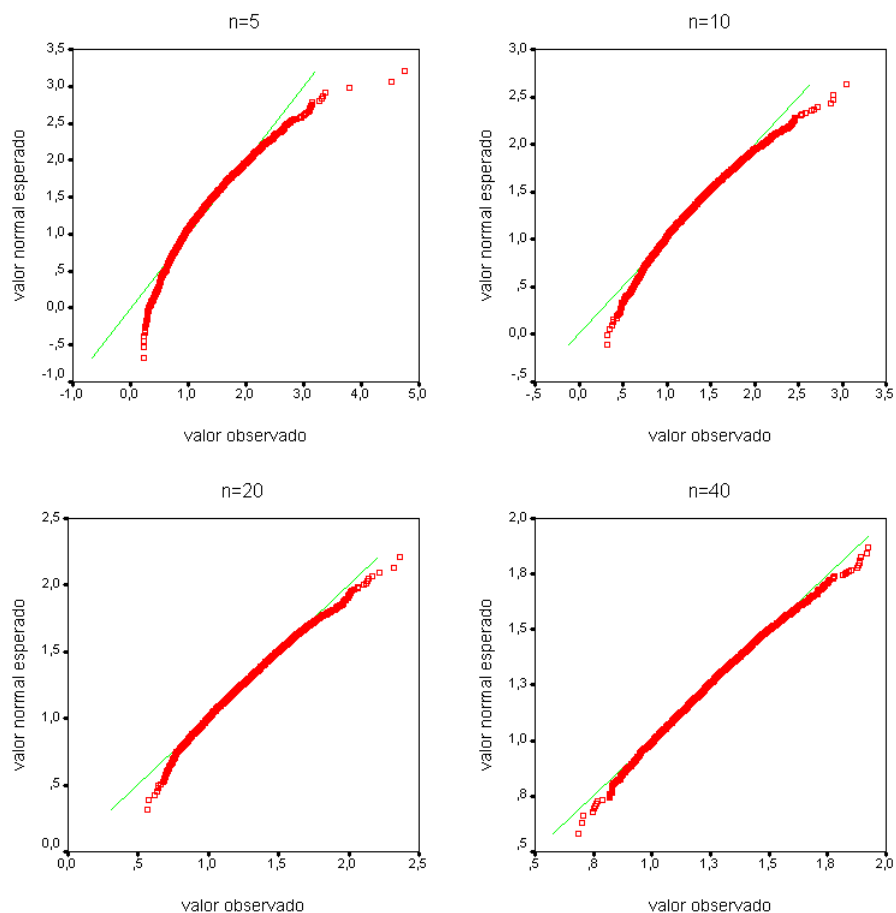
n=20



n=40

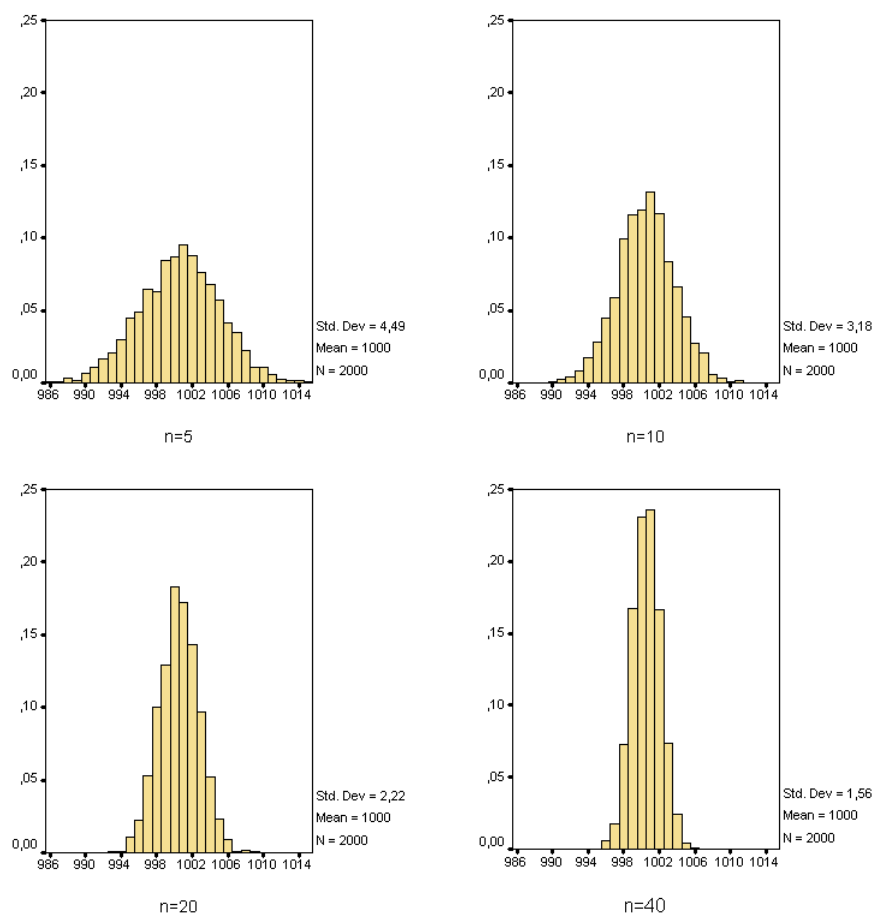
Dos gráficos anteriores constatamos que o centro das diversas distribuições amostrais é aproximadamente o ponto 1.2, que podemos interpretar como sendo o tempo médio de interchegada, e que a variabilidade de  $\bar{x}$  diminui com a aumento da dimensão  $n$  das amostras recolhidas. Reparemos que quando  $n$  é pequeno a distribuição de frequências de  $\bar{x}$  revela uma assimetria positiva que é consequência da assimetria positiva marcada da distribuição de probabilidade da variável  $X$  (ver Exemplo 6.2.5, pág. 158). Para

valores moderados e grandes de  $n$  a distribuição de frequência de  $\bar{x}$  é aproximadamente simétrica, revelando o histograma de frequências uma forma de sino, própria das distribuições normais. A normalidade aproximada da distribuição de  $\bar{x}$  para valores grandes de  $n$  é confirmada pelos gráficos de quantis normais seguintes.

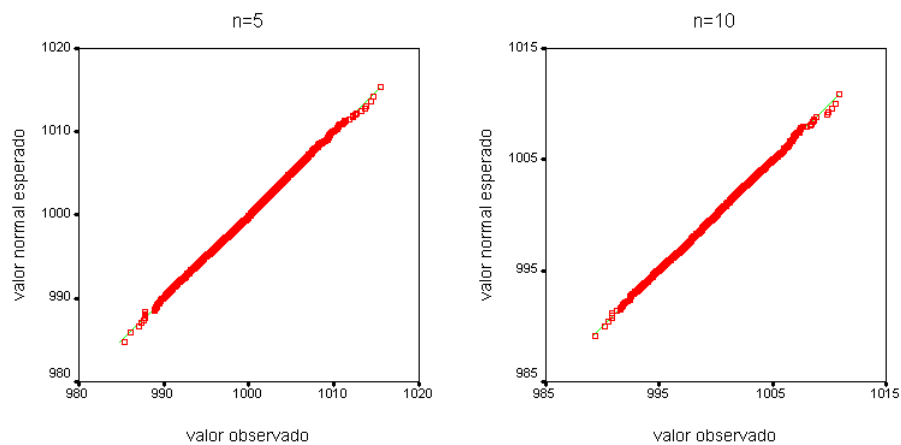


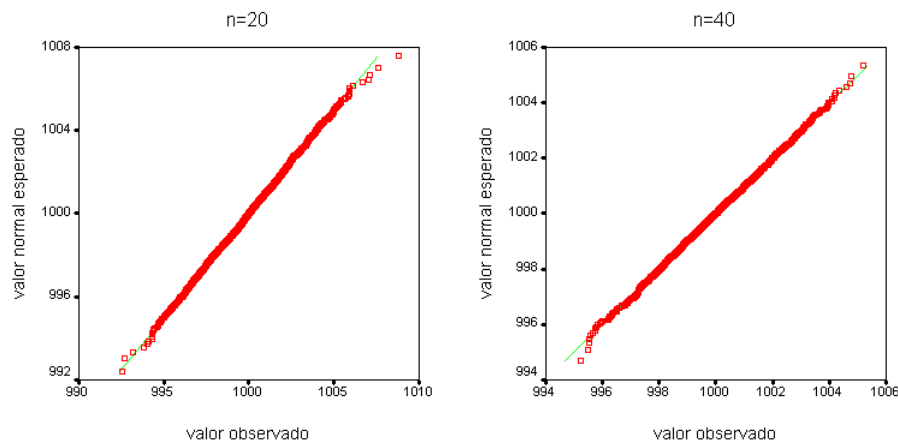
**Exemplo 7.3.2** Vejamos agora o que se passa com a distribuição de frequências da média amostral da variável aleatória  $Y$  relativa ao peso, em gramas, de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina (ver Exemplo 6.2.6, pg. 159). Seguindo o procedimento do exemplo anterior, os histogramas seguintes descrevem a distribuição de frequências da média amostral  $\bar{y}$  obtida a partir de 2000 amostras de dimensões  $n = 5, 10, 20$  e  $40$ , recolhidas dum conjunto vasto de observações da variável  $Y$ .

Tal como no exemplo anterior, para todos os valores considerados de  $n$ , o centro da distribuição de  $\bar{y}$  é aproximadamente 1000, que é aproximadamente a média da variável  $Y$ , e a sua variabilidade diminui com o aumento de  $n$ .



Dos gráficos anteriores e dos gráficos de quantis normais seguintes constatamos que, mesmo para pequenos valores de  $n$ , a distribuição amostral de  $\bar{y}$  é aproximadamente normal. Como veremos, tal acontece pelo facto da variável  $Y$  ser ela própria aproximadamente normal.





Em jeito de conclusão, podemos referir três características comuns às duas situações anteriores: 1) o centro da distribuição da média amostral parece ser independente de  $n$  e é aproximadamente igual à média da variável observada; 2) a variabilidade da distribuição da média amostral diminui com o aumento da dimensão da amostra; e, finalmente, 3) para valores moderados e grandes de  $n$ , a distribuição da média amostral é aproximadamente normal. Como característica divergente, podemos referir as distribuições das duas médias amostrais para pequenos valores de  $n$ .

### 7.3.2 Média e desvio-padrão de $\bar{x}$

As duas características comuns que observámos, nos dois exemplos considerados, sobre o centro e a variabilidade da distribuição de frequências da média amostral, não são particularidades das variáveis aí consideradas. São características gerais da média amostral de um qualquer conjunto de observações independentes duma variável aleatória.

Para justificar esta afirmação, vamos calcular a média e a variância da média amostral

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n),$$

onde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  representam as várias observações independentes da variável aleatória  $X$  com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Pelas propriedades da média, sabemos que

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x}} &= \frac{1}{n}(\mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \dots + \mu_{X_n}) \\ &= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \dots + \mu) \\ &= \frac{n\mu}{n} \\ &= \mu. \end{aligned}$$



Por outro lado, usando a independência entre as várias observações, podemos escrever

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}}^2 &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 (\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2) \\ &= \frac{1}{n^2} (\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2) \\ &= \frac{n \sigma^2}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

#### Média e desvio-padrão de $\bar{x}$ :

Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são observações independentes da variável aleatória  $X$  com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , então

$$\mu_{\bar{x}} = \mu,$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}.$$

Constatamos assim que a média de  $\bar{x}$  não é mais do que a média da variável aleatória observada, e que o desvio-padrão de  $\bar{x}$  é igual a  $\sigma/\sqrt{n}$ , isto é, decresce proporcionalmente à raiz quadrada do tamanho da amostra. Estas propriedades da média amostral explicam as características observadas no parágrafo anterior.

### 7.3.3 O teorema do limite central

Outra característica interessante que constatámos sobre a distribuição da média amostral tem a ver com a sua normalidade, que observámos ocorrer, no caso da variável  $Y$  para todos os valores de  $n$ , e no caso da variável  $X$  para valores moderados e grandes de  $n$ .

A normalidade da média amostral da variável  $X$  para pequenos e grandes valores de  $n$  é uma consequência do facto da variável  $X$  observada ser ela própria aproximadamente normal. Com efeito, pode ser demonstrado matematicamente que:

Se  $U$  e  $V$  são variáveis aleatórias normais e independentes, então a variável  $aU + bV$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais quaisquer, é ela própria normal.

Atendendo às propriedades já estudadas da média e da variância, sabemos que, nas condições anteriores,

$$\mu_{aU+bV} = a\mu_U + b\mu_V$$

e

$$\sigma_{aU+bV}^2 = a^2\sigma_U^2 + b^2\sigma_V^2.$$

No caso da média amostral, esta pode ser escrita na forma

$$\bar{x} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \dots + \frac{1}{n}X_n,$$

o que, atendendo à propriedade anterior sobre variáveis normais e independentes, permite concluir que:

**Distribuição de  $\bar{x}$  para observações normais e independentes:**

Se  $\bar{x}$  é calculada a partir de  $n$  observações normais e independentes com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , então

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$

para todos os valores de  $n$ .

**Exemplo 7.3.3** Vimos no Exemplo 2.4.3, como podemos controlar a qualidade dum processo de fabrico através da construção duma carta de controlo. No exemplo que focámos sobre o controlo do peso de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina, que em condições ideais de funcionamento produz pacotes cuja distribuição dos pesos possui uma distribuição normal com média 1000 gramas e com desvio-padrão 10 gramas, cada um dos pontos marcado na carta de controlo resultava duma única observação o que introduz no processo de controlo uma variabilidade indesejada. Mais natural é que cada ponto marcado resulte da observação de mais do que um pacote. Admitamos assim que para controlar o processo de empacotamento, de hora a hora é recolhida uma amostra de 5 pacotes, que acabaram de sair da máquina, e é registado o seu peso médio. Como esta média é uma média de observações normais que vamos admitir independentes, o resultados anterior permite concluir que

$$\bar{x} \sim N(1000, 10/\sqrt{5}).$$

Em particular, e atendendo à regra 68-95-99.7, podemos dizer que 99.7% dos pesos médios assim registados pertence ao intervalo  $[1000 - 3 \times 10/\sqrt{5}, 1000 + 3 \times 10/\sqrt{5}] =$

[986.6, 1013.4]. Se alguma das médias registadas não pertence a este intervalo, isso pode ser uma indicação de que a máquina está a funcionar mal, necessitando por isso de ser calibrada.

No caso da variável observada não ser ela própria normal, podemos também garantir que a distribuição de  $\bar{x}$  não é normal para qualquer valor de  $n$ . No entanto, se a dimensão da amostra for grande, há um teorema matemático, conhecido como **teorema central do limite** ou **teorema do limite central**, que assegura que, nesse caso, a distribuição da média amostral é aproximadamente normal. A palavra “central” deve-se à importância que este resultado teve na investigação matemática em Probabilidades, nas primeiras décadas do século passado.

**Teorema do limite central:**

Se  $\bar{x}$  é calculada a partir de  $n$  observações independentes com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , então

$$\bar{x} \simeq N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$

para  $n$  grande.

Reparemos que a aproximação normal obtida anteriormente para a distribuição amostral da proporção  $\hat{p}$ , é um caso particular do teorema do limite central. Com efeito, usando (7.2.5),  $\hat{p}$  é a média das variáveis  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ,

$$\hat{p} = \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \dots + S_n),$$

que como vimos têm média  $\mu = p$  e desvio-padrão  $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ . Pelo teorema do limite central concluímos que

$$\hat{p} \simeq N\left(p, \sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}\right),$$

ou seja,

$$\hat{p} \simeq N\left(p, \sqrt{p(1-p)/n}\right),$$

que foi precisamente a aproximação normal dada anteriormente para a distribuição amostral de  $\hat{p}$ .

O comportamento da distribuição da média amostral descrito no teorema do limite central, ocorre também em situações mais gerais do que aquelas que enunciámos. Por exemplo, a aproximação normal para a média amostral é ainda válida em casos em

que há dependência entre as diversas observações, ou em casos em que as várias observações não podem ser consideradas realizações de variáveis aleatórias com a mesma distribuição. Em particular, se a amostra é recolhida por amostragem aleatória simples numa população finita, o teorema do limite central é ainda válido.

A qualidade da aproximação da distribuição da média amostral pela distribuição normal, depende muito da forma da distribuição de probabilidade subjacente à variável observada. Se uma tal distribuição for próxima da distribuição normal, será de esperar que a aproximação normal para a distribuição da média amostral ocorra para valores de  $n$  mais pequenos do que no caso em que a distribuição da variável observada for muito diferente da distribuição normal.

Vejamos dois exemplos simples de utilização do teorema do limite central, no cálculo de probabilidades associadas a uma variável aleatória que se exprime como soma de variáveis aleatórias independentes.

**Exemplo 7.3.4** Suponhamos que decidimos lançar um dado equilibrado 100 vezes consecutivas, e que apostamos com um amigo A que vamos obter pelo menos 350 pontos na soma dos pontos obtidos nos vários lançamentos, e com outro amigo B que vamos obter mais do que 400 pontos. Qual é a probabilidade de ganharmos a aposta com cada um dos nossos dois amigos? Se representarmos por  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  os pontos obtidos em cada um dos 100 lançamentos e por  $S$  a sua soma, isto é,  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ , as probabilidades pedidas são dadas por  $P(S \geq 350)$  e  $P(S > 400)$ , respectivamente. Como vimos no Exemplo 6.3.1, cada uma das variáveis  $X_i$  tem média 3.5 e desvio-padrão  $\sqrt{2.9167}$ . Atendendo ao teorema do limite central, a média amostral

$$\bar{x} = (X_1 + X_2 + \dots + X_{100})/100 = S/100,$$

é aproximadamente normal com média 3.5 e desvio-padrão  $\sqrt{2.9167}/\sqrt{100} \approx 0.1708$ . Para obter resultados mais fidedignos, vamos usar a correcção de continuidade no cálculo das duas probabilidades anteriores. Assim, denotando por  $Z$  a variável normal standard, temos

$$\begin{aligned} P(S \geq 350) &= P(S \geq 349.5) \\ &= P(\bar{x} \geq 3.495) \\ &= P\left(\frac{\bar{x} - 3.5}{0.1708} \geq \frac{3.495 - 3.5}{0.1708}\right) \\ &\approx P(Z \geq -0.029) \\ &= 1 - 0.4884 = 0.5116 \end{aligned}$$

e

$$P(S > 400) = P(S > 400.5)$$

$$\begin{aligned}
&= P(\bar{x} > 4.005) \\
&= P\left(\frac{\bar{x} - 3.5}{0.1708} > \frac{4.005 - 3.5}{0.1708}\right) \\
&\approx P(Z > 2.957) \\
&= 1 - 0.9984 = 0.0016.
\end{aligned}$$

**Exemplo 7.3.5** Suponhamos que no jogo da roleta descrito no Exemplo 6.5.2 (pág. 169), o jogador decide jogar 100 partidas numa das suas idas ao casino. Calculemos uma aproximação para a probabilidade dele ganhar mais do que aquilo que perde. Representando por  $X_i$  o ganho (ou perda) líquido do jogador na  $i$ -ésima partida, o ganho líquido do jogador no fim das 100 partidas é dado por  $G = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ . Estas variáveis já foram por nós estudadas no Exemplo 6.5.2, onde vimos que possuíam média  $-0.27$  euros e desvio-padrão  $\sqrt{3408.035} \approx 58.3784$  euros. Usando o teorema do limite central, sabemos que a média amostral  $\bar{x} = G/100$ , pode ser aproximada pela distribuição normal de média  $-0.27$  e desvio-padrão  $58.3784/\sqrt{100} = 5.83784$ . Assim, denotando por  $Z$  a variável normal standard, temos (para efectuar a correcção de continuidade, devemos ter em conta que  $G$  toma valores de 10 em 10)

$$\begin{aligned}
P(G > 0) &= P(G > 5) \\
&= P(\bar{x} > 0.05) \\
&= P\left(\frac{\bar{x} - (-0.27)}{5.83784} > \frac{0.05 - (-0.27)}{5.83784}\right) \\
&\approx P(Z > 0.055) \\
&= 1 - 0.5219 = 0.4781.
\end{aligned}$$

Vejamos agora o que acontece à probabilidade anterior, se o jogador decide jogar 1000 partidas em vez de 100. Neste caso,  $G = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$  e a média amostral,  $\bar{x} = G/1000$ , pode ser aproximada pela distribuição normal de média  $-0.27$  e desvio-padrão  $58.3784/\sqrt{1000} \approx 1.8461$ , e portanto

$$\begin{aligned}
P(G > 0) &= P(G > 5) \\
&= P(\bar{x} > 0.005) \\
&= P\left(\frac{\bar{x} - (-0.27)}{1.8461} > \frac{0.005 - (-0.27)}{1.8461}\right) \\
&\approx P(Z > 0.149) \\
&= 1 - 0.5592 = 0.4408.
\end{aligned}$$

Vemos assim, que quantas mais partidas o jogador joga, mais probabilidade tem de sair do casino com menos dinheiro do que quando entrou. Esta conclusão está de acordo com as conclusões a que chegámos através da lei dos grandes números.

## 7.4 Bibliografia

Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A. (2002). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*, Pioneira.

McPherson. G. (1990). *Statistics in Scientific Investigation: Its Basis, Application and Interpretation*, Springer-Verlag.

Moore, D.S. (1985). *Statistics: Concepts and Controversies*, W.H. Freeman and Company.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.

## Parte III

# Inferência Estatística





## Capítulo 8

# Intervalos de confiança para proporções e médias

*Inferência estatística. Noção de intervalo de confiança. Margem de erro e nível de confiança. Intervalos de confiança para proporções. Intervalos de confiança para médias. O caso das populações normais. A distribuição de Student. Como escolher o tamanho da amostra.*

### 8.1 Inferência estatística

Tão ou mais interessantes do que as aplicações do teorema do limite central com que terminámos o capítulo anterior, são as suas aplicações à inferência estatística que vamos abordar em detalhe neste e no próximo capítulo. O conhecimento das distribuições amostrais das estatísticas  $\bar{x}$  e  $\hat{p}$ , ou da respectiva aproximação normal, é de importância fundamental na implementação de dois procedimentos de inferência estatística, conhecidos como **intervalos de confiança** e **testes de hipóteses**, cujo objectivo comum é inferir sobre um parâmetro desconhecido da população que estudamos, e que no caso particular das estatísticas  $\bar{x}$  e  $\hat{p}$ , ou é uma média,  $\mu$ , ou uma proporção,  $p$ , respectivamente.

**Exemplo 8.1.1** Para ilustrar o que acabámos de dizer, recordemos o Exemplo 5.3.1 em que uma moeda portuguesa de um euro foi lançada 50 vezes tendo-se obtido 45 vezes a face europeia e 5 vezes a face portuguesa. A questão que colocámos na altura era a de saber qual era a probabilidade de sair a face europeia. Vimos que a resposta a esta questão poderia depender do nosso conhecimento sobre a experiência em causa, em particular sobre o facto de termos, ou não, razões para admitir que a moeda é equilibrada. Representando por  $p$  a probabilidade de ocorrência da face europeia

no lançamento desta moeda, sabemos já que estamos na presença duma experiência aleatória binomial de parâmetros  $n = 50$  e  $p$ , onde  $p$  é um parâmetro desconhecido sobre o qual pretendemos inferir. Atendendo à lei dos grandes números sabemos que a proporção de faces europeias observadas,  $\hat{p} = 45/50 = 0.9$ , é uma aproximação da probabilidade  $p$  de ocorrência da face europeia no lançamento desta moeda.

Se além da estimativa 0.9 (dita estimativa pontual), pretendemos dar indicação sobre a **precisão** da mesma, que será naturalmente dada sob a forma dum intervalo cuja amplitude indicará a precisão da estimativa, estamos caídos num problema de estimação por **intervalos de confiança**.

Em vez de pretendermos uma aproximação para  $p$ , poderemos querer saber se a moeda é, ou não, equilibrada. Por outras palavras, poderemos querer saber se a proporção observada, 0.9, é, ou não, compatível com a hipótese  $p = 0.5$  da moeda ser equilibrada. Temos neste caso um problema de **testes de hipóteses**.

Podemos assim dizer, que no caso dos **intervalos de confiança**, pretende-se estimar o parâmetro de interesse dando indicação da **precisão** da estimativa apresentada, enquanto que no caso dos **testes de hipóteses** pretende-se avaliar a adequação das observações realizadas com uma hipótese formulada, *a priori*, sobre o parâmetro de interesse. Em ambos os casos, e é essa característica que distingue a **estatística inferencial** da **estatística descritiva**, pretende-se quantificar a **confiança** que temos nas conclusões que apresentamos, ou de forma equivalente, quantificar o erro que podemos estar a cometer. Como veremos a seguir, o conhecimento da distribuição amostral da estatística de interesse, seja ela a média amostral  $\bar{x}$  ou a proporção amostral  $\hat{p}$ , é essencial para atingirmos estes objectivos.

## 8.2 Estimação por intervalos de confiança

A estimação por intervalos de confiança é uma técnica do âmbito da estatística inferencial cujo objectivo é o da estimação dum parâmetro (desconhecido) duma população que estudamos. A particularidade desta técnica que a torna diferente da denominada **estimação pontual**, é que para além da estimativa para o parâmetro que se obtém a partir das observações realizadas, própria da estimação pontual, são também indicadas a **precisão** e a **confiança** que temos na estimativa produzida. A precisão da estimativa é definida pela chamada **margem de erro**, que conjuntamente com a estimativa calculada definem um intervalo do tipo

$$\text{estimativa pontual} \pm \text{margem de erro}$$

dito **intervalo de confiança** para o parâmetro de interesse. A **confiança** que temos

na estimativa produzida, será avaliada em termos da probabilidade dos intervalos assim construídos, que são diferentes de amostra para amostra, conterem o verdadeiro valor do parâmetro. Um exemplo, bem nosso conhecido, em que esta técnica estatística é usada, é o das sondagens eleitorais a que fizemos já referência no capítulo introdutório e a que voltaremos mais à frente.

**Exemplo 8.2.1** Para ilustrar a construção dum intervalo de confiança, retomemos o Exemplo 8.1.1 (pág. 201) do lançamento duma moeda de um euro em que observámos a face europeia em 45 dos 50 lançamentos que efectuámos, e em que pretendemos estimar a probabilidade  $p$  de ocorrência da face europeia num lançamento da moeda. Para esta amostra, a proporção de faces europeias ocorridas foi de  $\hat{p} = 0.9$ . Se repetíssemos a experiência aleatória efectuando mais e mais sucessões de 50 lançamentos da mesma moeda, sabemos que a proporção  $\hat{p}$  possui uma distribuição de probabilidade aproximadamente normal com média

$$\mu = p,$$

e com desvio-padrão

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)/50} \approx 0.14\sqrt{p(1-p)}.$$

Dito de outra maneira, a variável aleatória

$$\frac{\hat{p} - p}{0.14\sqrt{p(1-p)}}$$

é aproximadamente normal com média 0 e desvio-padrão 1. Utilizando a regra 68-95-99.7, sabemos que a probabilidade da variável anterior pertencer ao intervalo  $[-2, 2]$  é aproximadamente igual 0.95. Atendendo à interpretação frequentista da noção de probabilidade, isto quer dizer que se repetirmos a experiência aleatória efectuando mais e mais sucessões de 50 lançamentos da moeda, em 95% dessas repetições ter-se-á

$$-2 \leq \frac{\hat{p} - p}{0.14\sqrt{p(1-p)}} \leq 2,$$

ou seja, em 95% dessas repetições  $\hat{p}$  pertencerá ao intervalo

$$\left[ p - 0.28\sqrt{p(1-p)}, p + 0.28\sqrt{p(1-p)} \right].$$

Dizer que a proporção  $\hat{p}$  pertence ao intervalo anterior em 95% das repetições da experiência, é a mesma coisa que dizer que o intervalo

$$\left[ \hat{p} - 0.28\sqrt{p(1-p)}, \hat{p} + 0.28\sqrt{p(1-p)} \right],$$

conterá a verdadeira probabilidade  $p$  em 95% das repetições da experiência.

Este intervalo é ainda de pouca utilidade pois não pode ser calculado exclusivamente a partir das observações realizadas. Ele depende do parâmetro  $p$  cujo verdadeiro valor desconhecemos. No entanto, pela lei dos grande números, sabemos que, para valores grandes de  $n$ ,  $\hat{p}$  está próximo de  $p$ , o que nos permite afirmar que o intervalo

$$\left[ \hat{p} - 0.28\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}, \hat{p} + 0.28\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \right],$$

contém  $p$  em aproximadamente 95% das vezes que repetirmos a experiência.

O intervalo anterior diz-se **intervalo de confiança** para  $p$  com um **nível de confiança** de 0.95. O nível de confiança é também designado por **grau de confiança**, ou ainda, pelas razões anteriores, por **probabilidade de cobertura** do intervalo de confiança. É também frequente usar a percentagem para exprimir o nível de confiança do intervalo. Neste caso diremos que o intervalo anterior é um intervalo de confiança para  $p$  com um **nível de confiança** de 95%.

Atendendo a que para os lançamento realizados observámos  $\hat{p} = 0.9$ , dizemos também que o intervalo

$$\left[ 0.9 - 0.28\sqrt{0.9(1-0.9)}, 0.9 + 0.28\sqrt{0.9(1-0.9)} \right] = [0.816, 0.984]$$

é um intervalo de confiança para  $p$  com um **nível de confiança** de 0.95. Apesar do elevado grau de confiança, notemos que nada nos garante que amostra observada não seja uma daquelas 5% em que os intervalos a partir delas obtidos não contêm o verdadeiro valor de  $p$ .

Reparemos que, de forma análoga, podemos utilizar a regra 68-95-99.7 para construir intervalos de confiança com níveis de confiança de 68% e de 99.7%. Atendendo às observações realizadas, concluímos que

$$\left[ 0.9 - 0.14\sqrt{0.9(1-0.9)}, 0.9 + 0.14\sqrt{0.9(1-0.9)} \right] = [0.858, 0.942]$$

é um intervalo de confiança para  $p$  com um nível de confiança de 68%, enquanto que

$$\left[ 0.9 - 0.42\sqrt{0.9(1-0.9)}, 0.9 + 0.42\sqrt{0.9(1-0.9)} \right] = [0.774, 1.026]$$

é um intervalo de confiança para  $p$  com um nível de confiança de 99.7%. Como podemos constatar, **o aumento do nível de confiança tem como contrapartida o aumento da margem de erro, ou seja, a diminuição da precisão da estimativa.**

Como podemos concluir deste exemplo, a quantificação da confiança na estimativa apresentada tem a ver, não com o intervalo de confiança que calculámos a partir das observações, pois este, ou contém, ou não contém o verdadeiro valor de  $p$ , mas sim com

o que se passaria se o processo fosse repetido um grande número de vezes. Por outras palavras, **a quantificação da confiança tem a ver com o método utilizado para construir o intervalo de confiança.**

Os intervalos de confiança para proporções e médias que estudaremos neste capítulo, serão apresentados admitindo que as observações são realizações independentes de determinada variável aleatória. Como já referimos a propósito das distribuições amostrais, estes intervalos são ainda válidos sob condições mais gerais. Tal acontece, em particular, quando a amostra é recolhida por amostragem aleatória simples. Tal já não acontece se usarmos outro dos métodos aleatórios de recolha de amostras a que fizemos referência no Capítulo 4.

### 8.3 Intervalos de confiança para uma proporção

Analise agora o caso geral duma qualquer experiência aleatória binomial de parâmetros  $n$  e  $p$ , onde  $n$  representa o número de observações realizadas, e em que pretendemos obter um intervalo de confiança para o parâmetro desconhecido  $p$ , com um nível de confiança  $C$ , fixo à partida. Como queremos intervalos com um nível de confiança elevado,  $C$  é habitualmente um número inferior mas próximo de 1.

Seguindo o método descrito no parágrafo anterior, podemos, sem dificuldades de maior, obter um método geral que permita, a partir da distribuição amostral de  $\hat{p} = X/n$ , onde  $X$  é o número de sucessos observados, que sabemos ser aproximadamente normal com média

$$\mu = p,$$

e com desvio-padrão

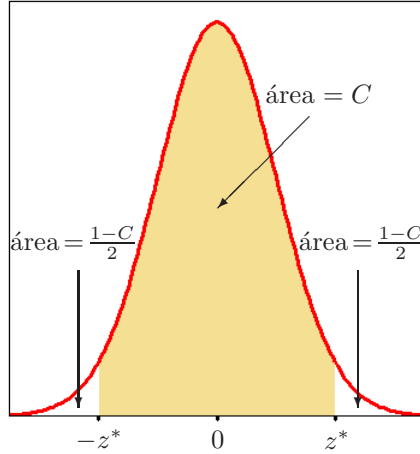
$$\sigma = \sqrt{p(1-p)/n},$$

construir intervalos, com base nas observações realizadas, que com probabilidade  $C$  contenham o verdadeiro valor de  $p$ .

Se pretendemos um intervalo com nível de confiança  $C$ , devemos começar por consultar a tabela da distribuição normal para determinar o intervalo da forma  $[-z^*, z^*]$ , ao qual pertence uma variável normal standard com uma probabilidade  $C$  (ver a figura seguinte).

Nos casos habituais escolhemos para  $C$  um dos valores 0.9, 0.95 ou 0.99. Para cada um destes valores de  $C$ , obtemos para  $z^*$  os valores dados na tabela seguinte:

$C$	0.90	0.95	0.99
$z^*$	1.645	1.960	2.576



Reparemos que existem vários intervalos não centrados na origem que têm a propriedade de terem entre as suas extremidades uma área igual a  $C$ . No entanto, pode ser demonstrado que são os intervalos centrados na origem que têm uma menor amplitude, conduzindo, por isso, a intervalos de confiança com uma menor margem de erro.

Determinado o valor de  $z^*$ , e atendendo a que a variável aleatória

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \quad (8.3.1)$$

é aproximadamente normal com média 0 e desvio-padrão 1, podemos dizer que com probabilidade aproximadamente igual a  $C$ , vale a dupla desigualdade

$$-z^* \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq z^*, \quad (8.3.2)$$

ou ainda, que o intervalo

$$\left[ \hat{p} - z^* \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}, \hat{p} + z^* \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \right]$$

contém  $p$  com probabilidade aproximadamente igual a  $C$ . Este intervalo é habitualmente designado como **intervalo de confiança de Wald** para  $p$  com nível de confiança  $C$ .

O nível de confiança do intervalo de Wald é, devido à aproximação normal para a distribuição amostral de  $\hat{p}$  que utilizámos na sua construção, apenas aproximadamente igual a  $C$ . O mesmo acontece com outros intervalos de confiança que sejam construídos a partir duma aproximação para a distribuição amostral de  $\hat{p}$ .

**Intervalo de confiança de Wald para uma proporção:**

Numa experiência aleatória binomial de parâmetros  $n$  e  $p$ , um intervalo de confiança para  $p$ , com nível de confiança aproximadamente igual a  $C$ , tem por extremidades

$$\hat{p} \pm z^* \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n},$$

onde  $z^*$  é tal que

$$P(-z^* \leq Z \leq z^*) = C$$

e  $Z$  tem uma distribuição normal  $N(0, 1)$ .

No caso particular do intervalo de Wald, se  $p$  é próximo de 0 ou de 1, e  $n$  é pequeno, como a aproximação normal não é de grande qualidade o nível de confiança do intervalo de Wald pode ser muito diferente de  $C$ . Além disso, como nestes casos a probabilidade de obter  $\hat{p} = 0$  ou  $\hat{p} = 1$  é grande, quando  $p$  estiver próximo de 1 ou de 0, respectivamente, obtemos nestes casos os intervalos  $[0, 0]$  ou  $[1, 1]$  que são manifestamente desapropriados como intervalos de confiança para  $p$ . Mais grave do que isto é o facto de que mesmo para valores grandes de  $n$  e para  $p$  nem muito pequeno nem muito grande, o intervalo de Wald pode ter um nível de confiança efectivo muito diferente do que desejamos (cf. Brown *et al.*, 2001).

Como vamos ver a seguir, é possível construir intervalos de confiança para uma proporção que não sofram dos problemas que apontámos. Para tal, retomemos novamente a dupla desigualdade (8.3.2) e em vez de substituirmos  $p$  por  $\hat{p}$  no denominador da variável (8.3.1), o que deu origem ao intervalo de confiança de Wald, vamos desenvolver a dupla desigualdade. Depois de alguns cálculos, chegamos à conclusão que o intervalo

$$\left[ \tilde{p} - \frac{z^*}{\tilde{n}} \sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p}) + \frac{(z^*)^2}{4}}, \tilde{p} + \frac{z^*}{\tilde{n}} \sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p}) + \frac{(z^*)^2}{4}} \right],$$

onde

$$\tilde{p} = \tilde{X}/\tilde{n},$$

$$\tilde{X} = X + (z^*)^2/2$$

e

$$\tilde{n} = n + (z^*)^2,$$

contém  $p$  com probabilidade aproximadamente igual a  $C$ . Este intervalo é dito **intervalo de confiança de Wilson** para uma proporção, e é preferível ao intervalo de Wald (ver por exemplo Brown *et al.*, 2001).

A única desvantagem do intervalo de confiança de Wilson está na complexidade dos cálculos que envolve. Uma forma simples de rodear este inconveniente, obtendo ao mesmo tempo um intervalo de confiança com boas propriedades e que para valores grandes de  $n$  ( $n \geq 40$ ) é muito próximo do intervalo de Wilson, é considerar um intervalo de confiança cuja forma é a do intervalo de Wald mas que seja baseado, não na proporção amostral  $\hat{p}$  mas no ponto médio  $\tilde{p}$  do intervalo de confiança de Wilson que podemos considerar como uma proporção amostral corrigida uma vez que  $\tilde{X} = X + (z^*)^2/2$  e  $\tilde{n} = n + (z^*)^2$ , podem ser interpretadas como correções para o número de sucessos observados e para o número de observações realizadas, respectivamente.

**Intervalo de confiança de Agresti-Coull para uma proporção:**

Numa experiência aleatória binomial de parâmetros  $n$  e  $p$ , um intervalo de confiança para  $p$ , com nível de confiança aproximadamente igual a  $C$ , tem por extremidades

$$\tilde{p} \pm z^* \sqrt{\tilde{p}(1 - \tilde{p})/\tilde{n}},$$

onde  $z^*$  é tal que

$$P(-z^* \leq Z \leq z^*) = C$$

e  $Z$  tem uma distribuição normal  $N(0, 1)$ .

Apesar do intervalo de Wilson possuir melhores propriedades que o intervalo de Agresti-Coull para amostras de dimensão  $n < 40$  (cf. Brown *et al.*, 2001), vamos, pela sua simplicidade de cálculo, utilizar o intervalo de Agresti-Coull independentemente da dimensão da amostra. Em particular, o intervalo de Agresti-Coull é sempre preferível ao intervalo de confiança de Wald.

**Exemplo 8.3.3** A sondagem eleitoral publicada pelo semanário *Expresso*, em 16 de Setembro de 1995, a que fizemos referência no Exemplo 0.3.1 (pág. 5), foi baseada nos resultados seguintes obtidos para os 1006 indivíduos inquiridos, depois de se distribuírem os resultados dos indecisos pelos diversos partidos.

Admitindo que a amostragem realizada foi a amostragem aleatória simples (o que não aconteceu, como podemos constatar pela informação dada na ficha técnica), e excluindo os resultados dos eleitores indecisos, uma vez que não temos acesso às preferências destes eleitores, determinemos intervalos de confiança de nível 0.95 para as intenções de voto em cada um dos partidos anteriores (em termos de proporção). Apesar destas simplificações, os resultados seguintes são próximos dos apresentados pelo *Expresso*.



Partido	Efectivo
CDU	72
PS	342
PSD	276
CDS/PP	75
Outros	53
Indecisos	188
Total	1006

Vamos limitar-nos ao cálculo dos intervalos de confiança de Wald e de Agresti-Coull.

### Intervalos de confiança de Wald

Atendendo a que  $n = 818$ , temos

$$\hat{p}_{cdu} = \frac{72}{818} \approx 0.08802,$$

$$\hat{p}_{ps} = \frac{342}{818} \approx 0.41809,$$

$$\hat{p}_{psd} = \frac{276}{818} \approx 0.33741,$$

$$\hat{p}_{cds/pp} = \frac{75}{818} \approx 0.09169.$$

o que permite obter

CDU	–	$0.08802 \pm 0.01942$
PS	–	$0.41809 \pm 0.03380$
PSD	–	$0.33741 \pm 0.03240$
CDS/PP	–	$0.09169 \pm 0.01978$

ou, em termos percentuais:

CDU	–	$8.80 \pm 1.94\%$
PS	–	$41.81 \pm 3.38\%$
PSD	–	$33.74 \pm 3.24\%$
CDS/PP	–	$9.17 \pm 1.99\%$

### Intervalos de confiança de Agresti-Coull

Tendo em conta as definições de  $\tilde{n}$  e de  $\tilde{p}$  temos então

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= 818 + 1.96^2 = 821.8416, \\ \tilde{p}_{cdu} &= \frac{72 + 1.96^2/2}{818 + 1.96^2} \approx 0.08995, \\ \tilde{p}_{ps} &= \frac{342 + 1.96^2/2}{818 + 1.96^2} \approx 0.41848, \\ \tilde{p}_{psd} &= \frac{276 + 1.96^2/2}{818 + 1.96^2} \approx 0.33817, \\ \tilde{p}_{cds/pp} &= \frac{75 + 1.96^2/2}{818 + 1.96^2} \approx 0.09360.\end{aligned}$$

o que permite obter

CDU	–	0.08995 ± 0.01956
PS	–	0.41848 ± 0.03373
PSD	–	0.33817 ± 0.03234
CDS/PP	–	0.09360 ± 0.01991

ou, em termos percentuais:

CDU	–	9.00 ± 1.96%
PS	–	41.85 ± 3.37%
PSD	–	33.82 ± 3.23%
CDS/PP	–	9.36 ± 1.99%

Reparemos que para cada um dos partidos temos margens de erro diferentes, enquanto que na ficha técnica da sondagem apenas a margem de erro máxima era referida (ver pág. 5). **Como podemos concluir da forma geral dum intervalo de confiança para uma proporção, a margem de erro dum intervalo depende da estatística  $\hat{p}$  (resp.  $\tilde{p}$ ).** Mais precisamente, para uma mesma dimensão da amostra, a margem de erro é máxima quando  $\hat{p} = 0.5$  (resp.  $\tilde{p} = 0.5$ ), tornando-se cada vez mais pequena à medida que  $\hat{p}$  (resp.  $\tilde{p}$ ) se afasta, por excesso ou por defeito, de 0.5.

## 8.4 Intervalos de confiança para uma média

O método que desenvolvemos para a construção de intervalos de confiança para uma proporção, pode ser adaptado, sem alterações significativas, à construção de intervalos de confiança para uma média,  $\mu$ , a partir de  $n$  observações independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , que vamos interpretar como sendo realizações duma variável aleatória  $X$  com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ .

Estando agora interessados na estimação duma média, é natural basearmos a construção dos intervalos de confiança na estatística  $\bar{x}$  que, pelo teorema do limite central,

sabemos ter uma distribuição de probabilidade aproximadamente normal com média  $\mu$  e com desvio-padrão  $\sigma/\sqrt{n}$ , onde  $\sigma$  é o desvio-padrão de variável  $X$ . Um intervalo de confiança para  $\mu$  será assim construído com base na variável

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (8.4.1)$$

que é, para  $n$  grande, aproximadamente normal com média 0 e desvio-padrão 1.

Procedendo como no parágrafo anterior, para um dado nível de confiança  $C$ , devemos começar por determinar um intervalo da forma  $[-z^*, z^*]$  ao qual pertence uma variável normal standard com probabilidade  $C$ . Podemos então dizer que a dupla desigualdade

$$-z^* \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z^*$$

ocorrerá com probabilidade aproximadamente igual a  $C$ , ou ainda, que o intervalo

$$\left[ \bar{x} - z^* \sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z^* \sigma/\sqrt{n} \right]$$

conterá  $\mu$  com probabilidade aproximadamente igual a  $C$ , para  $n$  grande. Admitindo que **o desvio-padrão  $\sigma$  é conhecido**, o intervalo anterior pode ser calculado exclusivamente a partir das observações, sendo assim um intervalo de confiança para  $\mu$ , com nível de confiança aproximadamente igual a  $C$ .

O facto do intervalo de confiança apresentado ter nível de confiança apenas aproximadamente igual a  $C$  para  $n$  grande, deve-se à aproximação normal que estamos a usar para a distribuição de probabilidade da média amostral. Dizemos neste caso que se trata dum **intervalo de confiança aproximado**. Como já referimos, a qualidade desta aproximação depende fortemente da distribuição subjacente às observações realizadas e da dimensão da amostra. Se esta distribuição é próxima da normal, o nível de confiança efectivo é mais próximo do nível anunciado do que se essa distribuição for, por exemplo, fortemente assimétrica. Enquanto que no primeiro caso podemos usar amostras de tamanho pequeno, no segundo caso somos obrigados a usar amostras de dimensões mais elevadas sob pena de obtermos um intervalo de confiança com um nível efectivo muito diferente do nível desejado. Neste caso, vários autores aconselham o uso de amostras de dimensão superior ou igual a 30 (cf. Anderson *et al.*, 2002, pág. 267).

No caso limite em que a **distribuição da variável observada é normal e o seu desvio-padrão  $\sigma$  é conhecido**, sabemos que a distribuição amostral de  $\bar{x}$  é também normal, o que implica que o intervalo de confiança anterior tem nível de confiança exactamente igual a  $C$ . Dizemos neste caso que se trata dum **intervalo de confiança exacto**.

**Intervalo de confiança para uma média com  $\sigma$  conhecido:**

Se  $\bar{x}$  é calculada a partir de  $n$  observações independentes com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$  conhecido, então um intervalo de confiança de nível  $C$  para  $\mu$  tem por extremidades:

$$\bar{x} \pm z^* \sigma / \sqrt{n}$$

onde  $z^*$  é tal que

$$P(-z^* \leq Z \leq z^*) = C$$

e  $Z$  tem uma distribuição normal  $N(0, 1)$ . Este intervalo de confiança é exacto quando as observações são normais, e é aproximado nos outros casos, quando é  $n$  grande.

No caso em que  $\sigma$  é **desconhecido**, que é a situação mais comum na prática, é natural basear a construção dum intervalo de confiança na variável (8.4.1), em que o valor desconhecido  $\sigma$  é substituído pelo desvio-padrão amostral  $s$ . No entanto, a nova variável

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad (8.4.2)$$

não goza das mesmas propriedades que a variável (8.4.1). **Mesmo no caso em que as observações são normais, esta variável não é normal.** No entanto, para observações normais a distribuição de probabilidade da variável anterior é conhecida. Trata-se duma distribuição, a que chamamos **distribuição de Student**, que depende dum parâmetro designado por **grau de liberdade**.

**Distribuição t de Student:**

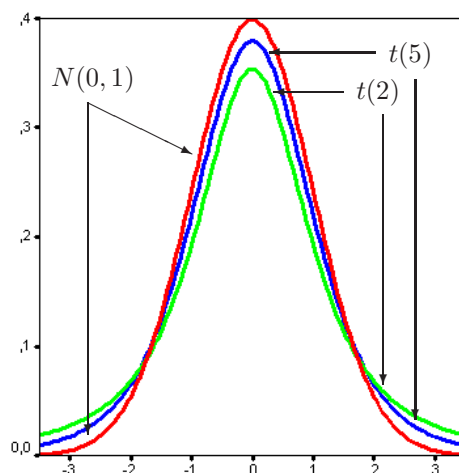
Se  $\bar{x}$  e  $s$  são calculados a partir de  $n$  observações normais e independentes com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , então a variável

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

tem uma distribuição  $t$  de Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

A **distribuição de Student** com  $k$  graus de liberdade é uma distribuição próxima da normal standard para valores moderados e grandes de  $k$ . A densidade de probabilidade da distribuição de Student tem, tal como a normal, uma forma de sino, sendo

simétrica relativamente à origem. Na figura seguinte, para alguns valores de  $k$ , apresentamos as densidades de probabilidade da distribuição de Student que denotamos por  $t(k)$ .



Tal como para a distribuição normal, o cálculo de áreas sob uma curva densidade de Student pode ser feito utilizando a Tabela D onde estão tabeladas algumas dessas áreas para vários graus de liberdade. Reparemos que a última linha da tabela é precisamente a correspondente à da distribuição normal standard.

Voltemos à questão da construção de **intervalos de confiança para a média  $\mu$  dum população normal, quando o desvio-padrão  $\sigma$  é desconhecido**. Fixado um nível de confiança  $C$ , começamos por determinar um intervalo da forma  $[-t^*, t^*]$  ao qual pertence, com probabilidade  $C$ , uma variável de Student com  $n - 1$  grau de liberdade, onde  $n$  é a dimensão da amostra. Atendendo à simetria da distribuição de Student, a determinação de  $t^*$  é análoga à determinação de  $z^*$  para a distribuição normal, mas contrariamente ao caso da distribuição normal, o valor  $t^*$  depende de  $n$ .

Podemos então dizer que a dupla desigualdade

$$-t^* \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t^*$$

ocorrerá com probabilidade (exactamente) igual a  $C$ , ou ainda, que o intervalo

$$\left[ \bar{x} - t^*s/\sqrt{n}, \bar{x} + t^*s/\sqrt{n} \right]$$

conterá  $\mu$  com probabilidade igual a  $C$ , para todo o valor de  $n$ .

No caso em que  $\sigma$  é **desconhecido mas as observações não são normais**, a variável (8.4.2) não possui uma distribuição de Student, mas é, para  $n$  grande, aproximadamente normal com média 0 e desvio-padrão 1. Como a distribuição  $t(n - 1)$

de Student é também aproximadamente normal standard quando  $n$  é grande, podemos concluir que o intervalo de confiança anterior é ainda um intervalo de confiança, de nível aproximadamente igual a  $C$ , para a média duma população não normal com desvio-padrão desconhecido.

**Intervalo de confiança para uma média com  $\sigma$  desconhecido:**

Se  $\bar{x}$  é calculada a partir de  $n$  observações independentes com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$  desconhecido, então um intervalo de confiança de nível  $C$  para  $\mu$  tem por extremidades:

$$\bar{x} \pm t^* s / \sqrt{n}$$

onde  $t^*$  é tal que

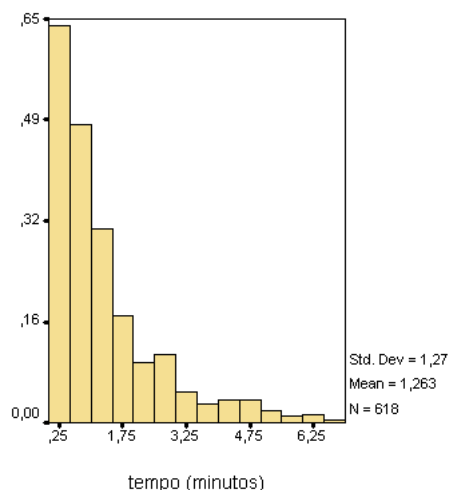
$$P(-t^* \leq T \leq t^*) = C$$

e  $T$  tem uma distribuição de Student  $t(n - 1)$ . Este intervalo de confiança é exacto quando as observações são normais, e é aproximado nos outros casos, quando é  $n$  grande.

Sendo os intervalos de confiança anteriores baseados em medidas de localização e dispersão, que vimos serem pouco robustas contra a presença de observações discordantes, é essencial usar os métodos que já estudámos para identificar e, se possível, eliminar tais observações. Atendendo ao teorema do limite central, os intervalos de confiança anteriores são **robustos contra a não verificação da hipótese de normalidade** quando o tamanho da amostra satisfaz  $n \geq 30$ . Quer isto dizer que verificando-se esta condição sobre a dimensão da amostra, os níveis de confiança efectivos dos intervalos apresentados são muito próximos dos anunciados. Para amostras com  $15 \leq n < 30$ , os intervalos podem ser usados a não ser que haja observações discordantes ou a distribuição das observações seja fortemente assimétrica. Para amostras de dimensão  $n < 15$  os intervalos de confiança devem ser usados apenas quando os dados são aproximadamente normais e não haja observações discordantes.

Vejamos três exemplos da determinação de intervalos de confiança para conjuntos de dados considerados noutros capítulos.

**Exemplo 8.4.3** Consideremos as observações descritas no Exemplo 1.2.7 (pág. 29) que a seguir reproduzimos, relativas ao tempo (em minutos) que medeia a chegada de dois clientes consecutivos a uma caixa dum hipermercado.



Determinemos um intervalo de confiança, de nível 0.99, para o tempo médio de interchegada de clientes. O intervalo de confiança que vamos calcular é apenas aproximado uma vez a distribuição subjacente às observações é fortemente assimétrica, não sendo, por isso, normal. No entanto, atendendo à elevada dimensão da amostra, será se esperar que o intervalo seja praticamente exacto.

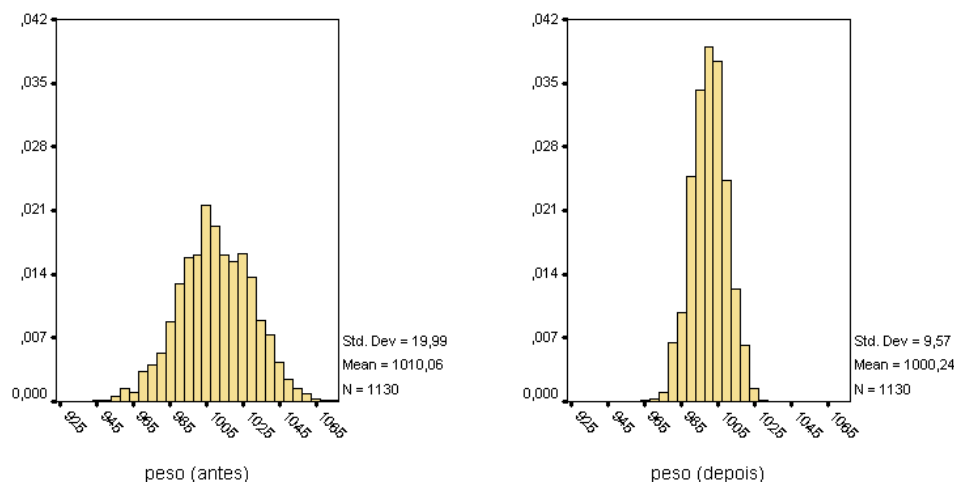
Como para a amostra observada  $\bar{x} = 1.263$  e  $s = 1.27$  (desvio-padrão populacional desconhecido), da tabela da distribuição  $t(617)$  de Student obtemos o seguinte intervalo de confiança

$$1.263 \pm 2.584 \times 1.27 / \sqrt{618} \longrightarrow [1.131, 1.395].$$

Usando o SPSS podemos também obter intervalos de confiança para a média apenas no caso em que o desvio-padrão é desconhecido. No caso presente obtemos:

		Statistic
Mean		1,263
99% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,131
	Upper Bound	1,395

**Exemplo 8.4.4** Consideremos agora os dois conjuntos de dados descritos pelos histogramas do Exemplo 1.2.4 (pág. 26), que a seguir reproduzimos, relativos aos pesos (em gramas) de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina antes e depois de ter sido calibrada.



Determinemos intervalos de confiança, de nível 0.95, para os pesos médios dos pacotes de açúcar empacotados pela máquina antes e depois de ter sido calibrada. Da tabela da distribuição de Student obtemos os seguintes intervalos de confiança

$$1010,06 \pm 1,962 \times 19,99/\sqrt{1130} \longrightarrow [1008,89, 1011,23]$$

e

$$1000,24 \pm 1,962 \times 9,57/\sqrt{1130} \longrightarrow [999,68, 1000,80].$$

Usando o SPSS, obtemos os intervalos

			Statistic
antes	Mean		1010,06
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1008,90
		Upper Bound	1011,23
depois	Mean		1000,24
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	999,68
		Upper Bound	1000,79

As diferenças entre os intervalos por nós calculados e os que constam do quadro anterior devem-se unicamente a erros de arredondamento.

**Exemplo 8.4.5** A partir das 64 medições não discordantes efectuadas por Newcomb sobre a velocidade da luz (ver Exemplo 1.2.5, pág. 27), e que vimos poderem ser descritos por uma distribuição normal (ver o último dos gráficos de quantis normais da página 72), podemos obter o intervalo de confiança seguinte, de nível de confiança 0.95, para a velocidade da luz:



		Statistic
Mean		27,75
95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	26,48
	Upper Bound	29,02

Trata-se do intervalo centrado no ponto 27.75 com margem de erro de 1.27.

## 8.5 Como escolher o tamanho da amostra

Vimos nos parágrafos anteriores que a margem de erro dum intervalo de confiança para uma proporção,  $p$ , ou para uma média,  $\mu$ , diminui à medida que o número de observações aumenta. Neste parágrafo discutimos a questão da determinação do tamanho da amostra necessário para obter uma margem de erro inferior ou igual a um valor fixado à partida. No caso da estimação duma proporção, limitamo-nos ao caso dos intervalos de Wald e de Agresti-Coull.

### 8.5.1 Caso da estimação duma proporção

#### Intervalo de confiança de Wald

No caso da estimação duma proporção, sendo  $\hat{p}$  aproximadamente igual a  $p$ , para  $n$  grande, a margem de erro do intervalo de Wald é aproximadamente igual a

$$\text{margem de erro} = z^* \sqrt{p(1-p)/n}.$$

Aumentando o tamanho da amostra podemos reduzir a margem de erro tanto quanto queiramos. Assim, se pretendemos um intervalo de confiança com uma margem de erro inferior ou igual a um valor  $E$  fixado à partida,

$$\text{margem de erro} \leq E,$$

devemos escolher  $n$  de modo que

$$\begin{aligned} z^* \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} &\leq E \\ z^* \sqrt{p(1-p)} &\leq E\sqrt{n} \\ (z^*)^2 p(1-p) &\leq E^2 n \\ \frac{(z^*)^2 p(1-p)}{E^2} &\leq n \end{aligned}$$

ou seja:

**Tamanho da amostra na estimação duma proporção (Wald):**

$$n \geq (z^*)^2 \frac{p(1-p)}{E^2}$$

Sendo  $p$  desconhecido, a fórmula anterior só pode ser usada se tivermos uma ideia aproximada sobre o verdadeiro valor de  $p$ . Esse valor aproximado pode, por exemplo, ser obtido se tivermos uma estimativa de  $p$  obtida num estudo anteriormente realizado, ou se desenvolvermos um estudo preliminar baseado numa amostra de pequena dimensão.

Outra forma de resolver o problema é tomar na fórmula anterior  $p = 0.5$ , uma vez que o produto  $p(1-p)$  é máximo para este valor de  $p$ . Neste caso, somos conduzidos à seguinte regra de escolha de  $n$ :

**Tamanho da amostra na estimação duma proporção, na ausência de qualquer informação sobre  $p$  (Wald):**

$$n \geq \frac{(z^*)^2}{4E^2}$$

Ao usarmos esta regra, a dimensão da amostra é por vezes superior ao que seria necessário se conhecessemos uma aproximação, mesmo que grosseira, de  $p$ . Por exemplo, se pretendemos um intervalo de nível de confiança 0.95 e soubermos que o verdadeiro valor de  $p$  não é superior a 0.2, bastará uma amostra de tamanho 246 para obtermos uma margem de erro inferior ou igual a 0.05. Com efeito,

$$n \geq (1.96)^2 \frac{0.2(1-0.2)}{(0.05)^2} = 245.86$$

Usando a fórmula anterior, somos levados a recolher uma amostra com dimensão igual ou superior a 385, pois

$$n \geq \frac{(1.96)^2}{4(0.05)^2} = 384.16$$

Quando as observações custam dinheiro, a diferença entre os valores anteriores pode ser importante.

**Intervalo de confiança de Agresti-Coull**

No caso da estimação duma proporção, sendo  $\tilde{p}$  aproximadamente igual a  $p$ , para  $n$  grande, a margem de erro é aproximadamente igual a

$$\text{margem de erro} = z^* \sqrt{p(1-p)/\tilde{n}}.$$

Se pretendemos um intervalo de confiança com uma margem de erro inferior ou igual a um valor  $E$  fixado à partida, devemos escolher  $n$  de modo que

$$\begin{aligned} z^* \sqrt{\frac{p(1-p)}{n + (z^*)^2}} &\leq E \\ z^* \sqrt{p(1-p)} &\leq E \sqrt{n + (z^*)^2} \\ (z^*)^2 p(1-p) &\leq E^2 (n + (z^*)^2) \\ \frac{(z^*)^2 p(1-p)}{E^2} &\leq n + (z^*)^2 \\ \frac{(z^*)^2 p(1-p)}{E^2} - (z^*)^2 &\leq n \end{aligned}$$

ou seja:

**Tamanho da amostra na estimação duma proporção (Agresti-Coull):**

$$n \geq (z^*)^2 \left( \frac{p(1-p)}{E^2} - 1 \right)$$

Tal como para o intervalo de confiança de Wald, sendo  $p$  desconhecido, a fórmula anterior só pode ser usada se tivermos uma ideia aproximada sobre o verdadeiro valor de  $p$ . Não tendo informação *a priori* sobre  $p$  somos conduzidos à seguinte regra de escolha de  $n$ :

**Tamanho da amostra na estimação duma proporção, na ausência de qualquer informação sobre  $p$  (Agresti-Coull):**

$$n \geq (z^*)^2 \left( \frac{1}{4E^2} - 1 \right)$$

Voltando ao exemplo anterior, se pretendemos um intervalo de nível de confiança 0.95 e soubermos que o verdadeiro valor de  $p$  não é superior a 0.2, bastará uma amostra de tamanho 242 para obtermos uma margem de erro inferior ou igual a 0.05. Com efeito,

$$n \geq (1.96)^2 \left( \frac{0.2(1-0.2)}{(0.05)^2} - 1 \right) = 242.02$$

Não tendo informação sobre  $p$ , somos levados a recolher uma amostra com dimensão igual ou superior a 381, pois

$$n \geq (1.96)^2 \left( \frac{1}{4(0.05)^2} - 1 \right) = 380.32$$

### 8.5.2 Caso da estimação duma média

No caso da estimação duma média  $\mu$ , a margem de erro, para  $n$  grande, é aproximadamente igual a

$$\text{margem de erro} = z^* \sigma / \sqrt{n}.$$

Tal como atrás, se pretendemos um intervalo de confiança com uma margem de erro inferior ou igual a um valor  $E$  fixado à partida, devemos escolher  $n$  de modo que

$$z^* \sigma / \sqrt{n} \leq E$$

ou seja:

**Tamanho da amostra na estimação duma média:**

$$n \geq \frac{(z^*)^2 \sigma^2}{E^2}$$

Sendo  $\sigma$  conhecido, a fórmula anterior pode ser directamente utilizada. Sendo  $\sigma$  desconhecido, a fórmula anterior só pode ser usada se tivermos uma ideia aproximada sobre o verdadeiro valor de  $\sigma$ . Esse valor aproximado pode, por exemplo, ser obtido se tivermos uma estimativa de  $\sigma$  obtida num estudo anteriormente realizado, ou num estudo preliminar baseado numa amostra de pequena dimensão. Em alternativa, podemos também ter uma ideia do valor máximo que  $\sigma$  pode assumir na população em causa. Neste caso, a utilização da fórmula anterior conduz a um valor de  $n$  superior ao que seria necessário para obter a margem de erro desejada.

## 8.6 Bibliografia

Agresti, A., Coull, A. (1998). Approximate are better than “exact” for interval estimation of binomial proportions, *The American Statistician*, 52, 119–126.

Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A. (2002). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*, Pioneira.

Brown, L.D., Cai, T.T., DasGupta, A. (2001). Interval estimation for binomial proportion, *Statistical Science*, 16, 101–133.

McPherson, G. (1990). *Statistics in Scientific Investigation: Its Basis, Application and Interpretation*, Springer-Verlag.

Moore, D.S. (1985). *Statistics: Concepts and Controversies*, W.H. Freeman and Company.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.



## Capítulo 9

# Testes de hipóteses para proporções e médias

*Noção de teste de hipóteses. Hipótese nula e hipótese alternativa. Estatística de teste.  $p$ -valor. Nível de significância. Testes de hipóteses para proporções e médias. Comparação de duas proporções e de duas médias. Comparação de duas médias em amostras emparelhadas.*

### 9.1 Generalidades sobre testes de hipóteses

Neste capítulo estudamos outro dos procedimentos do âmbito da estatística inferencial, que, conjuntamente com a estimação intervalar, é dos procedimentos mais usados por todos aqueles que utilizam a Estatística. Estamos a referir-nos aos **testes de hipóteses**, cujo objectivo principal é analisar a compatibilidade das observações realizadas com uma hipótese formulada *a priori* sobre a população. Tal como fizemos no capítulo anterior, vamos centrar a nossa atenção nos casos em que essa hipótese, que é traduzida por uma hipótese sobre um parâmetro associado à população, é uma hipótese sobre uma proporção,  $p$ , ou sobre uma média,  $\mu$ .

Vejamos um exemplo típico dum problema de testes de hipóteses.

**Exemplo 9.1.1** Suponhamos que ao observarmos alguns lançamentos dum dado aparentemente vulgar, suspeitamos que o dado é viciado, mais precisamente, que a probabilidade de ocorrência da face 6 é superior à dum dado equilibrado. Pretendendo averiguar se há boas razões para acreditar que a probabilidade  $p$  de ocorrência da face 6 é efectivamente superior a  $1/6$ , calculámos a proporção  $\hat{p}$  de faces 6 obtidas em 100 lançamentos do dado. Observámos 20 vezes a face 6, isto é, a proporção de faces 6 observada foi de  $\hat{p} = 20/100 = 0.2$ . A questão que agora se coloca é a de saber se

aquilo que observámos é natural ocorrer num dado não viciado, ou, pelo contrário, é pouco usual.

Uma das formas de respondermos a esta questão é calcularmos a probabilidade de **num dado não viciado**, isto é, num dado em que  $p = 1/6$ , ocorrer um resultado que, favorecendo a suspeita que temos, seja igual ou mais extremo do que aquele que foi observado, isto é, calculemos a probabilidade

$$P(\hat{p} \geq 0.2),$$

na hipótese do verdadeiro valor de  $p$  ser  $1/6$ .

Se esta probabilidade for pequena, concluímos que o que observámos tem pequena probabilidade de ocorrer num dado não viciado, e, nesse caso, as suspeitas que tínhamos de que o dado era viciado são fundadas. Se a probabilidade não for pequena, concluímos que o observado não pode ser considerado invulgar ou extraordinário, e, nesse caso, as observações realizadas são compatíveis com a hipótese do dado ser não viciado.

Como sabemos, a probabilidade anterior pode ser calculada a partir da distribuição binomial ou, para valores grandes de  $n$ , a partir da sua aproximação normal. Como para  $p = 1/6$  e  $n = 100$ , são válidas as condições  $np \geq 10$  e  $n(1 - p) \geq 10$ , podemos usar a aproximação normal que permite concluir que, sendo o dado não viciado,  $\hat{p}$  é aproximadamente normal com média

$$\mu = \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

e desvio-padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)} / 100 \approx \sqrt{0.1667(1 - 0.1667)/100} = 0.03727,$$

ou ainda,

$$\frac{\hat{p} - 0.1667}{0.03727} \simeq N(0, 1).$$

Assim, tendo em conta que  $\hat{p} = X/100$ , com  $X$  uma variável binomial, e sendo  $Z$  uma variável normal standard, temos

$$\begin{aligned} P(\hat{p} \geq 0.2) &= P(X \geq 20) \\ &= P(X \geq 19.5) \\ &= P(\hat{p} \geq 0.195) \quad (\text{correção de continuidade, ver pág. 188}) \\ &= P\left(\frac{\hat{p} - 0.1667}{0.03727} \geq \frac{0.195 - 0.1667}{0.03727}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0.759) \\ &= 1 - 0.7761 = 0.2239. \end{aligned}$$



Concluimos assim que num dado não viciado, um resultado que favoreça a suspeita que temos e que seja igual ou mais extremo do que aquele que foi observado pode ocorrer em 22.39% das vezes em que efectuarmos 100 lançamentos do dado. Não sendo este valor muito pequeno, concluimos que as observações realizadas são compatíveis com a hipótese do dado ser não viciado.

Suponhamos agora que nos 100 lançamentos efectuados tínhamos observado 26 vezes a face 6, isto é,  $\hat{p} = 0.26$ . Qual seria a nossa conclusão neste caso? Mais uma vez calculemos a probabilidade de ocorrer um resultado que favoreça a suspeita que temos e que seja igual ou mais extremo do que aquele que foi observado:

$$\begin{aligned} P(\hat{p} \geq 0.26) &= P(\hat{p} \geq 0.255) \\ &= P\left(\frac{\hat{p} - 0.1667}{0.03727} \geq \frac{0.255 - 0.1667}{0.03727}\right) \\ &\approx P(Z \geq 2.369) \\ &= 1 - 0.9911 = 0.0089. \end{aligned}$$

Concluimos assim que num dado não viciado, um resultado que favoreça a suspeita que temos e que seja igual ou mais extremo do que aquele que foi observado só ocorre em 0.89% das vezes que lançamos o dado 100 vezes consecutivas. Sendo este valor muito pequeno, somos levados a concluir que é muito pouco provável que o dado seja não viciado.

No exemplo anterior estão todos os ingredientes que podemos encontrar num qualquer problema de testes de hipóteses:

1) Em primeiro lugar, é formulada sobre a população uma hipótese que pretendemos ver testada pois esperamos, ou suspeitamos, que não seja verdadeira. Esta hipótese traduz normalmente uma afirmação de “ausência de efeito” ou “ausência de diferença”. Por oposição a esta hipótese, é formulada uma outra hipótese que suspeitamos ser verdadeira. À primeira hipótese damos o nome de **hipótese nula**, e denota-mo-la por  $H_0$ , enquanto que à segunda chamamos **hipótese alternativa** ou **hipótese experimental**, e denota-mo-la por  $H_a$ . Ambas as hipóteses são formuladas em termos dum parâmetro populacional.

No exemplo anterior elas são dadas por

$$H_0 : p = 1/6 \quad \text{e} \quad H_a : p > 1/6,$$

onde  $p$  representa a probabilidade de ocorrência da face 6 no lançamento do dado.

Um teste de hipóteses surge assim como um **procedimento estatístico que nos permite medir, em termos de probabilidade, a evidência que os dados comportam contra a hipótese nula**. A hipótese alternativa indica-nos quais os valores

do parâmetro que devemos considerar contra a hipótese nula. **Quer uma, quer outra das hipóteses em confronto, deve ser formulada antes de recolhermos os dados que vamos utilizar para efectuar o teste.**

2) Em segundo lugar, para medir a evidência que os dados comportam contra a hipótese nula, lançamos mão da denominada **estatística de teste**, que no exemplo anterior é dada por

$$\frac{\hat{p} - 0.1667}{0.03727}.$$

Esta estatística **mede a compatibilidade entre a hipótese nula e as observações realizadas**. A sua distribuição de probabilidade, ou uma sua aproximação, é usada para calcular a **probabilidade da estatística de teste tomar um valor que favoreça  $H_a$  e que seja igual, ou mais extremo, do que aquele que foi efectivamente observado**. A esta probabilidade chamamos  **$p$ -valor** do teste associado à observação realizada. **Quanto mais pequeno for o  $p$ -valor mais forte é a evidência fornecida pelos dados contra a hipótese nula**. O  $p$ -valor pode ser assim visto como uma quantificação da **credibilidade da hipótese nula** tendo em conta as observações realizadas.

No exemplo anterior, para cada um dos dois conjuntos de observações considerados, obtivemos os  $p$ -valores 0.2239 e 0.0089, respectivamente, sendo este último valor revelador de forte evidência contra a hipótese do dado ser não viciado.

3) Finalmente, além de calcularmos o  $p$ -valor associado a um conjunto de observações, que, como dissemos já, quantifica a credibilidade da hipótese nula à luz das observações realizadas, num teste de hipóteses poderemos pretender decidir por uma das duas hipóteses em confronto:  $H_0$  ou  $H_a$ .

Como vimos no exemplo anterior, a decisão em favor de  $H_0$  acontece quando o  $p$ -valor não é muito pequeno, enquanto que a decisão em favor de  $H_a$  ocorre quando o  $p$ -valor é pequeno. Para transformar esta ideia num verdadeiro procedimento de decisão, é necessário estabelecer à partida um “valor de corte” para o  $p$ -valor. Esse valor de corte é habitualmente denotado pela letra grega  $\alpha$  a que chamamos **nível de significância do teste**. Assim, se  $p$ -valor  $\leq \alpha$ , decidimos em favor de  $H_a$ , e se  $p$ -valor  $> \alpha$ , decidimos em favor de  $H_0$ . Um conjunto de observações ou resultado que conduza à aceitação da hipótese  $H_a$ , é dito **significativo ao nível  $\alpha$** .

Ao escolhermos um teste de nível de significância  $\alpha$ , estamos a dizer que aceitamos a hipótese  $H_a$  se o resultado efectivamente observado, ou outro mais extremo, ocorrer não mais do que em  $100\alpha\%$  das vezes que repetirmos o processo de amostragem, no caso da hipótese  $H_0$  ser verdadeira. **O valor  $\alpha$  pode ser assim interpretado como a probabilidade de incorrectamente rejeitarmos a hipótese nula quando ela é**

**efectivamente verdadeira.** Por exemplo, para  $\alpha = 0.01$ , aceitamos  $H_a$  se o resultado observado, ou outro mais extremo, ocorrer em não mais do que 1% das vezes que repetirmos o processo de amostragem. Quanto mais pequeno for o nível de significância, mais exigentes estamos a ser na evidência que as observações têm que apresentar em favor de  $H_a$ , ou equivalentemente, contra  $H_0$ .

Se no exemplo anterior tomarmos  $\alpha = 0.01$ , isto quer dizer que o  $p$ -valor 0.2239 conduz à aceitação de  $H_0$  enquanto que o  $p$ -valor 0.0089 conduz à aceitação de  $H_a$ . Decisões análogas tomaríamos para  $\alpha = 0.05$ . No entanto, para  $\alpha = 0.005$ , ambos os resultados conduziam à aceitação da hipótese  $H_0$ .

Tal como fizemos para os intervalos de confiança, os testes de hipóteses para proporções e médias que estudaremos neste capítulo serão apresentados para observações independentes de determinada variável aleatória. Questões relacionadas com observações que não satisfaçam de forma estrita estas condições, ou com a robustez das estatísticas em que basearemos tais testes, foram por nós já abordadas no final do §8.2 e mantêm-se válidas no contexto presente.

## 9.2 Testes de hipóteses para proporções

Generalizemos o que fizemos no parágrafo anterior ao caso duma qualquer experiência binomial em que efectuamos  $n$  observações e pretendemos testar as hipóteses

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{contra} \quad H_a : p > p_0 \quad (9.2.1)$$

onde  $p$  é a probabilidade de sucesso e  $p_0$  é um valor conhecido e fixo à partida.

Tal como atrás, o teste deverá ser baseado na proporção amostral  $\hat{p}$ , cuja distribuição de probabilidade é, sendo a hipótese nula verdadeira, aproximadamente normal com média

$$\mu = p_0$$

e desvio-padrão

$$\sigma = \sqrt{p_0(1 - p_0)/n}.$$

Obtemos assim a estatística de teste

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

cuja distribuição de probabilidade é aproximadamente normal standard desde que sejam verificadas as condições  $np_0 \geq 10$  e  $n(1 - p_0) \geq 10$ .

Sendo  $z$  o valor da estatística de teste para a proporção efectivamente observada, podemos usar a variável normal standard  $Z$  para efectuar o cálculo do  $p$ -valor associado

à observação feita, que, como vimos, é dado por

$$P(Z \geq z).$$

De forma análoga se procede para testar as hipóteses

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{contra} \quad H_a : p < p_0 \quad (9.2.2)$$

ou

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{contra} \quad H_a : p \neq p_0. \quad (9.2.3)$$

A única diferença relativamente ao caso anterior, está no cálculo do  $p$ -valor uma vez que, para as hipóteses anteriores, os valores do parâmetro  $p$  que são favoráveis a  $H_a$  são, no caso (9.2.2), os inferiores a  $p_0$ , sendo o  $p$ -valor dado por

$$P(Z \leq z),$$

e no caso (9.2.3), os inferiores ou superiores a  $p_0$ , sendo o  $p$ -valor dado por

$$P(Z \leq -|z|) + P(Z \geq |z|) = 2P(Z \geq |z|).$$

Nos testes anteriores a hipótese nula  $p = p_0$  diz-se **simples** pois diz respeito apenas a um valor do parâmetro. Por oposição, cada uma das hipóteses alternativas consideradas é **composta**. Além disso, as hipóteses alternativas  $H_a : p > p_0$  e  $H_a : p < p_0$  dizem-se **hipóteses alternativas unilaterais**, enquanto que a hipótese  $H_a : p \neq p_0$  diz-se **hipótese alternativa bilateral**.

Há também situações em que interessa considerar testes de **hipótese nula composta unilateral** que poderão ter uma das formas  $H_0 : p \leq p_0$  ou  $H_0 : p \geq p_0$ , tomando as hipóteses alternativas a forma  $H_a : p > p_0$  ou  $H_a : p < p_0$ , respectivamente. Nestes casos procedemos de forma análoga ao que fizemos para os testes das hipóteses (9.2.1) e (9.2.2), respectivamente.

As fórmulas dadas para o cálculo do  $p$ -valor do teste usam a aproximação normal para a distribuição de probabilidade da estatística de teste, sendo, por isso, aproximações do verdadeiro  $p$ -valor do teste. Neste sentido, para que tais aproximações sejam credíveis é essencial que a dimensão da amostra recolhida verifique as condições  $np_0 \geq 10$  e  $n(1 - p_0) \geq 10$ .

**Testes de hipóteses para uma proporção:**

Numa experiência aleatória binomial de parâmetros  $n$  e  $p$ , para testar a hipótese  $H_0 : p = p_0$  (resp.  $H_0 : p \leq p_0$ ,  $H_0 : p \geq p_0$ ), use as observações para calcular

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}},$$

e, de acordo com a hipótese alternativa  $H_a$  em causa, calcule a aproximação para o  $p$ -valor respectivo dado por uma das fórmulas seguintes, onde  $Z$  tem uma distribuição normal  $N(0, 1)$ :

- $H_a : p > p_0$ ,  $P(Z \geq z)$ ;
- $H_a : p < p_0$ ,  $P(Z \leq z)$ ;
- $H_a : p \neq p_0$ ,  $2P(Z \geq |z|)$ .

**Exemplo 9.2.4** No Exemplo 8.1.1 (pág. 201) colocámos a questão de saber se a moeda na qual observámos 45 vezes a faces europeia em 50 lançamentos da mesma, era ou não equilibrada. Esta questão pode ser formalizada através do teste das hipóteses

$$H_0 : p = 0.5 \quad \text{contra} \quad H_a : p \neq 0.5$$

onde  $p$  denota a probabilidade de ocorrência da face europeia na moeda. (Apesar de podermos assumir que os resultados obtidos indiciam que a face europeia ocorre mais vezes do que seria de esperar numa moeda equilibrada, tal não é tido em conta nas hipóteses formuladas.)

Como referimos atrás, os dados que nos levaram a formular as hipóteses a testar não podem ser usados para efectuar o teste. Neste sentido, suponhamos que efectuamos mais 50 lançamentos da moeda e que desta vez observamos 40 vezes a face europeia.

Seguindo o procedimento descrito atrás, e tendo em conta que  $\hat{p} = 40/50 = 0.8$ , começamos por calcular

$$z = \frac{0.8 - 0.5}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/50}} \approx 4.243$$

sendo o  $p$ -valor associado à observação feita dado aproximadamente por (como  $np_0 = 50 \times 0.5 \geq 10$ , é de esperar que esta aproximação seja boa)

$$\begin{aligned} p\text{-valor} &= 2P(Z \geq |4.243|) \\ &= 2P(Z \geq 4.243) \\ &= 2P(Z < -4.243). \end{aligned}$$

Usando a Tabela A, concluímos que

$$p\text{-valor} < 2 \times 0.0002 = 0.0004,$$

o que revela fortíssimos indícios de que a moeda não é equilibrada. Usando uma aplicação estatística ou uma calculadora adequada, podemos mesmo verificar que o  $p$ -valor anterior é igual a 0.0000221 o que significa que mesmo para um nível de significância tão pequeno como  $\alpha = 0.00005$ , seríamos levados a rejeitar a hipótese nula.

Reparemos que se tivéssemos observado apenas 10 vezes a face europeia, o resultado do teste seria exactamente o mesmo pois neste caso  $\hat{p} = 0.2$  e

$$z = \frac{0.2 - 0.5}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/50}} \approx -4.243,$$

sendo o  $p$ -valor igual ao que calculámos acima:

$$p\text{-valor} = 2P(Z \geq | -4.243|) = 2P(Z \leq -4.243).$$

**Exemplo 9.2.5** Um supermercado compra laranjas a uma cooperativa que afirma que nos frutos que fornece a percentagem de frutos impróprios para consumo não excede 6%. Tendo em conta os últimos lotes de laranjas fornecidos pela cooperativa, o gerente do supermercado suspeita que a percentagem de frutos impróprios para consumo excede 6%, e deseja testar as hipóteses

$$H_0 : p \leq 0.06 \quad \text{contra} \quad H_a : p > 0.06$$

onde  $p$  representa a verdadeira proporção de frutos impróprios para consumo que a cooperativa fornece, a partir do lote de laranjas que acabou de receber. Escolhe ainda para nível de significância do teste  $\alpha = 0.05$ . Se o teste conduzir à aceitação de  $H_a$ , o gerente reclamará junto da cooperativa.

Sabendo que é importante que a condição  $np_0 = n \times 0.06 \geq 10$  seja verificada, recolheu-se, por um método aleatório, uma amostra de tamanho 200 do lote em causa. Verificou-se que 15 laranjas estavam impróprias para consumo, ou seja,  $\hat{p} = 15/200 = 0.075$ . Assim, como

$$z = \frac{0.075 - 0.06}{\sqrt{0.06(1 - 0.06)/200}} \approx 0.893,$$

o  $p$ -valor associado à observação feita é dado aproximadamente por (como  $np_0 \geq 10$ , é de esperar que esta aproximação seja boa)

$$P(Z \geq 0.893) = P(Z \leq -0.893) = 0.1859 > \alpha = 0.05.$$

Significa isto que valores tão ou mais extremos do que os que observámos ocorrem em mais de 5% das possíveis repetições do processo de amostragem no caso de  $H_0$  ser

verdadeira. A proporção observada de laranjas impróprias para consumo não pode, por isso, ser considerada significativa ao nível  $\alpha = 0.05$ . A este nível de significância não há assim evidência de que as suspeitas do gerente do supermercado tenham fundamento.

Para terminar reparemos os  $p$ -valores anteriores, não nos dão apenas a possibilidade de decidir por uma das duas hipóteses em confronto. Além disso, e principalmente, eles permitem-nos obter uma quantificação da evidência que as observações realizadas nos dão contra a hipótese nula. Esta situação é particularmente clara no primeiro dos exemplos anteriores. Atendendo ao  $p$ -valor calculado, sabemos que, se a hipótese nula fosse verdadeira, valores tão ou mais extremos do que os observados ocorreriam em menos de 0.000001% das vezes em que efectuássemos 50 lançamentos da moeda. Temos assim uma fortíssima evidência contra a hipótese da moeda ser equilibrada.

### 9.3 Testes de hipóteses para médias

O método apresentado nos parágrafos anteriores para testar uma hipótese sobre uma proporção, pode ser adaptado à construção de testes para a hipótese  $H_0 : \mu = \mu_0$  (resp.  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ,  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ) a partir de  $n$  observações independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , que vamos interpretar como sendo realizações duma variável aleatória  $X$  com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ . Tal como fizemos para os intervalos de confiança, vamos distinguir as situações em que conhecemos, ou não, o desvio-padrão  $\sigma$  da população.

No caso em que o **desvio-padrão  $\sigma$  é conhecido**, é natural basear o teste da hipótese  $H_0 : \mu = \mu_0$  na estatística

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

que, sob a hipótese nula, sabemos ter uma distribuição normal standard quando as observações são normais, e ser aproximadamente normal se as observações não são normais e  $n$  é grande.

Por analogia com o que fizemos no parágrafo anterior, somos conduzidos ao procedimento descrito no quadro seguinte para testar uma hipótese sobre uma média duma população no caso do desvio-padrão populacional ser conhecido.

Quando o **desvio-padrão  $\sigma$  é desconhecido**, é natural basear o teste da hipótese  $H_0 : \mu = \mu_0$  na estatística

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

que, sob a hipótese nula, sabemos ter uma distribuição  $t(n - 1)$  de Student quando as observações são normais, e ser aproximadamente normal se as observações não são

**Testes de hipóteses para uma média com  $\sigma$  conhecido:**

Para testar a hipótese  $H_0 : \mu = \mu_0$  (resp.  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ,  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ), a partir de  $n$  observações independentes com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$  conhecido, calcule

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

e, de acordo com a hipótese alternativa  $H_a$  em causa, o  $p$ -valor respectivo é dado por uma das fórmulas seguintes, onde  $Z$  tem uma distribuição normal  $N(0, 1)$ :

- $H_a : \mu > \mu_0$ ,  $P(Z \geq z)$ ;
- $H_a : \mu < \mu_0$ ,  $P(Z \leq z)$ ;
- $H_a : \mu \neq \mu_0$ ,  $2P(Z \geq |z|)$ .

Estes  $p$ -valores são exactos se as observações são normais, e são aproximados nos outros casos quando é  $n$  grande.

normais e  $n$  é grande. Como a distribuição  $t(n - 1)$  de Student é também aproximadamente normal standard quando  $n$  é grande, o procedimento seguinte permite testar uma hipótese sobre uma média duma população no caso do desvio-padrão populacional ser desconhecido.

**Testes de hipóteses para uma média com  $\sigma$  desconhecido:**

Para testar a hipótese  $H_0 : \mu = \mu_0$  (resp.  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ,  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ), a partir de  $n$  observações independentes com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$  desconhecido, calcule

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

e, de acordo com a hipótese alternativa  $H_a$  em causa, o  $p$ -valor respectivo é dado por uma das fórmulas seguintes, onde  $T$  tem uma distribuição  $t(n - 1)$  de Student:

- $H_a : \mu > \mu_0$ ,  $P(T \geq t)$ ;
- $H_a : \mu < \mu_0$ ,  $P(T \leq t)$ ;
- $H_a : \mu \neq \mu_0$ ,  $2P(T \geq |t|)$ .

Estes  $p$ -valores são exactos se as observações são normais, e são aproximados nos outros casos quando é  $n$  grande.



Atendendo ao teorema do limite central, verifica-se que os  $p$ -valores anteriores são **robustos contra a não verificação da hipótese de normalidade** quando o tamanho da amostra satisfaz  $n \geq 30$ . Para amostras com  $15 \leq n < 30$ , os  $p$ -valores podem ser usados a não ser que haja observações discordantes ou a distribuição das observações seja fortemente assimétrica. Para amostras de dimensão  $n < 15$  os  $p$ -valores devem ser usados apenas quando os dados são aproximadamente normais e não haja observações discordantes.

**Exemplo 9.3.1** A partir dos dados sobre pesos (em gramas) de pacotes de açúcar empacotados por uma máquina, antes e depois desta ter sido calibrada, descritos no Exemplo 8.4.4, testemos, ao nível 0.01, a hipótese do peso médio dos pacotes de açúcar ser de

$$H_0 : \mu = 1000 \quad \text{contra a hipótese} \quad H_a : \mu \neq 1000.$$

Para os pesos dos pacotes antes da calibragem da máquina temos

$$t = \frac{1010.06 - 1000}{19.99/\sqrt{1130}} \approx 16.92$$

com  $p$ -valor de

$$2P(T > |16.917|) = 2P(T > 16.917)$$

onde  $T$  tem uma distribuição de Student  $t(1130 - 1) = t(1129)$ . Usando a Tabela D não podemos calcular a probabilidade anterior. No entanto, podemos dizer que é inferior a  $2 \times 0.001 = 0.002$ , o que significa que rejeitamos a hipótese da máquina estar bem calibrada ao nível 0.01 (e também ao nível 0.002).

Depois de calibrada, temos

$$t = \frac{1000.24 - 1000}{9.57/\sqrt{1130}} \approx 0.84,$$

sendo o  $p$ -valor dado por

$$2P(T > |0.843|) = 2P(T > 0.843) > 2 \times 0.1 = 0.2,$$

o conduz à aceitação, ao nível 0.01, da hipótese da máquina estar calibrada.

Estes testes podem ser feitos a partir do SPSS. No quadro seguinte, são dados os valores das estatísticas de teste, os graus de liberdade a considerar e os  $p$ -valores:

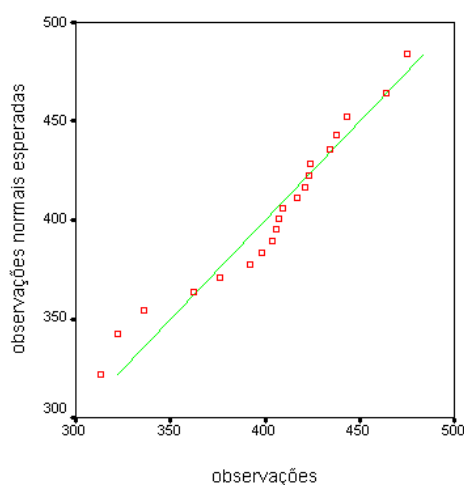
	Test Value = 1000		
	t	df	Sig. (2-tailed)
antes	16,920	1129	,000
depois	,828	1129	,408



Atendendo a que um tal  $p$ -valor é o dobro do  $p$ -valor dum teste de hipótese alternativa unilateral, obtemos facilmente o  $p$ -valor para o nosso caso

$$P(T > 4.45) = 0.0002749/2 = 0.00013745.$$

O gráfico de quantis normais seguinte revela desvios à hipótese de normalidade. Em particular, vimos no Exemplo 1.3.13 (pág. 45) que a distribuição apresenta uma assimetria negativa havendo ainda uma observação discordante.



Por estas razões e atendendo a que a dimensão da amostra é apenas de 20, qualquer conclusão baseada no  $p$ -valor anterior não é fidedigna. Este problema poderia ter sido ultrapassado considerando uma amostra de dimensão mais elevada.

## 9.4 Teste de igualdade de duas proporções

Neste parágrafo estudamos o problema da comparação de proporções relativas a dois grupos de indivíduos a que chamamos população 1 e população 2. Representemos por  $p_1$  e  $p_2$ , a proporção de indivíduos de cada uma das populações que possui determinada característica em estudo. Suponhamos que efectuamos  $n_1$  observações independentes da população 1, e que da população 2 efectuamos  $n_2$  observações independentes. A partir destas duas amostras de dimensões  $n_1$  e  $n_2$ , que admitimos ainda serem entre si independentes, pretendemos comparar as proporções  $p_1$  e  $p_2$ , ou mais precisamente, estamos interessados no teste da hipótese

$$H_0 : p_1 = p_2.$$

Denotando por  $\hat{p}_1$  e por  $\hat{p}_2$  as proporções de indivíduos de cada uma das amostras com a característica em estudo, será natural basearmos o teste da hipótese anterior na

diferença

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$$

que sabemos possuir, para  $n$  grande, uma distribuição aproximadamente normal com média

$$\mu = p_1 - p_2$$

e cuja variância é, atendendo à independência das estatísticas  $\hat{p}_1$  e  $\hat{p}_2$ , igual à soma das variâncias de  $\hat{p}_1$  e  $\hat{p}_2$ :

$$\sigma^2 = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}.$$

Sendo a hipótese nula verdadeira, isto é,  $p_1 = p_2 = p$ , onde  $p$  é a proporção de indivíduos com a característica em estudo em ambas as populações, a média anterior é nula

$$\mu = p - p = 0,$$

e a variância anterior pode ser escrita na forma

$$\sigma^2 = p(1-p) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Uma forma simples de estimar a variância anterior é estimar  $p$  a partir da proporção  $\hat{p}$  de indivíduos nas duas amostras que possuem a característica em estudo:

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}, \quad (9.4.1)$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são o número de sucessos em cada uma das amostras.

Concluimos assim, que, sendo  $H_0$  verdadeira, a estatística

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

é aproximadamente normal standard. Esta será a estatística de teste que usaremos para testar a hipótese da igualdade das duas proporções:

**Teste de comparação de duas proporções:**

Para testar a hipótese  $H_0 : p_1 = p_2$  (resp.  $H_0 : p_1 \leq p_2$ ,  $H_0 : p_1 \geq p_2$ ), use as observações para calcular

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}},$$

onde  $\hat{p}$  é dado por (9.4.1), e, de acordo com a hipótese alternativa  $H_a$  em causa, calcule a aproximação para o  $p$ -valor respectivo dado por uma das fórmulas seguintes, onde  $Z$  tem uma distribuição normal  $N(0, 1)$ :

- $H_a : p_1 > p_2$ ,  $P(Z \geq z)$ ;
- $H_a : p_1 < p_2$ ,  $P(Z \leq z)$ ;
- $H_a : p_1 \neq p_2$ ,  $2P(Z \geq |z|)$ .

Para que as aproximações dadas para os  $p$ -valores do teste anterior sejam credíveis, é essencial que em cada amostra haja pelo menos cinco sucessos e cinco insucessos.

**Exemplo 9.4.2** Numa sondagem publicada pelo semanário *Expresso*, em 28 de Fevereiro de 2004, sobre o posicionamento político dos portugueses, nas áreas metropolitanas de Lisboa e do Porto foram recolhidas amostras aleatórias simples com base na lista telefónica, de dimensões 278 e 145, respectivamente, tendo-se obtido os seguintes resultados:

	Lisboa	Porto
Esquerda	147	71
Direita	103	58
Nenhum	28	16
Total	278	145

Será que com base nos resultados anteriores podemos concluir que a percentagem de eleitores de direita e de esquerda são significativamente diferentes em Lisboa e no Porto?

Começemos por testar, ao nível de significância 0.05, a hipótese da proporção de eleitores de esquerda ser a mesma em Lisboa (população 1) e no Porto (população 2). Por outras palavras, denotando por  $p_1$  e  $p_2$ , respectivamente, tais proporções,

pretendemos testar

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{contra} \quad H_a : p_1 \neq p_2.$$

Temos

$$\hat{p} = \frac{147 + 71}{278 + 145} \approx 0.5154$$

e

$$z = \frac{0.5288 - 0.4897}{\sqrt{0.5154(1 - 0.5154) \left(\frac{1}{278} + \frac{1}{145}\right)}} \approx 0.764.$$

O  $p$ -valor associado a esta observação é

$$2P(Z > |0.764|) = 2 \times 0.2224 = 0.4448,$$

o que não é significativo ao nível 0.05.

Para os eleitores de direita, temos

$$\hat{p} = \frac{103 + 58}{278 + 145} \approx 0.3806$$

e

$$z = \frac{0.3705 - 0.4}{\sqrt{0.3806(1 - 0.3806) \left(\frac{1}{278} + \frac{1}{145}\right)}} \approx -0.593.$$

O  $p$ -valor associado a esta observação é

$$2P(Z > |-0.593|) = 2 \times 0.2766 = 0.5532,$$

o que também não é significativo ao nível 0.05.

**Exemplo 9.4.3** No Exemplo 5.3.5 vimos que a probabilidade  $p_1$  de ocorrer a soma 9 no lançamento de três dados equilibrados é menor do que a probabilidade  $p_2$  de ocorrer a soma 10. No quadro seguinte indicam-se as frequências absolutas das somas 9 e 10 em 100, 1000, 10000 e 20000 lançamentos de 3 dados equilibrados. Para garantir a independência entre as duas proporções amostrais, foram simuladas duas séries de 20000 lançamentos.

soma \ $n$	100	1000	10000	20000
9	9	128	1166	2287
10	10	126	1239	2493

Vejamos para que valores de  $n$  mostram os resultados anteriores evidência contra a hipótese de igualdade das duas probabilidades, e em favor da hipótese da probabilidade  $p_1$  ser menor que  $p_2$ . Para cada um dos valores anteriores, calculemos os  $p$ -valores relativos ao teste da hipótese

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{contra} \quad H_1 : p_1 < p_2.$$

Para  $n = 100$  temos

$$\hat{p} = \frac{9 + 10}{100 + 100} = 0.095$$

e

$$z = \frac{0.09 - 0.10}{\sqrt{0.095(1 - 0.095) \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} \approx -0.241.$$

O  $p$ -valor é dado por

$$P(Z < -0.241) = 0.4048,$$

o não revela evidência contra a hipótese nula.

Para  $n = 1000$  é claro que a evidência revelada será ainda menor do que a obtida para  $n = 100$ . Para  $n = 10000$  temos

$$\hat{p} = \frac{1166 + 1239}{10000 + 10000} = 0.12025$$

e

$$z = \frac{0.1166 - 0.1239}{\sqrt{0.12025(1 - 0.12025) \left(\frac{1}{10000} + \frac{1}{10000}\right)}} \approx -1.587.$$

O  $p$ -valor é dado por

$$P(Z < -1.587) = 0.056,$$

o que revela evidência mais forte contra a hipótese nula.

Para  $n = 20000$  temos

$$\hat{p} = \frac{2287 + 2493}{20000 + 20000} = 0.1195$$

e

$$z = \frac{0.2287 - 0.2493}{\sqrt{0.1195(1 - 0.1195) \left(\frac{1}{20000} + \frac{1}{20000}\right)}} \approx -6.351$$

Usando a Tabela A, podemos afirmar que o  $p$ -valor, que é dado por  $P(Z < -6.351)$ , é inferior a 0.0002, o que revela ainda maior evidência contra a hipótese nula. Pode no entanto verificar-se que

$$P(Z < -6.351) = 1.0696 \times 10^{-10},$$

o que demonstra uma fortíssima evidência contra a hipótese nula.

## 9.5 Teste de igualdade de duas médias

Neste parágrafo estudamos o problema da comparação das médias relativas a dois grupos de indivíduos a que chamamos população 1 e população 2. Representaremos por  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , as médias de cada uma das populações. A partir de duas amostras independentes de dimensões  $n_1$  e  $n_2$ , respectivamente, recolhidas de cada uma das populações, pretendemos testar a hipótese

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2.$$

Denotando por  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  as médias relativas a cada uma das amostras, será natural testar a hipótese anterior com base na estatística

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2,$$

que, atendendo à independência das duas amostras, é, para  $n_1$  e  $n_2$  grandes, aproximadamente normal com média

$$\mu = \mu_1 - \mu_2$$

e com variância

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}, \quad (9.5.1)$$

onde  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  são as variâncias das populações 1 e 2, respectivamente.

Sendo a hipótese nula verdadeira, isto é,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , onde  $\mu_0$  é a média comum às duas populações, a estatística anterior tem média zero e a estatística

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

é aproximadamente normal standard.

Sendo conhecidas as variâncias das duas populações, o resultado anterior permite testar a hipótese  $H_0$  de forma análoga ao que fizemos nos parágrafos anteriores. No entanto, tais quantidades não são, em geral, conhecidas. Nesse caso, será natural tomar para estatística de teste

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

que se obtém da anterior substituindo as variâncias desconhecidas pelas variâncias amostrais relativas a cada uma das amostras.

Mesmo no caso em que **as duas populações são normalmente distribuídas**, esta estatística não possui uma distribuição de Student. No entanto, sendo as duas



populações normais, é possível aproximar a distribuição amostral da variável anterior por uma distribuição de Student  $t(k)$  onde o número  $k$  de graus de liberdade, que pode não ser um número inteiro, é calculado a partir das observações realizadas sendo dado por

$$k = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}. \quad (9.5.2)$$

Este facto permite obter o teste seguinte de **comparação de médias de duas populações normais**:

**Teste de comparação de duas médias:**

Para testar a hipótese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  (resp.  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ ,  $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ ), de igualdade das médias de duas populações normais, use as observações para calcular

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

e, de acordo com a hipótese alternativa  $H_a$  em causa, calcule a aproximação para o  $p$ -valor respectivo dado por uma das fórmulas seguintes, onde  $T$  tem uma distribuição de Student  $t(k)$  com  $k$  dado pela fórmula (9.5.2):

- $H_a : \mu_1 > \mu_2$ ,  $P(T \geq t)$ ;
- $H_a : \mu_1 < \mu_2$ ,  $P(T \leq t)$ ;
- $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ ,  $2P(T \geq |t|)$ .

Como a fórmula anterior para o cálculo de  $k$  é difícil de usar sem o auxílio dum computador ou duma calculadora programável, vamos na prática tomar para  $k$  o menor dos valores de  $n_1 - 1$  e  $n_2 - 1$ . Os  $p$ -valores calculados com esta regra prática são maiores que os dados acima, obtendo-se assim menor evidência contra a hipótese nula do que aquela que se obteria tomando  $k$  dado pela fórmula (9.5.2).

**No caso das duas populações serem normais** e das duas **variâncias**  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  **serem iguais**, apesar de desconhecidas, é possível construir uma estatística de teste que possua uma distribuição de Student. Se  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_0^2$ , a variância (9.5.1) escreve-se

na forma,

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

onde  $\sigma_0^2$ , que é a variância comum às duas populações, pode ser estimada combinando as variâncias amostrais  $s_1^2$  e  $s_2^2$  da forma seguinte

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Nestas condições verifica-se que, sendo a hipótese nula verdadeira, a estatística

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

possui uma distribuição de Student,  $t(n_1 + n_2 - 2)$ , o que dá origem ao seguinte teste.

**Teste de comparação de duas médias (variâncias iguais):**

Para testar a hipótese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  (resp.  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ ,  $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ ), de igualdade das médias de duas populações normais com variâncias iguais mas desconhecidas, use as observações para calcular

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

e, de acordo com a hipótese alternativa  $H_a$  em causa, o  $p$ -valor respectivo é dado por uma das fórmulas seguintes, onde  $T$  tem uma distribuição de Student  $t(n_1 + n_2 - 2)$ :

- $H_a : \mu_1 > \mu_2$ ,  $P(T \geq t)$ ;
- $H_a : \mu_1 < \mu_2$ ,  $P(T \leq t)$ ;
- $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ ,  $2P(T \geq |t|)$ .

Se as **populações não são normais** mas os tamanhos das amostras são iguais, isto é,  $n_1 = n_2$ , ou aproximadamente iguais, verifica-se que **os testes anteriores são robustos contra a não verificação da hipótese de normalidade**. Se as duas populações têm formas semelhantes tal acontece deste que as amostras tenham dimensões pelo menos iguais a 5. Quando as duas populações têm formas distintas, é necessário usar amostras de dimensões mais elevadas. Neste caso usamos as regras dadas em §9.3 com  $n_1 + n_2$  no lugar de  $n$ .

Quando planeamos um estudo deste género é importante que as amostras tenham iguais dimensões, ou pelo menos, tenham dimensões semelhantes. Quando  $n_1 = n_2$  reparemos ainda que as estatísticas de teste anteriores são iguais.

**Exemplo 9.5.3** Retomemos os dados do Exemplo 1.2.3, e comparemos as duas farinhas através da comparação dos aumentos médios dos pesos verificados nos pintos de ambos os grupos. Representando por  $\mu_1$  e  $\mu_2$  os aumentos médios dos pintos do grupo de controlo e do grupo experimental, respectivamente, pretendemos testar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{contra} \quad H_a : \mu_1 < \mu_2$$

(pois esperamos que a nova farinha seja melhor que a antiga).

**Descriptives**

			Statistic
peso	Grupo de controlo	Mean	366,65
		Variance	2577,713
		Std. Deviation	50,771
	Grupo experimental	Mean	403,20
		Variance	1885,221
		Std. Deviation	43,419

Não havendo razões para pensar que as variâncias populacionais respectivas sejam iguais, vamos usar o primeiro dos testes anteriores. Sendo as duas amostras de dimensão 20, temos

$$t = \frac{366.65 - 403.20}{\sqrt{\frac{2577.713}{20} + \frac{1885.221}{20}}} \approx -2.447$$

sendo o  $p$ -valor respectivo dado por

$$P(T \leq -2.447)$$

onde, pela regra prática que decidimos usar,  $T$  tem uma distribuição de Student  $t(20 - 1) = t(19)$ . Usando a tabela da distribuição de Student e a simetria da distribuição obtemos

$$P(T \leq -2.447) = P(T \geq 2.447) < 0.02,$$

sendo o resultado obtido significativo ao nível 0.02.

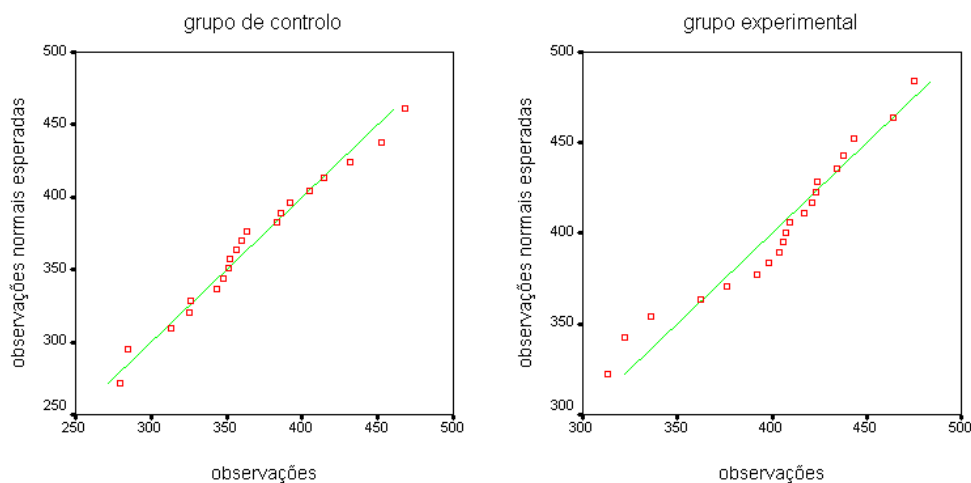
Como podemos constatar do quadro seguinte, no cálculo do  $p$ -valor o computador usa a distribuição de Student  $t(37.107)$ , onde o número de graus de liberdade é dado pela fórmula (9.5.2). Vemos também que num teste de hipótese alternativa bilateral, o  $p$ -valor é igual a 0.01927, sendo, no nosso caso, o  $p$ -valor é igual a  $0.01927/2 = 0.009635$ , o que, como já referimos, revela maior evidência contra a hipótese nula do que a dada através da regra prática que utilizamos para calcular os  $p$ -valores.

Independent Samples Test

		t-test for Equality of Means		
		t	df	Sig. (2-tailed)
peso	Equal variances assumed	-2,447	38	,01915
	Equal variances not assumed	-2,447	37,107	,01927

Reparemos que se pudéssemos admitir que as variâncias populacionais eram iguais, a aplicação do segundo dos testes anteriores conduziria ao mesmo valor para a estatística de teste (pois as dimensões das duas amostras são iguais), apenas se alterando o número de graus de liberdade da distribuição de Student, que passaria a  $20 + 20 - 2 = 38$ .

Finalmente notemos que apesar dos gráficos seguintes revelarem desvios relativamente à hipótese de normalidade, em particular o do grupo experimental, como as dimensões das duas amostras são iguais, os  $p$ -valores calculados são fidedignos.



**Exemplo 9.5.4** Os gráficos de extremos-e-quartis apresentados no Exemplo 1.3.15 (pág. 46), vieram em apoio da ideia, formulada *a priori*, de que o tratamento de jovens anoréxicas descrito no Exemplo 0.2.1 (pág. 3), poderia ser mais eficaz em internamento domiciliário do que hospitalar. Pretendendo confirmar, ou não, esta ideia, propomos comparar as médias das diferenças de pesos (final-inicial) de ambos os grupos. Denotando por  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente, as médias das diferenças de pesos das jovens em internamento hospitalar e domiciliário, pretendemos testar a hipótese

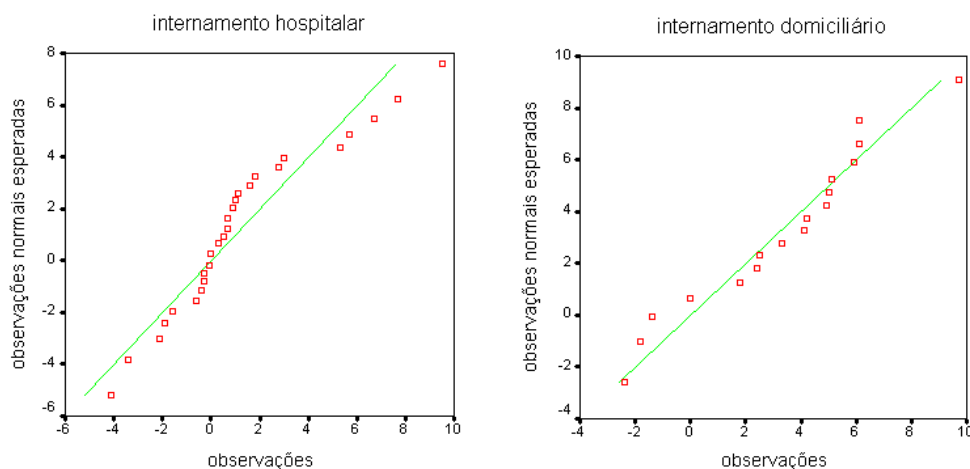
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2.$$

Resumos numéricos dos resultados obtidos são apresentados no quadro seguinte:

## Descriptives

			Statistic
depois -antes	Int. hosp.	Mean	1,214
		Variance	9,979
		Std. Deviation	3,159
Trat. domic.		Mean	3,265
		Variance	10,544
		Std. Deviation	3,247

Apesar de nada sabermos sobre a forma como as jovens foram divididas pelos dois grupos de tratamento, vamos admitir que a afectação a cada um dos grupo foi feita por métodos aleatórios. Tendo em conta o que dissemos atrás, teria sido melhor planejar a experiência de modo que as dimensões dos dois grupos fossem semelhantes. Tal não acontece neste caso, o que pode implicar menor precisão no cálculo dos  $p$ -valores. Esta observação é reforçada pelos gráficos seguintes que revelam desvios relativamente à hipótese de normalidade. Recordemos que já tínhamos visto que a distribuição das diferenças dos pesos para as jovens em internamento hospitalar era positivamente assimétrica.



Sendo de 17 e 29 as dimensões das amostras consideradas em tratamento domiciliário e hospitalar, respectivamente, do quadro anterior obtemos,

$$t = \frac{1.214 - 3.265}{\sqrt{\frac{9.979}{29} + \frac{10.544}{17}}} \approx -2.089$$

sendo o  $p$ -valor respectivo dado por

$$P(T \leq -2.089) = P(T \geq 2.089)$$

onde, pela regra prática que decidimos usar,  $T$  tem uma distribuição de Student  $t(17 - 1) = t(16)$ . Usando a tabela da distribuição de Student e a simetria da distribuição obtemos

$$P(T \geq 2.089) < 0.05,$$

sendo o resultado obtido significativo ao nível 0.05.

Usando o SPSS obtemos

Independent Samples Test			
	t-test for Equality of Means		
	t	df	Sig. (2-tailed)
Equal variances assumed	-2,104	44	,04114
Equal variances not assumed	-2,089	32,893	,04457

o que significa que o  $p$ -valor para o teste de hipótese alternativa unilateral é  $0.045/2 = 0.0225$ . Atendendo às observações anteriores sobre a precisão do  $p$ -valor calculado, devemos ser cautelosos na aceitação destes resultados como indicador claro de que o tratamento tem melhores resultados em regime domiciliário.

Havendo razões para admitir que as variâncias populacionais são iguais, a aplicação do teste respectivo conduz a um valor para a estatística de teste diferente do anterior, pois neste caso as amostras recolhidas em ambos os grupos têm dimensões diferentes, mas os  $p$ -valores associados são semelhantes.

## 9.6 Comparação de médias em amostras emparelhadas

A situação mais simples de comparação de duas médias ocorre quando as duas **amostras são emparelhadas**. Recordando o que já dissemos no parágrafo 4.2, esta situação ocorre, por exemplo, na comparação de dois tratamentos, quando é possível aplicar ambos os tratamentos num mesmo indivíduo ou em dois indivíduos que sejam semelhantes relativamente a variáveis influentes na variável resposta. No primeiro caso, e quando possível, os dois tratamentos são aplicados ao indivíduo por ordem aleatória, enquanto que no segundo caso os indivíduos emparelhados são afectos a um ou a outro dos grupos de forma aleatória.

Sendo as duas amostras emparelhadas, não podemos considerá-las independentes, o que implica que também não são necessariamente independentes as médias amostrais  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  relativas a cada uma das amostras. A hipótese de independência destas duas médias amostrais foi, no parágrafo anterior, essencial na avaliação da variância da

estatística  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ . Não podendo usar essa hipótese, cai por terra a técnica que usámos para deduzir um teste para a hipótese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ .

Para contornar este problema, vamos a partir de cada uma das amostras obtidas  $x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}$  e  $x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}$ , construir um novo conjunto de dados  $z_1, z_2, \dots, z_n$  com que vamos trabalhar:

amostra 1	amostra 2	diferença
$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	$z_1 = x_{1,1} - x_{2,1}$
$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	$z_2 = x_{1,2} - x_{2,2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{1,n}$	$x_{2,n}$	$z_n = x_{1,n} - x_{2,n}$

Uma vez que testar a hipótese de igualdade das médias  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ , é equivalente a testar a hipótese  $\mu = 0$ , onde  $\mu$  é interpretada como a média da população de onde os novos dados  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , foram recolhidos, vamos usar o teste de Student para uma média, que estudámos no §9.5, para testar a hipótese de igualdade de médias. Sendo o desvio-padrão amostral desconhecido, esse teste é baseado na estatística

$$\frac{\bar{z}}{s/\sqrt{n}}$$

onde  $\bar{z}$  e  $s$  representam a média e o desvio-padrão amostrais relativos aos dados  $z_1, \dots, z_n$ .

#### Teste de comparação de médias em amostras emparelhadas:

Para testar a hipótese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  (resp.  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ ,  $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ ), de igualdade das médias a partir de amostras emparelhadas, use as observações para calcular

$$t = \frac{\bar{z}}{s/\sqrt{n}},$$

e, de acordo com a hipótese alternativa  $H_a$  em causa, o  $p$ -valor respectivo é dado por uma das fórmulas seguintes, onde  $T$  tem uma distribuição de Student  $t(n-1)$ :

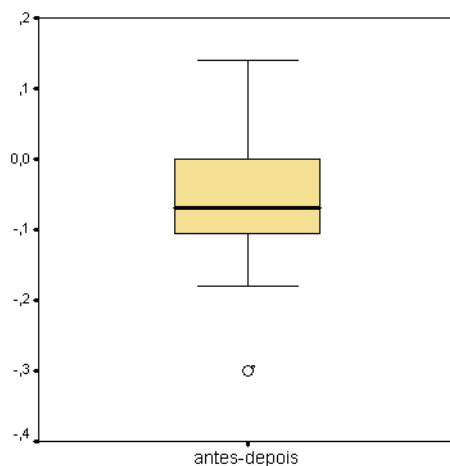
- $H_a : \mu_1 > \mu_2$ ,  $P(T \geq t)$ ;
- $H_a : \mu_1 < \mu_2$ ,  $P(T \leq t)$ ;
- $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ ,  $2P(T \geq |t|)$ .

Estes  $p$ -valores são exactos se dados  $z_1, \dots, z_n$  são normais, e são aproximados nos outros casos quando é  $n$  grande.

No caso dos dados  $z_1, \dots, z_n$  não serem normais, as fórmulas anteriores para o cálculo dos  $p$ -valores devem ser utilizadas com cuidado. Para o efeito devem ser seguidas as recomendações feitas no §9.5 a propósito do teste de Student para uma média com variância desconhecida.

**Exemplo 9.6.1** Uma empresa farmacêutica realizou uma experiência para verificar se se confirmavam as suspeitas de que determinado medicamento aumentava o tempo de reacção a determinados estímulos. Se for esse o caso, essa observação deve ser incluída na literatura que acompanha o medicamento. Para tal, seleccionaram-se ao acaso 36 indivíduos de um grupo mais vasto de indivíduos que tomavam o medicamento, e registou-se o seu tempo de reacção (em centésimos de segundo) a determinado estímulo, antes e depois de tomar o medicamento.

O gráfico de extremos-e-quartis para a diferença dos tempos de reacção depois e antes de tomar o medicamento (antes-depois), revela a presença duma possível observação discordante. Admitamos que tal observação foi confirmada e que decidimos mantê-la como observação válida. Apesar da assimetria positiva da distribuição, reparemos no facto do seu terceiro quartil ser muito próximo de zero, o que constitui um indício forte de que o tempo de reacção aumenta com a utilização do medicamento.



Pretendendo quantificar os indícios anteriores, e verificar se o que foi observado pode ser considerado natural no caso de não haver alteração do tempo de reacção, vamos testar a hipótese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  contra a hipótese  $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ , onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , representam os tempos médios de reacção antes e depois do medicamento ser ministrado. Reparemos que a hipótese alternativa foi fixada tendo em conta o que se esperava que acontecesse, isto é, antes de recolhermos os dados em que baseamos o estudo.

Usando o SPSS obtemos



**Paired Samples Test**

	t	df	Sig. (2-tailed)
antes - depois	-3,508	35	,00126

Sendo o nosso teste um teste de hipótese alternativa unilateral, o  $p$ -valor é dado por  $P(T \leq -3.508) = 0.00126/2 = 0.00063$ , o que revela forte evidência contra a hipótese nula. Atendendo ao tamanho da amostra, e mesmo na presença duma distribuição ligeiramente assimétrica, este  $p$ -valor pode ser considerado fidedigno.

## 9.7 Bibliografia

Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A. (2002). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*, Pioneira.

Moore, D.S. (1985). *Statistics: Concepts and Controversies*, W.H. Freeman and Company.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.

Person, E.S. (1931). The analysis of variance in cases of non-normal variation, *Biometrika*, 23, 114–133.

Pestana, D.D., Velosa, S.F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian.

Posten, H.O. (1978). The robustness of the two-sample t-test over the Pearson system, *J. Statist. Comput. Simul.*, 6, 295–311.

Welch, B.L. (1937). The significance of the difference between two means when the population variances are unequal, *Biometrika*, 29, 350–362.



# Tabelas

**Tabela A:** Distribuição normal standard

**Tabela B:** Números aleatórios

**Tabela C:** Coeficientes binomiais

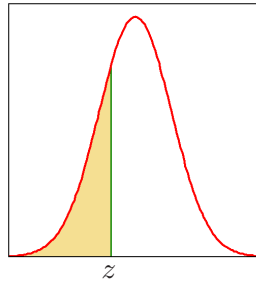
**Tabela D:** Distribuição de Student



**Tabela A**

**Distribuição normal standard**





$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641





## Tabela B

Números aleatórios



Linha / Coluna	01-05	06-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
01	75965	99218	67035	41041	24104	10997	36233	83214	17221	86381
02	41562	08397	03436	82004	52285	36165	31697	99529	33287	96007
03	45963	59075	50719	41803	84602	40840	58654	90498	04876	81772
04	15685	82676	73539	93042	84761	44222	53712	30497	16060	96390
05	68434	58980	14495	62512	33939	93623	78112	67166	18067	63925
06	25819	80242	61173	44151	87993	75768	29300	29053	31549	89404
07	58147	51328	15756	87583	81546	53593	05210	96239	04489	06755
08	14768	31191	49670	76790	60509	51526	14080	92201	45112	28997
09	96757	60822	54662	75406	64175	40440	24609	47929	27493	66916
10	58166	71615	63933	87079	09758	12503	25232	81453	91695	07215
11	22507	41992	32756	04749	03173	68090	62222	06406	64830	54428
12	43260	52862	82414	72112	77661	72514	36852	80576	76928	49051
13	33800	07259	78554	84532	21914	85491	52543	54189	06862	34688
14	91092	47886	04958	21339	34520	75544	44643	88177	88283	11444
15	38990	07661	10674	06314	10238	54909	44733	84050	26184	58190
16	51084	84984	92876	16021	14823	28248	29927	41140	63241	96709
17	82364	79393	11314	15629	69393	49019	99136	60590	81122	63836
18	70509	84995	98511	17277	26948	10194	77428	41330	92843	06123
19	94988	80990	36878	61994	08783	18920	31530	31020	16693	55555
20	05374	78371	40393	32545	55225	58014	61008	47774	81511	95349
21	90513	07118	57057	90568	05056	14259	14966	26448	39535	33689
22	49444	15940	85582	20874	70424	05764	71326	84178	26384	61458
23	92944	35011	59391	97515	43182	54309	20115	55067	22651	74935
24	47965	22062	98300	86583	21586	66169	70777	39936	22453	44903
25	23471	04820	89156	88682	20475	72972	29677	87269	34959	64822
26	15252	83580	71048	82618	65250	21413	72998	17165	24638	52013
27	97822	94436	71870	78895	41015	86797	09591	78612	29316	48528
28	07908	59429	23872	05167	49670	32985	79270	02955	98886	08124
29	86354	48647	12649	65260	75953	56179	65590	04968	68033	09826
30	90286	53370	23683	78875	63477	77650	34053	71618	73242	62049
31	61308	07573	60875	14675	55980	15220	18148	94651	01289	79347
32	90298	30452	47152	05761	96314	29463	15444	37573	81097	39306
33	49370	80926	33287	71529	80090	82012	66194	27410	15333	11563
34	44453	53555	82291	71913	03937	34881	23578	93248	82102	37429
35	83376	01190	22389	17331	22432	76018	90227	83902	92421	44878
36	09053	22934	82405	28819	10263	31719	51967	28912	39489	00891
37	71297	63934	89685	30432	67115	12591	77207	06090	58026	66610
38	87709	31191	36957	76485	54366	02363	45115	04723	95080	85623
39	28764	46683	02814	41923	31840	92665	98375	82141	44436	87789
40	12106	19976	47485	06811	96639	22701	71381	99186	73322	92974
41	16070	00380	45273	47256	93035	22829	23631	74102	25753	19035
42	73876	40923	94658	82203	42828	13727	39117	85878	27383	17547
43	99071	89561	39140	92680	50789	09663	35333	42208	43757	85953
44	90378	37893	23956	20950	79345	12007	40788	61540	97382	01296
45	37561	17428	16994	75530	62701	01230	96853	96138	95495	97140
46	11391	49272	36911	21734	63012	60975	09638	78895	12204	32516
47	08909	26924	42306	18507	11032	47508	10611	63855	20851	57917
48	62975	12262	18289	34210	84079	13714	57645	16743	95114	05837
49	91109	12383	74149	66530	93604	00094	79689	50199	46360	22786
50	77948	45855	32491	35154	10046	17986	56351	20615	24863	99815

Linha / Coluna	01-05	06-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
51	22537	15514	17052	27398	91277	67749	27280	99540	96802	03942
52	83310	17791	61989	98953	05986	29913	29660	77846	91890	88884
53	29928	64755	17583	65140	84264	25213	73376	13088	60628	08423
54	50877	20251	62599	10329	18080	89931	38116	94610	88347	36868
55	78776	76660	70892	48619	79704	54030	81858	53510	58047	29690
56	57037	49152	24300	26387	43648	47706	86380	13938	15356	37265
57	00965	70251	93732	75668	58483	01138	73970	45070	17391	66623
58	57196	50764	64751	70687	60509	67620	97817	46713	18793	97366
59	13673	63126	12393	13085	30310	71717	32000	46359	97136	44053
60	68400	57138	97197	23459	35659	30445	80430	48861	76895	51906
61	93269	19963	44497	43530	70659	21021	71597	41747	08248	99152
62	22397	22834	00559	30104	81305	10535	86715	54747	14770	70081
63	57297	70834	31013	67741	46613	78477	53472	25309	74086	44318
64	56417	88636	48086	30161	04512	15647	50301	18081	72070	60186
65	28070	39504	35466	58566	73870	84102	82090	02962	40886	44590
66	16494	58869	04113	21528	86864	51900	02742	19006	90011	43396
67	28214	77667	67041	26126	72784	92832	45067	54411	28823	04917
68	69047	43927	26233	08740	86969	26328	19713	46748	46569	87851
69	84880	70702	52223	57922	86933	82078	26204	37508	86009	45648
70	92486	87894	61191	52903	89989	93567	35083	66055	52761	92383
71	77276	16962	70778	04419	06183	37576	84301	92799	06973	78720
72	73691	92859	53484	58737	63351	73955	92861	96481	33572	03076
73	73019	18213	71657	75413	65723	92699	37349	25747	12878	65417
74	77259	54224	16250	17682	39427	38270	95720	78590	91616	73431
75	66118	94712	71753	82132	22394	06749	90512	40712	99364	75788
76	91030	53637	62824	06478	77713	28996	78781	83546	21913	41989
77	76657	07596	26505	78823	55457	79978	85450	26875	59200	78860
78	22667	34721	51706	72260	81002	08095	01778	50222	48318	09125
79	10611	82091	59226	18730	08839	64886	49711	90399	54887	59532
80	63147	01199	74955	04544	49937	69622	98503	21531	41536	04158
81	50743	41214	40391	62315	46690	30456	30605	05736	17747	91023
82	56926	06641	37298	70453	07182	97390	75677	27492	52072	85320
83	63882	07947	01368	09558	80188	46379	43222	53057	75801	71126
84	01719	56593	54786	93098	77358	52065	76647	60319	77345	04803
85	67103	05601	27792	55297	26450	96587	95505	80051	28997	15244
86	06042	14963	65815	40656	88477	19243	64079	38435	89071	62237
87	81528	33868	23330	36980	46053	11634	31694	53839	65208	33531
88	68863	27581	92361	71454	42072	91644	80367	68416	61807	08854
89	39647	93857	34860	52904	57547	35620	05060	76352	18605	75766
90	21476	21183	28925	99125	44404	97974	60508	23941	26929	42864
91	40891	39927	39790	52346	47240	19205	75654	88471	11181	24358
92	90624	63384	95051	53091	21240	36471	36298	66205	79174	32842
93	96321	36783	91011	88818	39746	27902	20852	99977	26838	02683
94	41326	05496	62657	95792	42935	73742	18441	04654	22697	49318
95	66060	53338	64608	81356	88947	79601	56753	71614	48918	80915
96	69354	12483	53039	31102	55047	92794	35471	98436	79082	01312
97	67772	46425	96143	33176	85593	89510	78855	00253	74998	22139
98	82541	93144	22308	80805	28917	83007	99054	14729	25255	03594
99	01302	09619	40846	36009	92417	92141	65396	60521	47231	86797
100	79911	70395	56185	74627	87400	59738	40842	92321	98806	37009

## Tabela C

Coeficientes binomiais  $C_k^n$





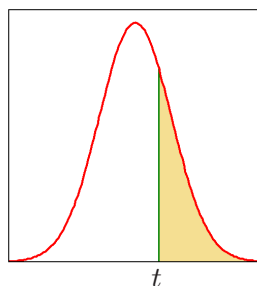




**Tabela D**

**Distribuição de Student**





$k \backslash \text{área}$	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.376	3.078	6.314	12.706	15.895	31.821	63.657	318.309
2	1.061	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	22.327
3	0.978	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	10.215
4	0.941	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	7.173
5	0.920	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	5.893
6	0.906	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	5.208
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.785
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	4.501
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	4.297
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	4.144
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	4.025
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.930
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.852
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.787
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.733
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.686
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.646
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.610
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.579
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.552
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.527
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.505
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.485
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.467
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.450
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.435
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.421
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.408
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.396
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.385
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	3.307
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	3.261
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	3.232
70	0.847	1.294	1.667	1.994	2.093	2.381	2.648	3.211
80	0.846	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	3.195
90	0.846	1.291	1.662	1.987	2.084	2.368	2.632	3.183
100	0.845	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	3.174
150	0.844	1.287	1.655	1.976	2.072	2.351	2.609	3.145
200	0.843	1.285	1.653	1.972	2.067	2.345	2.601	3.131
500	0.842	1.283	1.648	1.965	2.059	2.334	2.586	3.107
1000	0.842	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	3.098
$z$	0.842	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090



# Bibliografia Geral

- Abraham, B., Ledolter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*, Wiley.
- Agresti, A., Coull, A. (1998). Approximate are better than “exact” for interval estimation of binomial proportions, *The American Statistician*, 52, 119–126.
- Albert, J.H. (2003). College students’ conceptions of probability, *The American Statistician*, 57, 37–45.
- Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A. (2002). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*, Pioneira.
- Blume, J.D., Royall, R.M. (2003). Illustrating the law of large numbers, *The American Statistician*, 57, 51–55.
- Brown, L.D., Cai, T.T., DasGupta, A. (2001). Interval estimation for binomial proportion, *Statistical Science*, 16, 101–133.
- Ferreira, I., Gonçalves, V.P. (1996). *Métodos Quantitativos*, Texto Editora.
- Gomes, M.I., Barão, M.I. (1999). *Controlo Estatístico de Qualidade*, SPE.
- Graça Martins, M.E., Cerveira, A.G. (1999). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*, Universidade Aberta.
- Levy, P. (1999). *Sampling of populations: methods and applications*, Wiley.
- Martins, M.E.G., Cerveira, A.G. (2000). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*, Universidade Aberta.
- McPherson, G. (1990). *Statistics in scientific investigation: its basis, application, and interpretation*, Springer.
- Moore, D.S. (1985). *Statistics: Concepts and Controversies*, W.H. Freeman and Company.

Moore, D.S., McCabe, G.P. (2003). *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H. Freeman and Company.

Murteira, B.J.F. (1993). *Análise Exploratória de Dados. Estatística Descritiva*, McGraw-Hill.

Person, E.S. (1931). The analysis of variance in cases of non-normal variation, *Biometrika*, 23, 114–133.

Pestana, D.D., Velosa, S.F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian.

Posten, H.O. (1978). The robustness of the two-sample t-test over the Pearson system, *J. Statist. Comput. Simul.*, 6, 295–311.

Vicente, P., Reis, E., Ferrão, F. (1996). *Sondagens: a amostragem como factor decisivo de qualidade*, Edições Sílabo.

Welch, B.L. (1937). The significance of the difference between two means when the population variances are unequal, *Biometrika*, 29, 350–362.

# Índice Remissivo

- acontecimento(s)
    - aleatório, 126
    - certo, 128
    - contrário, 129
    - elementar, 128
    - impossível, 128
    - incompatíveis, 130
    - independentes, 145
  - amostra(s), 2, 11, 115
    - amplitude da, 40
    - amplitude interquartil, 42
    - de resposta voluntária, 115
    - desvio-padrão da, 38
    - dimensão da, 11, 115
    - emparelhadas, 114, 246
    - mínimo da, 40
    - máximo da, 40
    - média da, 30
    - mediana da, 33
    - não-enviesada, 115
    - percentis da, 41
    - quartis da, 40
    - sem-viés, 115
    - variância da, 38
  - amostragem, 4
    - aleatória simples, 116
    - de resposta voluntária, 118
    - em várias etapas, 116
    - estratificada, 116
    - orientada, 118
    - por grupos, 117
    - por quotas, 118
  - amplitude, 40
    - interquartil, 42
  - associação
    - entre duas variáveis, 75
    - linear, 78
    - negativa, 77
    - positiva, 76
  - carta de controlo, 64
  - censo, 2
  - coeficiente
    - binomial, 177
    - de correlação linear, 83
      - propriedades do, 84
    - de correlação linear
      - cálculo do, 85
    - de determinação, 90
  - correção de continuidade, 188
  - cronograma, 99
  - curva densidade, 56
    - de probabilidade, 160
    - de Student, 213
  - desvio-padrão duma, 59
  - média duma, 59
  - normal centrada e reduzida, 65
  - normal standard, 65
- desvio-padrão, 38
    - cálculo do, 39

## distribuição

amostral, 119, 174  
 assimétrica, 28  
 assimétrica negativa, 28  
 assimétrica positiva, 28  
 bimodal, 29  
 binomial, 176  
 centro da, 26  
 cinco números de resumo da, 44  
 da média amostral, 194  
 da proporção amostral, 174  
 de probabilidade, 152  
 de Student, 212  
   tabela da, 267  
 dispersão da, 26  
 duma variável, 14  
 forma da, 27  
 moda da, 29  
 normal, 60  
 normal centrada e reduzida, 65  
 normal standard, 64  
   tabela da, 255  
 simétrica, 27  
 unimodal, 29  
 variabilidade da, 26

efectivo, 14

erros de arredondamento, 16

espaço dos resultados, 127

Estatística, 3

estatística, 115

de teste, 226

estimação pontual, 202

estrato, 116

estudo por amostragem, 114

planeamento dum, 115

experiência, 110

aleatorização numa, 112

controlada, 111

planeamento da, 4, 111

experiência aleatória, 125

binomial, 175

factor, 110

níveis dum, 110

factor de escala, 25

frequência, 14

absoluta, 14

dum acontecimento, 133

percentual, 14, 15

relativa, 14

dum acontecimento, 133

tabela de, 14

gráfico

circular, 15

de barras, 15

de caule-e-folhas, 18, 20

de dispersão, 75

de extremos-e-quartis, 44, 45

de quantis normais, 70

de resíduos, 92

sequencial, 63, 99

grupos experimentais, 112

hipótese

alternativa, 225

bilateral, 228

composta, 228

experimental, 225

nula, 225

simples, 228

unilateral, 228

histograma

de frequências, 22

de frequências percentuais, 25

de frequências relativas, 25



- de probabilidade, 152
- normalizado, 24
- indivíduo, 11
- intervalo de confiança, 6, 202
  - aproximado, 211
  - exacto, 211
  - grau de confiança dum, 204
  - nível dum, 204
  - para uma média, 211, 214
  - para uma proporção
    - intervalo de Agresti-Coull, 208
    - intervalo de Wald, 206
    - intervalo de Wilson, 207
  - probabilidade de cobertura dum, 204
- lei dos grandes números, 135, 168
- mínimo, 40
- máximo, 40
- média, 30
  - amostral, 161
    - desvio-padrão da, 193
    - distribuição da, 194
    - média da, 193
  - cálculo da, 31
  - duma variável contínua, 163
  - duma variável discreta, 161
  - duma variável normal, 163
  - propriedades da, 164, 165
- margem de erro, 202
- mediana, 33
  - cálculo da, 33
- medida
  - de dispersão, 38
  - de localização, 30
  - de tendência central, 30
  - de variabilidade, 38
- moda, 29
- modelo
  - de regressão linear, 92
  - linear, 101
  - probabilístico, 142
- nível
  - de confiança, 204
  - de significância, 226
- observação
  - discordante, 21, 27, 42, 77, 98
  - influyente, 92, 96, 98
  - padronizada, 83
  - standardizada, 83
- $p$ -valor, 226
- parâmetro, 115
- percentil, 41
- população, 2, 115
- probabilidade, 127
  - da intersecção de acontecimentos, 147
  - da reunião de acontecimentos, 143
  - definição frequencista de, 136
  - definição clássica de, 132
  - do acontecimento contrário, 142
  - via curvas densidade, 139
- proporção
  - amostral, 119
- proporção amostral
  - aproximação normal para  $a$ , 185
  - desvio-padrão da, 181
  - distribuição da, 174
  - média da, 181
- quartis, 40
  - cálculo dos, 41
- recenseamento, 2
- recta
  - de regressão, 88, 89, 104

- dos mínimos quadrados, 88
- regra 68-95-99.7, 62, 70
- regressão
  - cúbica, 93
  - linear, 92
  - quadrática, 93
- resíduo, 92
- robustez
  - da média, 32
  - da mediana, 34
- série cronológica, 99
  - sazonalidade duma, 100
  - tendência duma, 100
- série temporal, 99
- tabela
  - da distribuição de Student, 267
  - da distribuição normal standard, 255
  - de coeficientes binomiais, 263
  - de frequências, 14
  - de números aleatórios, 113, 259
- tamanho da amostra
  - na estimação duma média, 220
  - na estimação duma proporção, 218, 219
- teorema do limite central, 195
- teste de hipóteses, 4, 223
  - nível de significância dum, 226
  - $p$ -valor dum, 226
  - para a igualdade de médias, 241, 242, 247
  - para a igualdade de proporções, 236
  - para uma média, 231, 232
  - para uma proporção, 228
- tratamento, 110
- unidade
  - amostral, 117
  - experimental, 110
- final, 117
- indivíduo, 115
- primária, 117
- secundária, 117
- universo da sondagem, 2
- variável, 11
  - dependente, 80, 111
  - distribuição duma, 14
  - explicativa, 80, 110
  - independente, 80, 110
  - normal, 60
    - padronização duma, 69
  - omissa, 112
  - qualitativa, 12
  - quantitativa, 13
  - resposta, 80, 111
- variável aleatória, 151
  - binomial, 176
    - aproximação normal para  $a$ , 185
    - desvio-padrão duma, 180
    - distribuição de probabilidade duma, 177
    - média duma, 180
  - contínua, 158
  - densidade de probabilidade duma, 160
  - discreta, 158
  - distribuição de probabilidade duma, 152
  - normal, 160
    - média duma, 163
    - variância duma, 163
- variância, 38
  - amostral, 161
  - duma variável aleatória discreta, 162
  - duma variável contínua, 163
  - duma variável discreta, 161
  - duma variável normal, 163
  - propriedades da, 164, 166

variabilidade amostral, 119

