

Textos de apoio
de
Topografia

ENGENHARIA GEOGRÁFICA / ENGENHARIA CIVIL
2006/2007

Cidália M. P. Costa Fonte
Manuel António Facas Vicente

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

Índice

1.	Introdução.....	3
2.	Fundamentos de representação cartográfica.....	4
2.1.	Representação Plana da Terra.....	4
2.1.1.	Modelos da forma da Terra.....	4
2.1.2.	Sistemas de coordenadas.....	7
2.1.3.	Projecções cartográficas.....	11
2.2.	Sistemas de referência.....	15
2.2.1.	Data geodésicos.....	15
2.2.2.	Sistemas de projecção cartográfica.....	16
2.3.	Cartografia Nacional.....	19
2.3.1.	Noções gerais sobre cartografia.....	19
2.3.2.	As séries do IGeoE e do IGP.....	21
2.4.	Elementos de Cartometria.....	22
2.4.1.	Determinação de áreas.....	22
2.5.	Infra-estruturas cartográficas.....	25
2.5.1.	A Rede Geodésica.....	25
2.5.2.	Triangulação topográfica.....	26
2.5.3.	Triangulação topográfica com apoio geodésico.....	27
2.5.4.	Triangulação topográfica independente.....	27
3.	Levantamentos topográficos.....	29
3.1.	Introdução.....	29
3.2.	Equipamento Topográfico.....	30
3.2.1.	Teodolitos.....	30
3.2.2.	Distanciómetros Electrónicos.....	31
3.2.3.	Estações Totais.....	31
3.2.4.	Níveis.....	32
3.3.	Medição de ângulos.....	32
3.3.1.	Constituição e funcionamento de um teodolito.....	32
3.3.2.	Condições para a medição de ângulos.....	37
3.4.	Medição de distâncias.....	42
3.4.1.	Medição directa de distâncias.....	43
3.4.2.	Estadimetria.....	47
3.4.3.	Medição electrónica de distâncias.....	51
3.5.	Métodos de determinação de coordenadas.....	54
3.5.1.	Irradiação.....	54
3.5.2.	Triangulação.....	54
3.5.3.	Intersecções.....	55
3.5.4.	Poligonação.....	60
3.6.	Nivelamento.....	66
3.6.1.	Noções de altimetria.....	66
3.6.2.	Curvatura terrestre e refração atmosférica.....	67
3.6.3.	Nivelamento Trigonométrico.....	69
3.6.4.	Nivelamento Geométrico.....	70
3.6.5.	Nivelamento barométrico.....	78
4.	Outros métodos de aquisição de dados topográficos.....	79
4.1.	Sistemas de Posicionamento e Navegação por Satélite.....	79

4.1.1.	Introdução	79
4.1.2.	Sistemas Globais de Navegação por Satélite	79
4.1.3.	O Serviço Internacional GNSS (IGS).....	82
4.2.	Fotogrametria	82
4.2.1.	Aquisição e processamento de fotografias aéreas.....	83
4.2.2.	Escala de uma fotografia aérea	84
4.2.3.	Estereoscopia	85
4.2.4.	Paralaxe estereoscópica	86
4.2.5.	Produtos obtidos a partir de fotografias aéreas	86
4.3.	Detecção Remota	86
4.4.	Sistemas de Varrimento Laser.....	89
5.	Representação Topográfica	91
5.1.	Altimetria.....	91
5.2.	Curvas de nível	91
5.2.1.	Formas fundamentais do relevo.....	92
5.3.	Pontos cotados	94
5.3.1.	Casos em que se utilizam pontos cotados	94
5.4.	Modelos digitais de terreno	95
5.4.1.	Construção de um MDT.....	95
5.4.2.	Exemplos de aplicação dos MDT	96
6.	Aplicações	98

1. Introdução

Designa-se por informação geo-referenciada toda a informação que está associada a uma localização no espaço geográfico, isto é, que se encontra posicionada sobre a superfície da Terra (ou na sua vizinhança imediata). Nas últimas décadas houve grandes desenvolvimentos, tanto nos equipamentos e métodos utilizados para a aquisição de dados geo-referenciados, como nos meios disponíveis para o seu processamento e representação. Assim, este tipo de informação tem vindo a ser cada vez mais utilizado em variadas áreas de actividade.

Apesar do estudo detalhado dos vários aspectos relacionados com a aquisição, tratamento e representação da informação geo-referenciada ser a área de estudo dos Engenheiros Geógrafos, é indispensável que outros profissionais, e em particular os Engenheiros Cívicos, tenham algumas noções básicas sobre como obter e utilizar este tipo de informação, uma vez que ela é indispensável em muitas áreas da sua actividade, como, por exemplo, na concepção de projectos, na implantação e apoio à construção de obras, na auscultação do comportamento de grandes obras de Engenharia, tais como barragens e pontes, em trabalhos de urbanismo e hidráulica, etc.

No presente curso de Topografia apresentam-se os conceitos básicos necessários à utilização de informação geográfica e recolha de dados geo-referenciados. Começa-se, no capítulo 2, por introduzir algumas noções fundamentais para a compreensão da problemática de representação plana da Terra. São apresentados os fundamentos da modelação da forma da Terra, os sistemas de coordenadas utilizados, o conceito de projecção cartográfica e os sistemas de projecção cartográfica mais usados em Portugal. É feita uma apresentação sumária da cartografia nacional e de algumas noções de cartometria, bem como das infra-estruturas cartográficas disponíveis no país.

No Capítulo 3 faz-se o estudo dos métodos clássicos de execução de levantamentos topográficos, onde são apresentados os equipamentos, procedimentos e métodos mais utilizados para a execução de levantamentos planimétricos e altimétricos.

No Capítulo 4, apresentam-se outros métodos de aquisição de dados topográficos, nomeadamente a Fotogrametria, Detecção Remota, Sistemas Globais de Navegação por Satélite e Sistemas de Varrimento Laser. Faz-se uma descrição sumária de cada um deles, indicando-se em que situações são aplicáveis.

Por fim, no Capítulo 5, faz-se referência às várias formas de fazer a representação dos dados e informação topográfica planimétrica e altimétrica.

No final, incluem-se dois anexos. No Anexo 1 faz-se um resumo das principais fórmulas utilizadas no Capítulo 3 e no Anexo 2 são disponibilizados exercícios referentes à execução de levantamentos topográficos clássicos.

2. Fundamentos de representação cartográfica

A representação da superfície da Terra em cartas ou mapas requer, por um lado, o posicionamento de pontos sobre a sua superfície e, por outro lado, a utilização de um método que permita representar a superfície curva da Terra sobre um plano. Assim, a representação plana da Terra implica a escolha de um modelo para a forma da Terra, a utilização de sistemas de coordenadas que permitam posicionar pontos sobre a sua superfície e a adopção de uma projecção cartográfica, que permita fazer a sua representação sobre um plano. O conjunto destas escolhas corresponde à definição de um sistema de referência, normalmente designado por sistema de projecção cartográfica.

2.1. Representação Plana da Terra

2.1.1. Modelos da forma da Terra

O modelo utilizado para representar a forma da Terra varia com a dimensão da zona que se pretende representar e com a exactidão pretendida. Pode considerar-se que a forma da Terra corresponde à sua superfície física, no entanto, esta superfície é extremamente complexa e altera-se continuamente, tanto devido aos deslocamentos de terras que ocorrem sobre a superfície terrestre, como pela influência das forças gravitacionais dos corpos celestes mais próximos, nomeadamente o Sol e a Lua. Outra forma de modelar a forma da Terra consiste em considerar que ela corresponde a uma superfície equipotencial, nomeadamente a superfície correspondente ao nível médio das águas do mar. A esta superfície chama-se *Géóide* e é utilizada em várias situações, mas, como é uma superfície difícil de trabalhar matematicamente, é nalguns casos substituída por um elipsóide de revolução ou uma esfera. Mostraremos ainda que, quando a zona de estudo é pequena, é suficiente considerar a Terra plana.

2.1.1.1. O *Geóide*

Uma das abordagens consideradas para modelar a forma da Terra consiste em considerar que ela corresponde a uma superfície equipotencial. Assim, a forma da Terra é definida com base no campo gravítico terrestre, campo este fundamentalmente resultante da força de atracção newtoniana e da força centrífuga, devida ao movimento de rotação da Terra. A sua superfície, abstraindo das ondulações do terreno, pode ser definida pela superfície do nível médio das águas do mar, suposta prolongada debaixo dos continentes. Esta superfície de nível, chamada *Geóide*, é uma superfície mal conhecida, não definida matematicamente, cujo estudo é do âmbito da Geodesia. A sua forma é calculada utilizando gravímetros, que são aparelhos que medem a aceleração da gravidade. Sabe-se que a forma do geóide é bastante próxima da forma de um elipsóide de revolução achatado, diferindo dela devido à existência de ondulações desigualmente distribuídas, provocadas por uma desigual repartição das massas na crosta terrestre.

Aquelas ondulações são pouco significativas, quando comparadas com as dimensões do geóide, não ultrapassando geralmente algumas dezenas de metros o afastamento vertical entre o geóide e o elipsóide que dele mais se aproxima. Ao ângulo formado pela vertical do lugar (normal ao geóide) e pela normal ao elipsóide (normal) chama-se *desvio da vertical* (Figura 2.1), este ângulo mede a inclinação do geóide relativamente ao elipsóide e o seu valor não ultrapassa normalmente os 10 segundos centesimais. A vertical do lugar, por ser normal às superfícies de nível do geóide, dá a direcção do campo gravítico terrestre e é muito importante em Topografia pois é essa direcção que orienta os instrumentos de medida.

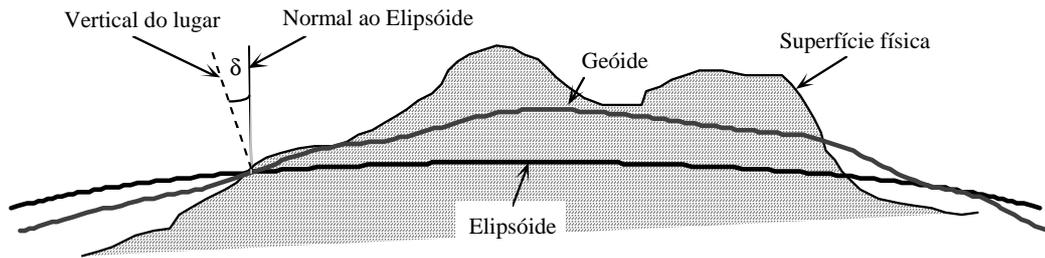


Figura 2.1 - Representação do elipsóide e do geóide numa dada região. O ângulo δ representa o desvio da vertical.

2.1.1.2. O Elipsóide

Dada a complexidade do geóide, é usual utilizar como superfície de referência um elipsóide de revolução.

Um elipsóide de revolução é o sólido gerado pela rotação de uma semi-elipse em torno de um dos seus eixos. Para o caso em estudo a rotação é feita em torno de eixo polar N-S, sendo a e b respectivamente o semi-eixo equatorial e o semi-eixo polar (Figura 2.2).

Vários têm sido os geodetas que, em diferentes partes do globo, se têm dedicado à determinação do comprimento dos semi-eixos do elipsóide que melhor se adapta ao geóide. Estas determinações permitiram concluir que, para diferentes regiões do globo, se obtêm elipsóides diferentes. Por este motivo, a escolha do elipsóide que melhor se adapta à forma da Terra tem de ter em consideração a região que se pretende representar.

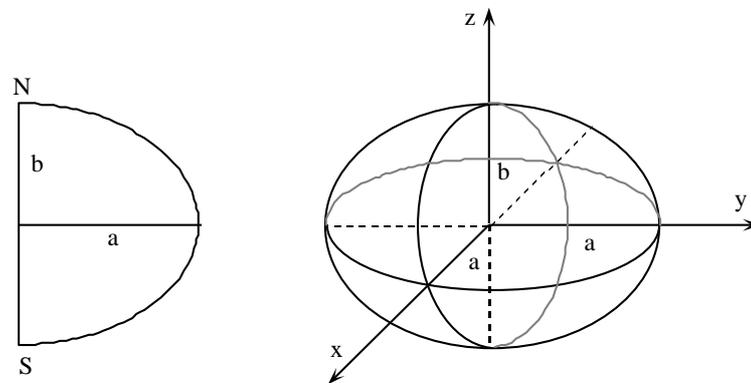


Figura 2.2 - Elipsóide de revolução com semi- eixo maior a e semi-eixo menor b .

Assim, temos, entre outros, os elipsóides de Bessel, Clarke, Hayford, GRS80 e o WGS-84 com as características indicadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Características de vários elipsóides utilizados como superfície de referência para representar a Terra.

Elipsóide	Semi-eixo maior (a)	Semi-eixo menor (b)	achatamento = $\frac{a-b}{a}$
Bessel (1841)	6377397 m	6356079 m	1/299
Clarke (1866)	6378301 m	6356584 m	1/294
Hayford (1909)	6378388 m	6356912 m	1/297
GRS80 (1980)	6378137 m	6356752 m	1/298
WGS84 (1984)	6378137 m	6356752 m	1/298

Em Portugal, foi inicialmente utilizado o elipsóide de Bessel, tendo-se mais recentemente optado pelo de Hayford. O elipsóide de Clarke foi adoptado em França e nos Estados Unidos e o GRS80 é utilizado na América do Norte. O elipsóide WGS-84 é adoptado como elipsóide de referência para as medições feitas com o GPS (Global Positioning System).

Como se pode ver na Tabela 2.1, o achatamento dos elipsóides considerados é muito pequeno, pelo que a forma da Terra se aproxima de uma esfera. Por isso, nos trabalhos em que não se exige grande exactidão, o elipsóide é substituído por uma esfera de raio igual à média dos seus semi-eixos.

2.1.1.3. Modelo plano

Quando se pretende representar uma zona pouco extensa da superfície da Terra é muitas vezes suficiente considerar a Terra como plana, uma vez que a influência da sua curvatura é desprezável. Assim, substitui-se o elipsóide de referência por um plano que lhe é tangente no ponto central da região a representar.

Considerando a Terra como esférica, de centro O e raio médio $R = 6400$ km, seja D a maior das distâncias, sobre a superfície de referência, entre o ponto central A (Figura 2.3) e a fronteira de uma região a representar (ponto B). As projecções ortogonais dos pontos A e B sobre a superfície de referência são respectivamente \underline{a} e \underline{b} , sendo \underline{b}' o ponto de intersecção da recta projectante de B com o plano tangente à superfície de referência no ponto \underline{a} .

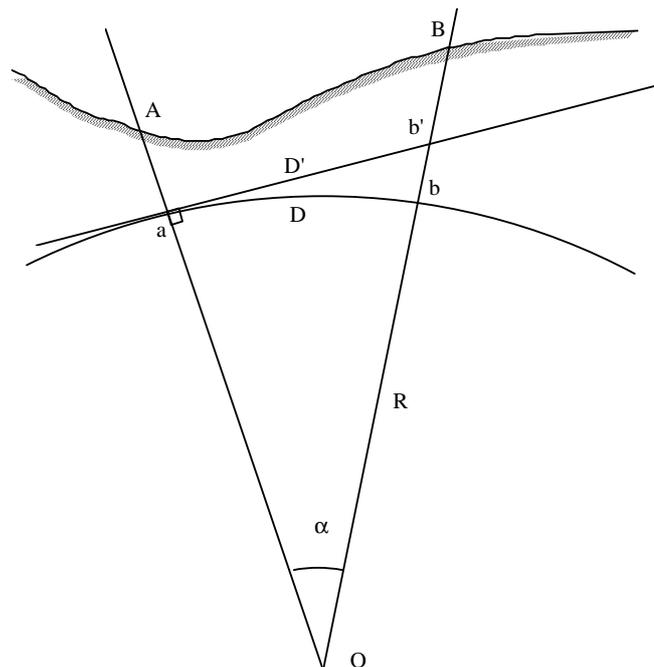


Figura 2.3 – Substituição da superfície curva da Terra por um plano tangente a esta no ponto central da zona a representar.

Determinem-se agora as distâncias D e D' :

$$D = \overline{ab} = R\alpha \quad (\text{com } \alpha \text{ em radianos}) \quad (1)$$

$$D' = \overline{ab'} = R \operatorname{tg}\alpha$$

deste modo,

$$\Delta D = D' - D = R(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)$$

Quando ΔD puder ser considerado nulo, pode-se substituir a superfície de referência (neste caso uma esfera) pelo plano que lhe é tangente no ponto central da zona a representar. Na Tabela 2.2 indica-se o valor de ΔD correspondente a um valor de D respectivamente igual a 5km, 10km, 20km e 30km. Note-se que, para valores de D da ordem dos 20 km, a influência da curvatura da Terra sobre a distância entre dois pontos já é da ordem dos centímetros e para valores de D da ordem dos 30 km é da ordem dos decímetros.

Tabela 2.2 – Cálculo de ΔD em função do valor de D .

$D(km)$	$\alpha(rad)$	$D'(km)$	$\Delta D(km)$	ΔD
5	0,000781	5,0000010	0,0000010	0,0010m = 0,10cm
10	0,001563	10,0000081	0,0000081	0,0081m = 0,81cm
20	0,003125	20,0000651	0,0000651	0,0651m = 6,51cm
30	0,004688	30,0002197	0,0002197	0,2197m = 21,97cm

Como em trabalhos de Topografia não são normalmente consideradas áreas com diâmetros (maior distância entre pontos dessa região) superiores a 6 km (correspondendo a $D \approx 3km$), excepcionalmente 10 km (correspondendo a $D \approx 5km$), os erros cometidos na substituição do elipsóide de referência por um plano que lhe seja tangente no ponto central da região a cartografar são insignificantes.

2.1.2. Sistemas de coordenadas

Podem considerar-se vários sistemas de coordenadas para posicionar pontos à superfície da Terra, entre os quais temos as coordenadas geográficas e as coordenadas rectangulares.

2.1.2.1. Coordenadas Geográficas

As coordenadas geográficas podem referir-se a uma esfera, a um elipsóide ou ao geóide. As coordenadas geográficas quando determinadas sobre o elipsóide são denominadas de **Coordenadas Geodésicas** e quando determinadas sobre o geóide, em virtude de serem determinadas por via astronómica, são denominadas **Coordenadas Astronómicas ou Naturais**.

A **latitude φ** de um ponto é o ângulo formado pela normal à esfera, ao elipsóide, ou ao geóide, nesse ponto e pelo plano do equador (ver Figura 2.4). Conta-se de -90° a $+90^\circ$ a partir do equador, positivamente no hemisfério Norte e negativamente no hemisfério Sul.

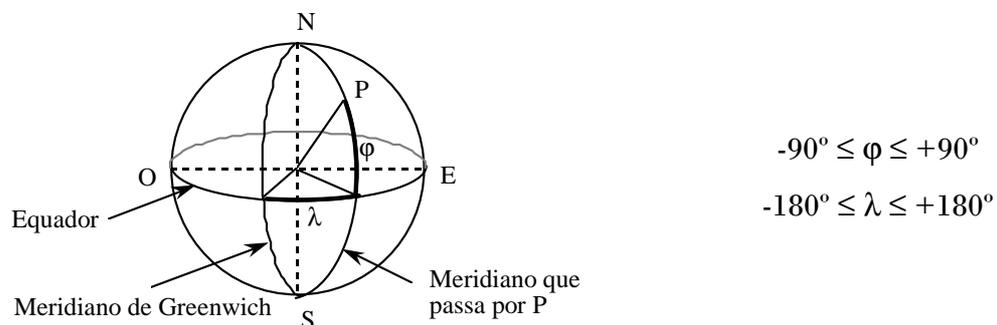


Figura 2.4 - Representação das coordenadas geográficas (latitude φ e longitude λ) de um ponto P.

A **longitude λ** é o ângulo diedro formado pelo plano do meridiano do lugar com o plano do meridiano de referência. Pode tomar valores entre -180° e $+180^\circ$, sendo positiva para Este

do meridiano de referência e negativa para Oeste. Por acordo internacional adoptou-se para meridiano de referência o meridiano do Observatório de Greenwich em Inglaterra.

A posição de qualquer ponto da superfície da Terra fica perfeitamente definida através das suas coordenadas geográficas e da sua altitude relativa à superfície de referência, que no caso desta ser o elipsóide se designa por *altitude geodésica* e no caso de ser o geóide por *altitude ortométrica*.

2.1.2.2. Coordenadas Rectangulares

Ao fazer-se a representação plana da Terra, os lugares à sua superfície podem ser posicionados recorrendo a coordenadas rectangulares. Estas coordenadas são escolhidas de modo que o eixo das ordenadas (designada por meridiana origem ou apenas por meridiana) coincida com o meridiano central da zona a representar e o eixo das abcissas (designada por perpendicular origem ou apenas por perpendicular) seja normal à meridiana origem no ponto próximo do centro da região a representar, designado por *Ponto Central* (ver Figura 2.5). As coordenadas rectangulares são as coordenadas M e P, que correspondem respectivamente à distância do ponto à meridiana e à perpendicular.

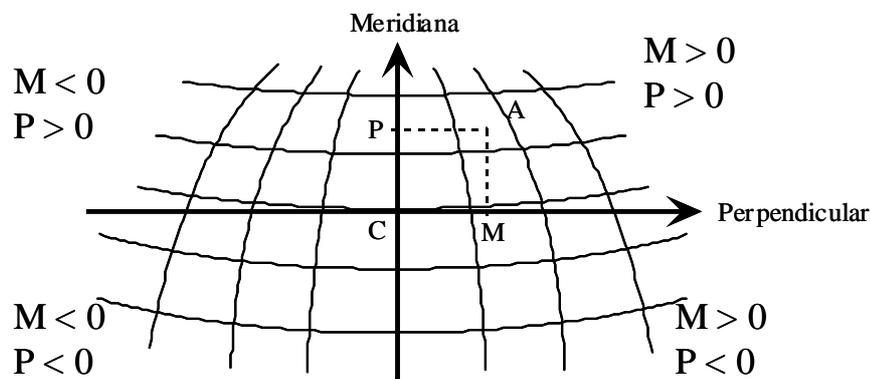


Figura 2.5 - Representação plana de uma região da superfície terrestre. O ponto C é o ponto central. M e P são as coordenadas rectangulares que definem a posição do ponto A, sendo M a distância à meridiana e P a distância à perpendicular.

Uma direcção qualquer [AB] pode ser posicionada relativamente ao sistema de coordenadas rectangulares através do ângulo que forma com a direcção da recta meridiana. Este ângulo chama-se azimuth cartográfico ou *rumo* da direcção [AB], representa-se por (AB) e, tendo vértice no ponto A, conta-se no sentido retrógrado (sentido dos ponteiros do relógio) a partir da direcção definida pela meridiana, que corresponde à direcção do *Norte Cartográfico*, até à direcção definida pelos pontos A e B (Figura 2.6). O rumo de uma direcção varia entre zero e quatrocentos graus.

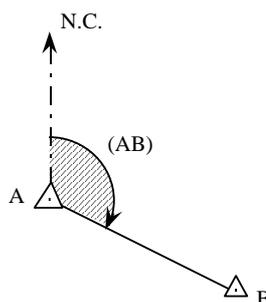


Figura 2.6 - Rumo da direcção definida pelos pontos A e B, que se representa por (AB).

Nota: Os ângulos em Topografia são sempre descritos no sentido retrógrado. Deste modo, duas semi-rectas com a mesma origem, como as semi-rectas \overline{EA} e \overline{EB} representadas na Figura 2.7, definem dois ângulos distintos, o ângulo \widehat{AEB} e o ângulo \widehat{BEA} . Note-se que $\widehat{AEB} + \widehat{BEA} = 400^g$

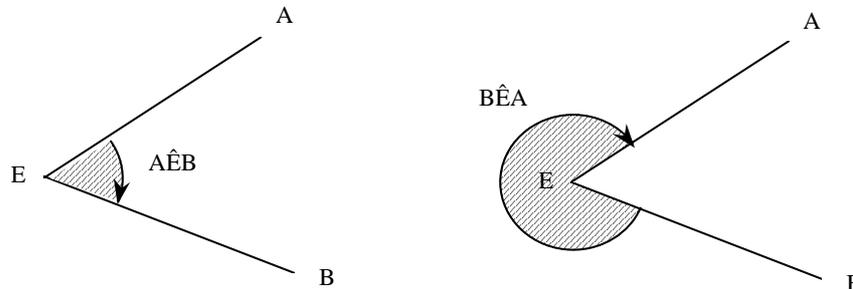


Figura 2.7 - Os ângulos \widehat{AEB} e \widehat{BEA} , descritos no sentido retrógrado, são os ângulos indicados na figura.

Principais problemas com coordenadas rectangulares

I - Transmissão de Rumos

a) Cálculo do Rumo Inverso

Suponhamos que se conhece o rumo da direcção $[AB]$ no sentido de A para B e se pretende conhecer o rumo da mesma direcção, mas agora no sentido de B para A. Ou seja, conhece-se (AB) e pretende-se conhecer (BA) .

Observando a Figura 2.8a) pode-se concluir que:

$$(BA) = (AB) + 200^g$$

Se os pontos A e B estiverem na posição indicada na Figura 2.8b) tem-se que

$$(BA) = (AB) - 200^g$$

Logo,

$$\boxed{(BA) = (AB) \pm 200^g}$$

considerando-se "+" quando $(AB) < 200^g$ e "-" quando $(AB) > 200^g$.

Conhecido: (AB)

Pedido: (BA)

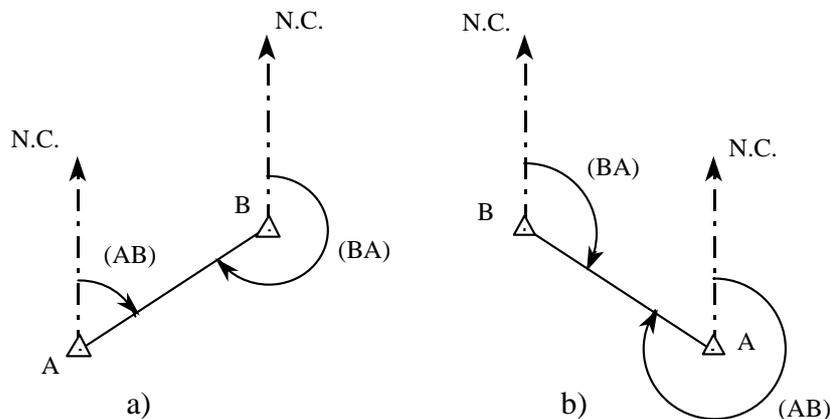


Figura 2.8 a) e b) - Rumo de uma direcção (AB) e rumo inverso (BA) .

b) Transporte de Rumos

Conhece-se o rumo da direcção [AB] e o ângulo $\hat{B}AC$ ou $\hat{C}AB$ ($\hat{B}AC = 400^g - \hat{C}AB$) e pretende-se calcular o rumo da direcção [AC]. Ou seja:

Conhecido: (AB); $\hat{B}AC$ ou $\hat{C}AB$

Pedido: (AC)

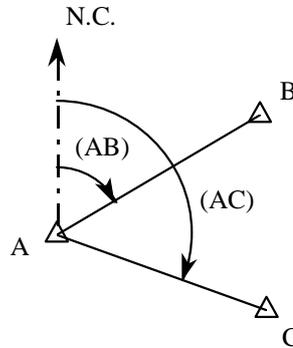


Figura 2.9 - Transporte de rumos.

Observando a Figura 2.9 pode-se concluir que:

$$\boxed{(AC) = (AB) + \hat{B}AC}$$

ou, como $\hat{B}AC = 400 - \hat{C}AB$

$$\boxed{(AC) = (AB) + 400 - \hat{C}AB}$$

2 - Transporte de Coordenadas

O problema de transporte de coordenadas permite determinar as coordenadas de um ponto B a partir das coordenadas de outro ponto A, conhecendo a distância \overline{AB} entre os dois pontos e o rumo da direcção que definem.

Conhecido: M_A ; P_A ; \overline{AB} ; (AB)

Pedido: M_B ; P_B

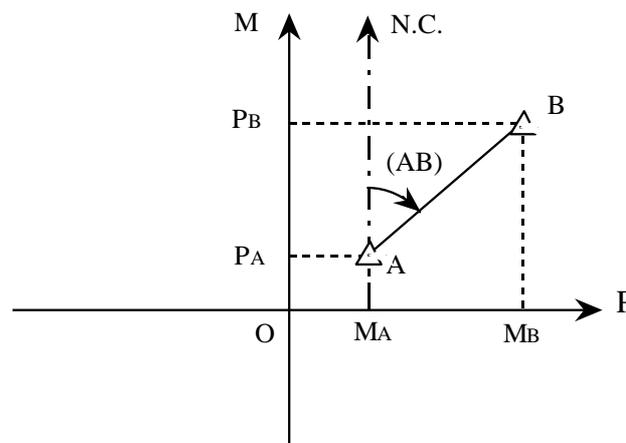


Figura 2.10 - Transporte de coordenadas.

Observando a Figura 2.10 pode-se concluir que:

$$\sin(AB) = \frac{M_B - M_A}{AB} \quad \text{e} \quad \cos(AB) = \frac{P_B - P_A}{AB}$$

deste modo:

$$\boxed{M_B = M_A + \overline{AB} \sin(AB)} \quad \text{e} \quad \boxed{P_B = P_A + \overline{AB} \cos(AB)}$$

3 - Cálculo de Rumos

Pretende-se calcular o rumo de uma direcção definida por dois pontos com coordenadas rectangulares conhecidas.

Conhecido: M_A ; P_A ; M_B ; P_B **Pedido:** (AB)

Observando a Figura 2.10 pode-se concluir que:

$$\boxed{\operatorname{tg}(AB) = \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A}}$$

Expressão que permite determinar o rumo (AB) sem ambiguidade, uma vez que o numerador tem o sinal do seno de (AB) e o denominador o sinal do coseno de (AB).

4 - Cálculo de distâncias

Pretende-se, conhecidas as coordenadas rectangulares de A e B, determinar a distância entre estes pontos.

Conhecido: M_A ; P_A ; M_B ; P_B **Pedido:** \overline{AB}

Observando a Figura 2.10 também se pode concluir que:

$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2}}$$

Ou, calculando o rumo de (AB), pode-se obter \overline{AB} através de uma das expressões seguintes:

$$\overline{AB} = \frac{M_B - M_A}{\sin(AB)} \qquad \overline{AB} = \frac{P_B - P_A}{\cos(AB)}$$

2.1.3. Projecções cartográficas

Quando se pretende representar zonas extensas da superfície terrestre é necessário ter em consideração a sua curvatura, o que dificulta a sua representação sobre uma superfície plana. Como a forma do geóide não é definida matematicamente considera-se, para este efeito, que a Terra tem a forma de um elipsóide de revolução ou de uma esfera. Assim, é necessário adoptar modelos de representação plana do elipsóide ou da esfera, uma vez que estas figuras não são planificáveis. Isto consegue-se recorrendo a projecções, que permitem estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do elipsóide ou esfera, definidos pelas suas coordenadas geográficas, e os pontos do plano, definidos por coordenadas rectangulares. Assim, as projecções cartográficas consistem em transformar as coordenadas geográficas, latitude φ e longitude λ em coordenadas rectangulares M e P . Ou seja, as projecções cartográficas correspondem a funções matemáticas da seguinte forma:

$$M = f_M(\varphi, \lambda)$$

$$P = f_P(\varphi, \lambda)$$

No estudo de algumas projecções cartográficas que se segue, para simplificar o problema, vamos considerar a Terra esférica.

2.1.3.1. Tipos de projecções

As projecções cartográficas são obtidas calculando os valores de M e P correspondentes a cada par de valores φ e λ de pontos dos paralelos e meridianos, usando funções f_M e f_P . Podem distinguir-se dois métodos diferentes de construir uma projecção, que dão origem às:

- 1) projecções geométricas;
- 2) projecções analíticas.

Nas projecções geométricas selecciona-se uma superfície planificável, como por exemplo um plano, um cone ou um cilindro, de modo que intersecte a Terra ou lhe seja tangente. Escolhe-se então um ponto como centro de projecção e consideram-se linhas que unem o centro de projecção com os pontos da superfície da Terra, prolongando essas linhas até que intersectem a superfície do mapa, sendo o ponto obtido sobre este o local onde o ponto da superfície da Terra é representado no mapa. As projecções geométricas podem ser azimutais, cónicas ou cilíndricas.

Projecções azimutais

A projecção cartográfica mais fácil de visualizar é a projecção em que a superfície de projecção é um plano tangente à Terra num ponto. O centro de projecção pode ser considerado em várias localizações, dando origem a projecções diferentes:

- 1) o centro de projecção é o centro da esfera - projecção *gnomónica*;
- 2) o centro de projecção é o ponto P (Figura 2.11b)), de intersecção da esfera com o diâmetro desta que passa pelo ponto de tangência - projecção *estereográfica*;
- 3) o centro de projecção está no infinito, sendo neste caso as linhas de projecção paralelas entre si - projecção *ortográfica*.

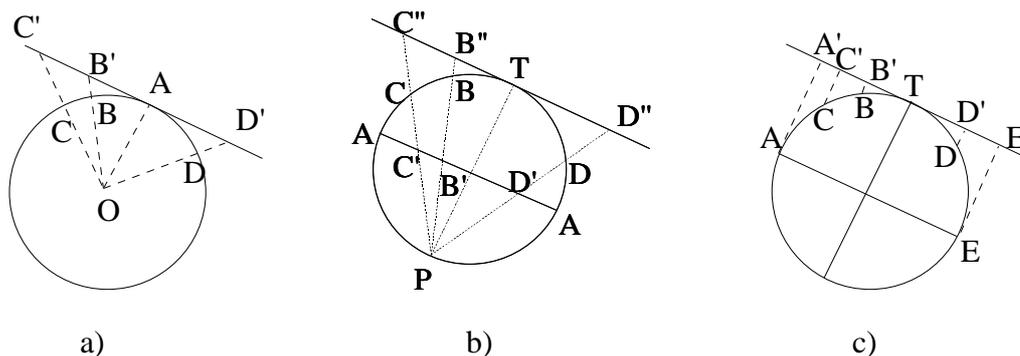


Figura 2.11 - Projecções: a) gnomónica. b) estereográfica. c) ortográfica.

As projecções azimutais podem ainda ser classificadas em:

- *polares ou normais*, quando o ponto de tangência é o pólo
- *equatoriais ou transversas*, quando o ponto de tangência é o equador
- *oblíquas*, quando o ponto de tangência é algures entre o equador e o pólo.

Projecções cónicas e cilíndricas

Ao contrário de uma esfera, tanto um cone como um cilindro são figuras que se podem planificar sem quaisquer distorções, sendo por isso utilizadas em projecções cartográficas. Tal como as projecções azimutais, as projecções cónicas e cilíndricas podem ser classificadas em função da posição do cone ou cilindro em relação à esfera que representa a Terra (ver Tabela 2.3).

Tabela 2.3 – Classificação das projecções cónicas e cilíndricas relativamente à posição do eixo do cone ou do cilindro.

Classificação	Projecções Cónicas	Projecções Cilíndricas
<i>Projecção Normal</i>	o eixo do cone coincide com o eixo polar da esfera	o eixo do cilindro coincide com o eixo polar da esfera
<i>Projecção Transversa</i>	o eixo do cone é perpendicular ao eixo polar da esfera	o eixo do cilindro é perpendicular ao eixo polar da esfera
<i>Projecção Oblíqua</i>	o eixo do cone é inclinado relativamente ao eixo da esfera	o eixo do cilindro é inclinado relativamente ao eixo da esfera

Quando o vértice do cone usado como superfície de projecção está sobre o eixo polar, ao colocar-se o cone tangente à esfera ele fica apoiado sobre um círculo de latitude a que se chama *paralelo standard* (Figura 2.12). À medida que a altura do cone aumenta o *paralelo standard* vai-se aproximando do equador. Finalmente, quando o *paralelo standard* coincide com o equador, as geratrizes do cone tornam-se paralelas e o cone transforma-se num cilindro. Quando a altura do cone diminui, o *paralelo standard* vai-se deslocando para latitudes mais elevadas, e, no caso extremo, o cone transforma-se num plano tangente à esfera no pólo. Deste modo se mostra que as projecções sobre planos (projecções azimutais) e cilindros (projecções cilíndricas) são casos particulares de projecções cónicas.

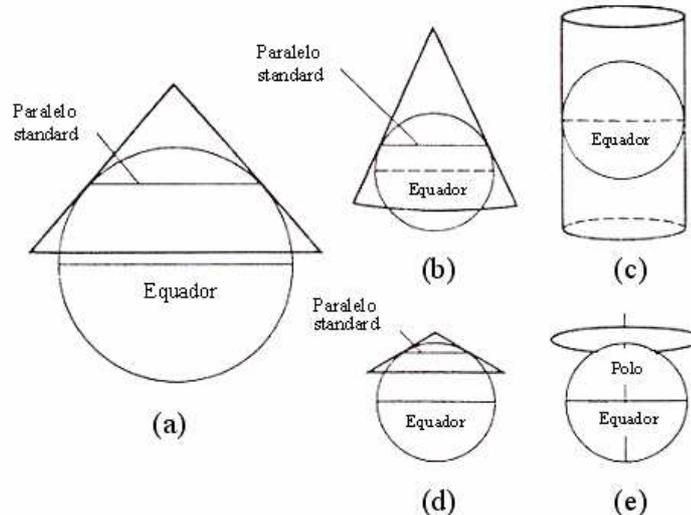


Figura 2.12 - a) Um cone tangente a uma esfera. b) Um cone tangente a uma esfera com o paralelo standard mais próximo do equador. c) Um cilindro tangente a uma esfera no equador. d) Cone com o paralelo standard a uma latitude mais elevada. e) Plano tangente a uma esfera no pólo.

Uma vez que um cone tangente a uma esfera tem um paralelo de altitude comum à esfera, a sua representação no mapa será em verdadeira escala, aumentando as distorções de escala à medida que os pontos estão mais para norte ou sul do paralelo *standard*. Por esta razão, para minimizar as distorções de escala, muitas das projecções cónicas utilizam um cone que intersecta a esfera em dois paralelos *standard*.

Nas projecções analíticas são definidas funções f_M e f_P que permitem calcular os valores de M e P correspondentes a cada par φ, λ . As projecções analíticas podem ser projecções geométricas modificadas de modo a alterar algumas das suas características. Por exemplo, uma projecção analítica que corresponda a uma projecção cónica ou cilíndrica modificada diz-se, respectivamente, uma projecção **pseudo-cónica** ou **pseudo-cilíndrica**.

Idealmente, as projecções cartográficas deveriam satisfazer as seguintes condições:

- 1) todas as distâncias e áreas representadas no mapa deveriam ter uma magnitude relativa correcta;
- 2) todos os azimutes e ângulos deveriam estar correctamente representados no mapa;
- 3) todos os círculos máximos da Terra deveriam aparecer no mapa como linhas rectas;
- 4) as latitudes e longitudes geodésicas dos pontos deveriam aparecer correctos no mapa.

No entanto, não é possível representar exactamente num plano a superfície de uma esfera (ou elipsóide), da mesma forma que não é possível planificar a casca de uma laranja sem a rasgar. Sendo assim, qualquer que seja o método usado para representar sobre um plano uma parte da superfície da Terra, haverá sempre deformações, competindo à Cartografia o seu estudo e a escolha dos sistemas de projecção mais convenientes para cada caso.

Apesar de ser impossível satisfazer todas estas condições num mesmo mapa, podem satisfazer-se algumas delas. Podem-se assim considerar algumas classes de projecções cartográficas:

- 1) Projecções *conformes ou ortomórficas* - dão origem a mapas que representam correctamente os ângulos entre quaisquer pares de pequenas linhas que se intersectem, fazendo com que pequenas áreas apareçam no mapa com a sua forma correcta. Como a escala varia de ponto para ponto a forma de grandes áreas é representada incorrectamente.
- 2) Projecções *equivalentes* - resultam em mapas em que as áreas são representadas nas suas dimensões relativas correctas, embora estas áreas tenham uma forma muito diferente da correcta e os mapas tenham ainda outros defeitos.
- 3) Projecções *equidistantes* - A escala (e portanto as distâncias) são conservadas ao longo de algumas linhas (círculos máximos meridianos ou paralelos).

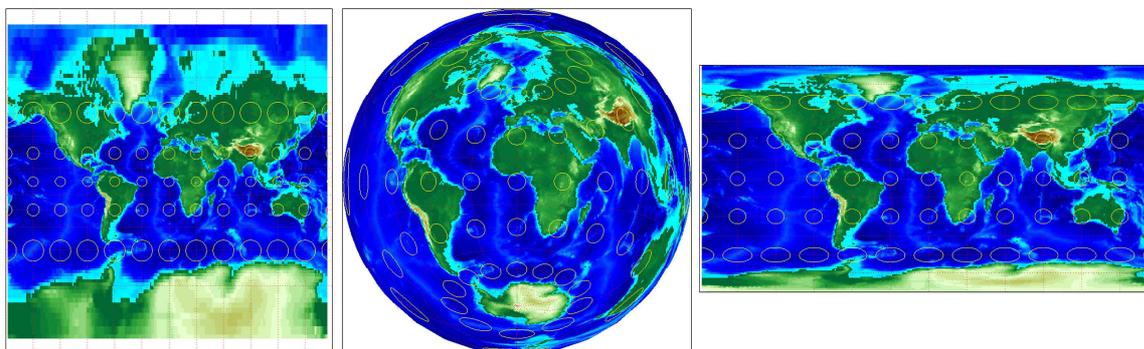


Figura 2.13 – a) Projecção de Mercator (projecção cilíndrica conforme), b) Projecção azimutal equivalente, c) projecção cilíndrica equidistante.

Algumas das projecções cartográficas usadas em Portugal são:

Projecção de Lambert: projecção cónica conforme, com dois paralelos standard (Figura 2.14).

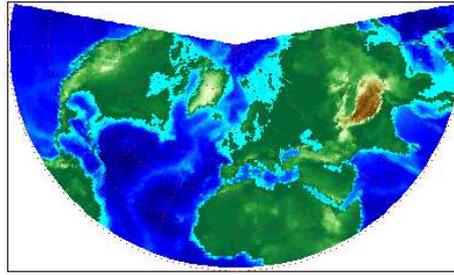


Figura 2.14 – Projeção de Lambert cônica e conforme

Projeção de Bonne: projeção analítica pseudo-cônica equivalente. O cone cartográfico é disposto em posição normal e tangente ao paralelo que passa no Ponto Central.

Projeção de Gauss ou Gauss Krüger (projeção de Mercator transversa quando a superfície de referência é um elipsóide): é uma projeção conforme, sobre um cilindro tangente à Terra no meridiano central (Figura 2.15).

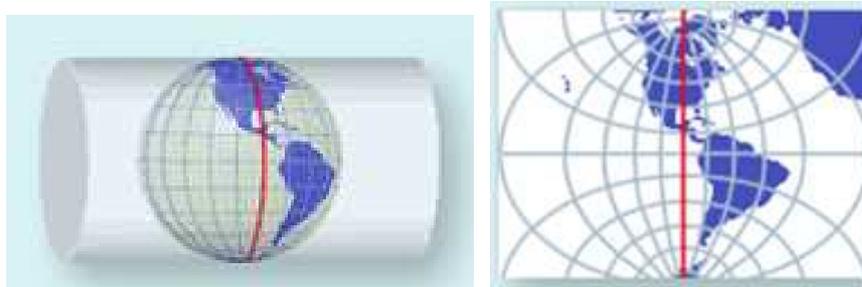


Figura 2.15 – Projeção de Mercator transversa

2.2. Sistemas de referência

2.2.1. Data geodésicos

Um datum (no plural data) é um conjunto de quantidades numéricas ou entidades geométricas que são utilizadas como referência para a definição de outras quantidades. Concretamente, os **data geodésicos** são usados para definir um sistema de coordenadas geográficas e incluem a escolha de um elipsóide de referência e o seu posicionamento relativamente ao globo terrestre. As posições geodésicas elipsoidais (latitudes, longitudes e altitudes geodésicas) e rectangulares dos pontos do terreno são dependentes dos data geodésicos escolhidos.

Os data geodésicos podem ser locais ou globais (Figura 2.16). Um **datum local** é constituído por um elipsóide de referência, posicionado num ponto terrestre de coordenadas astronómicas conhecidas, denominado ponto de fixação. O elipsóide é posicionado nesse ponto de forma que as coordenadas astronómicas do ponto (latitude, longitude, altitude e azimute para outro ponto) coincidam com as coordenadas geodésicas. O ponto de um datum local onde é efectuada a coincidência entre as coordenadas astronómicas e geodésicas designa-se por **ponto astronómico fundamental**. Um **datum global** é constituído por um elipsóide de referência, posicionado de modo a que o seu centro coincida com o centro de massa da Terra e o seu eixo polar coincida com a posição média do eixo de rotação da terra.

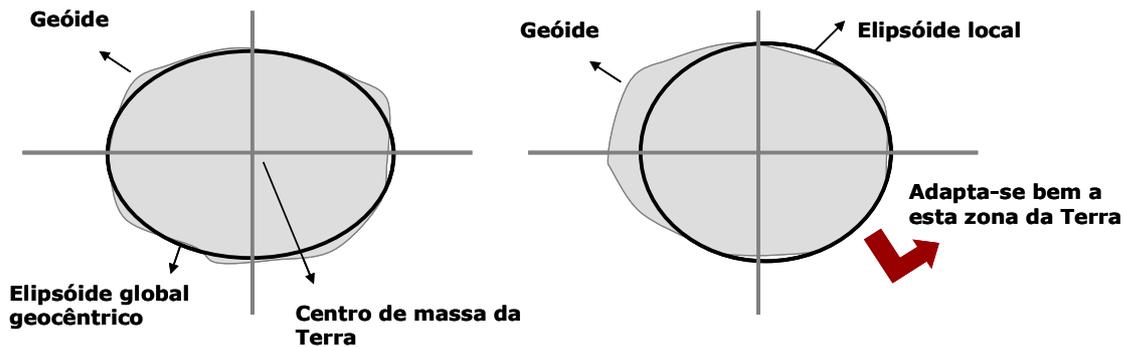


Figura 2.16 – Representação de um elipsóide global e de um elipsóide local.

Caso se pretenda representar a totalidade da superfície terrestre é adoptado um datum global, designando-se o elipsóide associado por elipsóide *geocêntrico*. Note-se que o afastamento vertical entre o geóide e o elipsóide que dele mais se aproxima não ultrapassa normalmente os 70m a 100 m.

Caso se pretenda representar uma pequena zona do globo, como por exemplo um continente ou um país, escolhe-se um datum local, também denominado por astronómico.

2.2.2. Sistemas de projecção cartográfica

Por *sistema de projecção cartográfica* entende-se um conjunto formado por:

- um datum geodésico (inclui a escolha do elipsóide e o ponto de fixação),
- um ponto central (cruzamento da recta meridiana e perpendicular)
- uma origem para as coordenadas rectangulares
- um factor de escala associado ao meridiano central (próximo da unidade) ou a localização das linhas padrão.

De entre os sistemas de projecção cartográfica utilizados em Portugal, salientamos:

Sistema Puissant-Bonne:

As coordenadas geográficas da rede geodésica são calculadas sobre o elipsóide de Puissant, fixado no vértice Lisboa (Castelo de S. Jorge) de coordenadas

$$\varphi = 38^{\circ}42'56.730'', \lambda = -9^{\circ}07'54,806''$$

As correspondentes coordenadas rectangulares são relativas à projecção pseudo-cónica de Bonne, com origem no vértice Lisboa.

Este sistema de projecção foi utilizado na primeira carta topográfica de Portugal executada em moldes científicos modernos, a “Carta Geral do Reyno”, à escala 1:100 000, cujo levantamento decorreu na segunda metade do século XIX.

Sistema Bessel-Bonne :

Nos finais do século XIX foi adoptado o sistema Bessel-Bonne. As coordenadas geográficas da rede geodésica são calculadas sobre o elipsóide de Bessel, com fixação no vértice Lisboa (Castelo de S. Jorge) de coordenadas

$$\varphi = 38^{\circ}42'43.631'', \lambda = -9^{\circ}07'54.862''$$

As correspondentes coordenadas rectangulares são relativas à projecção pseudo-cónica de Bonne, com origem no ponto central.

Os sistemas Hayford-Gauss

No sistema *Hayford-Gauss Antigo* (HGA) as coordenadas geográficas da rede geodésica são calculadas sobre o elipsóide de Hayford, com origem no vértice Lisboa (Castelo de S. Jorge) de coordenadas

$$\varphi = 38^{\circ}42'43.631'', \lambda = -9^{\circ}07'54.862''$$

As correspondentes coordenadas rectangulares são relativas à projecção de Gauss, com origem no Ponto Central, com coordenadas

$$\varphi = 39^{\circ}40', \lambda = -8^{\circ}07'54.862''$$

O sistema *Hayford-Gauss Militar* (HGM), deriva do sistema anterior por uma translação da origem das coordenadas rectangulares para o ponto fictício, situado a S-W do Cabo de S. Vicente e distanciado 200 km para Oeste e 300 km para Sul do Ponto Central e com eixos paralelos aos do Sistema HGA (Figura 2.17). Esta deslocação tem como consequência imediata colocar todo o território de Portugal Continental no primeiro quadrante, o que significa que todos os pontos têm coordenadas militares positivas. Tem-se então que as coordenadas militares M_{HGM} e P_{HGM} são obtidas através de:

$$M_{HGM} = M_{HGA} + 200km, \quad P_{HGM} = P_{HGA} + 300km$$

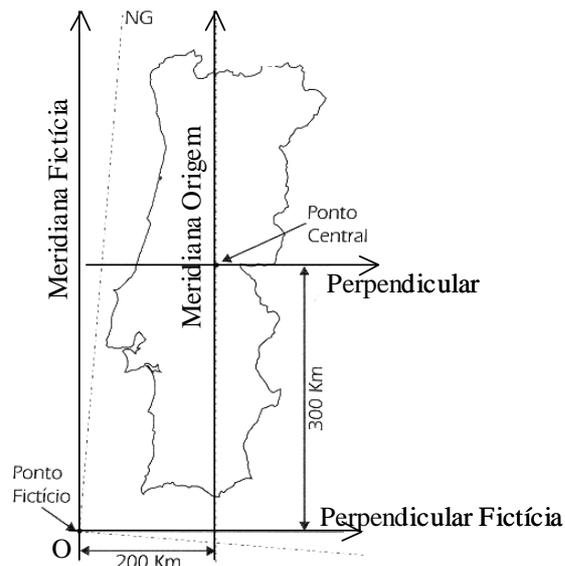


Figura 2.17 – Origem das coordenadas no Sistema Hayford Gauss Militar (Ponto Fictício) [7].

Após 1973 foi considerado o sistema *Hayford-Gauss Moderno*, também conhecido por sistema do *Datum 73* (SHG73). Neste sistema, as coordenadas geográficas da rede geodésica são calculadas sobre o elipsóide de Hayford, com fixação no Ponto Central.

Deve notar-se que, embora o ponto central dos SHGA e SHGM seja definido pelas mesmas coordenadas geodésicas elipsoidais do que o ponto central do SHG73, devido à mudança do ponto de fixação do elipsóide de Hayford de Lisboa para o Ponto Central, aquelas coordenadas não identificam o mesmo ponto do terreno. Para minimizar globalmente as

diferenças entre as coordenadas cartográficas SHG73 e SHGA, a origem das coordenadas cartográficas do SHG73 sofre uma pequena translação relativamente ao ponto central:

$$M_{HG73} = M_{HG73_OPC} + 180.598m$$

$$P_{HG73} = P_{HG73_OPC} - 86.990m$$

Assim, as diferenças entre as duas coordenadas são inferiores a poucos metros em todo o território.

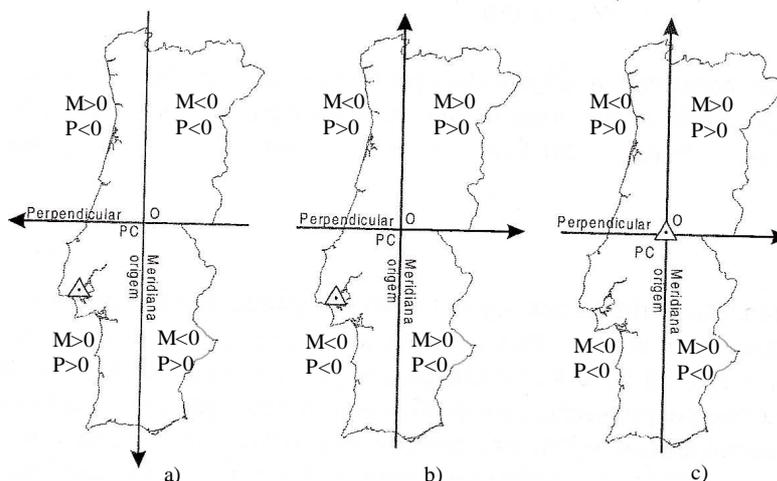


Figura 2.18 - Sistemas portugueses de coordenadas rectangulares. a) O sistema Bessel-Bonne, b) o sistema Hauford Gauss Antigo c) o sistema Hayford Gauss Moderno. O triângulo assinala o ponto de fixação do elipsóide e O a origem das coordenadas rectangulares [7].

O sistema UTM

No sistema UTM (Universal Transverse Mercator) a Terra é representada por um elipsóide e a sua superfície, situada entre os paralelos 84° N e 80° S, é dividida em 60 fusos, com uma amplitude de 6°. Os fusos são numerados de 1 a 60, sendo a numeração iniciada no fuso situado imediatamente a Este do meridiano com longitude 180°. Cada um dos fusos é subdividido considerando uma rede de paralelos espaçados de 8° a partir do paralelo 80°S até ao paralelo 72°N, tendo a última zona considerada uma amplitude de 12°, que corresponde à zona entre o paralelo 72°N e o paralelo 84°N. Estas 20 zonas são identificadas através das letras C, a X, excluindo as letras I e O. Ficam assim definidas 1200 zonas, cada uma identificada de forma única através de um número, correspondente ao fuso, e uma letra, indicando entre que paralelos se encontra.

Para a representação plana, em cada um dos fusos é considerado um sistema de coordenadas rectangulares de forma que a recta meridiana seja coincidente com o meridiano central do fuso e recta perpendicular com o equador. A origem das coordenadas rectangulares é considerada, por convenção, 500km à esquerda da recta meridiana e, para a representação das zonas no hemisfério Norte, sobre o equador. Para a regiões situadas no hemisfério sul a origem das coordenadas é considerada situada 500km à esquerda da recta meridiana e 10 000km a sul do equador. Desta forma, todos os pontos do fuso têm coordenadas positivas.

A representação plana de cada um dos fusos é obtida através da projecção do fuso sobre um cilindro secante à Terra ao longo de dois círculos menores paralelos ao meridiano central e distanciados deste 180km (projecção conhecida por projecção Universal Transversa de Mercator).

Como o sistema UTM não permite representar as zonas polares, este sistema é completado com o sistema UPS (Universal Polar Stereographic) [Casaca *et al.*, 2005].

O sistema ETRS89

O ETRS89 (European Terrestrial Reference System) é um sistema global de referência recomendado pela EUREF (European Reference Frame, subcomissão da IAG - Associação Internacional de Geodesia) desde 1990 e estabelecido através de técnicas espaciais de observação. Coincide com o sistema ITRS (International Terrestrial Reference System) na época de 1989,0 e é fixado à parte estável da placa Euro-Asiática. Utiliza como elipsóide de referência o GRS80 e o sistema de projecção adoptado utiliza a projecção de Mercator Transversa, sendo a origem das coordenadas rectangulares no ponto $\varphi = 39^{\circ}40'05,73''$, $\lambda = -8^{\circ}07'59,19''$.

O estabelecimento do ETRS89 em Portugal Continental foi efectuado com base em campanhas internacionais (realizadas em 1989, 1995 e 1997), que tiveram como objectivo ligar convenientemente a rede portuguesa à rede europeia. Nos anos subsequentes, toda a Rede Geodésica de 1ª ordem do Continente foi observada com GPS.

As folhas da Carta de Portugal à escala 1:50 000 do Instituto Geográfico Português produzidas a partir de 2002 estão referidas ao sistema ETRS89.

2.3. Cartografia Nacional

2.3.1. Noções gerais sobre cartografia

2.3.1.1. Noção de escala

Para efectuar a representação do terreno de forma a manter, tanto quanto possível, a grandeza e posição relativa dos objectos, considera-se uma razão constante entre o comprimento de uma linha representada na carta e a sua homóloga no terreno, razão a que se chama **escala**. Se o comprimento na carta for representado por ℓ e o mesmo comprimento no terreno por L , a escala será dada por $\frac{\ell}{L} = \frac{1}{E}$, sendo E normalmente um múltiplo de 10.

Diz-se que a escala $\frac{1}{E_1}$ é superior à escala $\frac{1}{E_2}$ se $E_1 < E_2$.

Em muitas cartas é representada, para uma mais fácil visualização da magnitude das distâncias, uma escala gráfica, constituída por um segmento de recta dividido em segmentos mais pequenos, que indicam a correspondência entre os comprimentos medidos na carta e os comprimentos seus equivalentes no terreno (Figura 2.19).



Figura 2.19- Escala gráfica de uma carta.

2.3.1.2. Cartas

A informação, qualitativa e quantitativa, relativa aos fenómenos de natureza física, humana, etc., que se distribuem espacialmente sobre a superfície terrestre, é designada por **informação geográfica**. A **cartografia topográfica** tem como objectivo a representação plana da informação geográfica designada por informação topográfica, nomeadamente o

relevo, linhas de água, vegetação, construções, vias de comunicação, redes de transporte de energia. etc.. A informação geográfica não topográfica (por exemplo, demografia, exposição solar, pluviosidade, aptidão para construção, etc.) é designada por informação temática e a sua representação sobre uma base topográfica é designada por **cartografia temática**.

As representações cartográficas são classificadas em três categorias: os mapas geográficos, as cartas e as plantas topográficas. Designam-se por **mapas geográficos** as representações de informação topográfica a escalas inferiores a 1:500 000, que podem utilizar uma esfera para substituir o geóide como superfície de referência. As **cartas topográficas** são representações nacionais ou regionais a escalas iguais ou superiores a 1:500 000 e geralmente inferiores a 1:10 000. São de grande utilidade para o engenheiro em estudos gerais de vias de comunicação, de hidráulica, etc. As **plantas topográficas** são representações de âmbito local, a escalas iguais ou superiores a 1:10 000.

As cartas que derivam directamente de um levantamento denominam-se de **cartas de base**, e as cartas obtidas a partir das cartas de base, com ou sem redução destas, são chamadas **cartas derivadas**, entre as quais se contam algumas cartas temáticas, como por exemplo as cartas geológicas, florestais, etc..

Nas cartas e nas plantas, a representação do terreno é feita tanto em planimetria como em altimetria. Por **planimetria** entende-se a representação bidimensional da posição dos pontos na carta e por **altimetria** a representação do relevo. Esta última é normalmente feita por intermédio de curvas de nível ou pontos cotados (ver capítulo 0).

Numa carta estão traçados os meridianos e os paralelos, e também as linhas rectas paralelas aos eixos rectangulares, que se denominam rectas meridianas e rectas paralelas, cujo conjunto constitui a quadrícula da carta. Os meridianos e os paralelos são representados por linhas rectas ou curvas, sendo sempre uma linha recta o meridiano que passa pelo ponto central da zona considerada.

Numa carta, as rectas paralelas à meridiana formam com as linhas que representam os meridianos um ângulo que aumenta à medida que nos afastamos do meridiano origem (ver Figura 2.20). Este ângulo designa-se por **convergência dos meridianos**, e pode, sem grande erro, ser considerado constante nas zonas em que se divide a carta de um país. Sendo o **Norte Cartográfico** (N.C.) a direcção definida pelo meridiano central e o **Norte Geográfico** (N.G.) a direcção definida pelos outros meridianos representados na carta, a convergência dos meridianos é o ângulo formado pelo N.C. e pela recta tangente ao N.G. no ponto considerado.

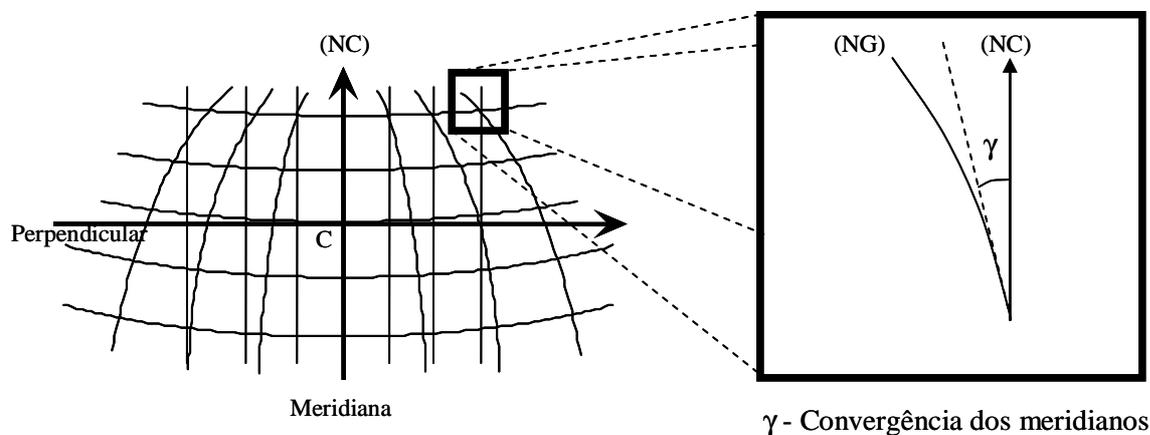


Figura 2.20 – Quadrícula de uma carta e representação do ângulo formado pelo Norte Cartográfico e Norte Geográfico, denominado de convergência dos meridianos.

Usualmente indica-se na margem das folhas as direcções do Norte Geográfico, do Norte Cartográfico e do Norte Magnético (N.M.), elementos que são destinados a permitir a orientação de direcções quando se conhece o rumo Cartográfico, o azimute Geográfico, ou o azimute ou rumo Magnético (Figura 2.21).

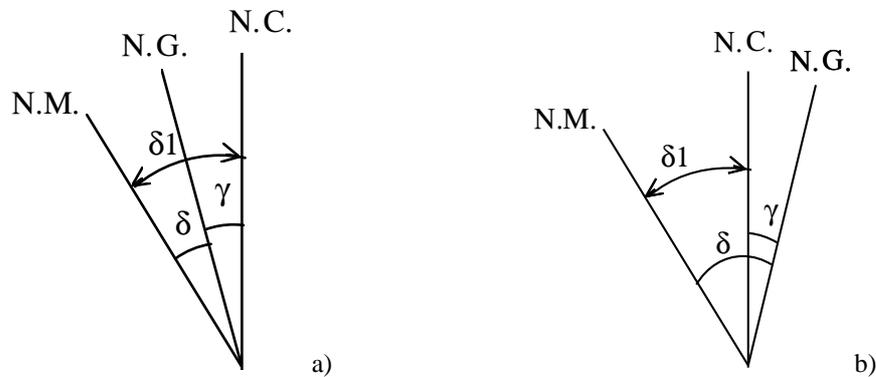


Figura 2.21 - Ao ângulo δ , formado pelas direcções do N.G. e do N.M., chama-se declinação magnética. Ao ângulo γ , formado pelas direcções do N.G. e do N.C., chama-se convergência de meridianos. O ângulo δ_1 , formado pela direcção do N.M. e do N.C., é a declinação relativamente à quadrícula da carta. a) Ponto a Este do meridiano origem. b) ponto a Oeste do meridiano origem.

Se δ for a declinação magnética (ângulo formado pela direcção do Norte Magnético e pela direcção do Norte Geográfico) e γ a convergência dos meridianos, tem-se que a declinação relativamente à quadrícula da carta δ_1 é dada por:

$$\delta_1 = \delta \pm \gamma$$

aplicando-se o sinal positivo (negativo) quando o ponto considerado estiver situado a Este (Oeste) do meridiano origem.

2.3.2. As séries do IGeoE e do IGP

Os principais produtores portugueses de cartografia topográfica são o Instituto Geográfico Português, formado em 2002 e integrando os entretanto extintos Instituto Português de Cartografia e Cadastro (IPCC) e o Centro Nacional de Informação Geográfica (CNIG), e o Instituto Geográfico do Exército (IGeoE). O IGP dispõe da cobertura de Portugal continental nas escalas 1:50 000 (disponível também para os Açores), 1:100 000, 1:200 000 (disponível também para os Açores), 1:500 000, 1:1 000 000 (disponível também para a Madeira e Açores) e 1:2 500 000. A cobertura de Portugal continental na escala 1:10 000 encontra-se ainda em fase de execução e é também da responsabilidade do IGP. Esta carta inclui dois modelos, o Modelo Numérico Topográfico (MNT) que se destina principalmente a utilizadores que necessitem da informação para construir um sistema de informação geográfica, e o modelo numérico cartográfico (MNC), que deriva do primeiro através da aplicação de convenções cartográficas. O IGeoE possui as cartas militares nas escalas 1:25 000 de todo o território português (incluindo Madeira e Açores), 1:50 000 e 1:250 000.

Quanto às cartas de maiores escalas, as mais usadas são as de 1:5 000, 1:2 000, 1:1 000 e 1:500, competindo ao Engenheiro a sua escolha de acordo com a natureza do trabalho a realizar. A execução de cartografia em escalas grandes é da responsabilidade das administrações regionais, nomeadamente das Câmaras Municipais.

Não há normas rígidas para a escolha da escala das cartas a utilizar, existindo, no entanto, casos em que a escala está mais ou menos consagrada. Assim, nos levantamentos de povoações usam-se, para estudos de urbanização, redes de distribuição de águas, de evacuação de esgotos e de energia eléctrica, levantamentos nas escalas 1:1 000 e 1:2 000; nos estudos de pormenor de obras usam-se cartas com escalas de 1:100 a 1:500.

Actualmente, a cartografia, e a informação geográfica em geral, não é disponibilizada apenas em formato analógico, através de cartas ou mapas em papel, mas fundamentalmente em formato digital, o que permite o seu processamento computacional e a sua introdução em Sistemas de Informação Geográfica.

2.4. Elementos de Cartometria

A Cartometria ocupa-se da execução de medições sobre cartas, nomeadamente a medição de rumos ou azimutes, comprimentos, áreas e volumes. Vamos apenas abordar nestes textos de apoio a medição de áreas. Pode encontrar-se mais informações sobre a leitura de cartas e a extração de informação a partir delas, por exemplo, na publicação “Manual de leitura de cartas” do Instituto Geográfico do Exército.

2.4.1. Determinação de áreas

As áreas medidas em cartas são sempre áreas em projecção horizontal. Analisemos pois os principais métodos para a sua determinação:

2.4.1.1. Método analítico

Aplica-se a figuras com contorno poligonal, desde que se conheçam as coordenadas dos seus vértices, o que normalmente exige o levantamento da extrema da região cuja área se pretende determinar. É um método rigoroso e é utilizado sempre que se pretende calcular uma área com bastante precisão.

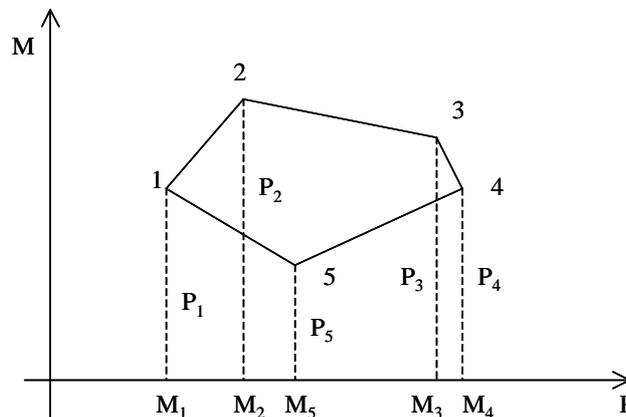


Figura 2.22 - Polígono fechado com vértices nos pontos 1, 2, 3, 4 e 5, com coordenadas respectivamente (M_1, P_1) , (M_2, P_2) , (M_3, P_3) , (M_4, P_4) e (M_5, P_5) .

Analisando a Figura 2.22 tem-se que:

$$S = \frac{1}{2} \left[(M_2 - M_1)(P_2 + P_1) + (M_3 - M_2)(P_3 + P_2) + (M_4 - M_3)(P_4 + P_3) - (M_4 - M_5)(P_5 + P_4) - (M_1 - M_5)(P_1 + P_5) \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \left[P_1(M_2 - M_5) + P_2(M_3 - M_1) + P_3(M_4 - M_2) + P_4(M_5 - M_3) + P_5(M_1 - M_4) \right]$$

Ou, considerando $M_0 \equiv M_5$ e $M_6 \equiv M_1$, tem-se:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 P_i (M_{i+1} - M_{i-1})$$

Generalizando para o caso de n vértices ter-se-á:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i (M_{i+1} - M_{i-1})$$

2.4.1.2. Métodos geométricos

Neste tipo de método de determinação de áreas temos que separar o caso em que a figura é limitada por uma linha poligonal ou por uma linha curva.

Figuras limitadas por um contorno poligonal

Neste caso faz-se a decomposição da área do polígono em áreas mais simples, cuja área se sabe determinar. As distâncias necessárias são medidas directamente na carta.

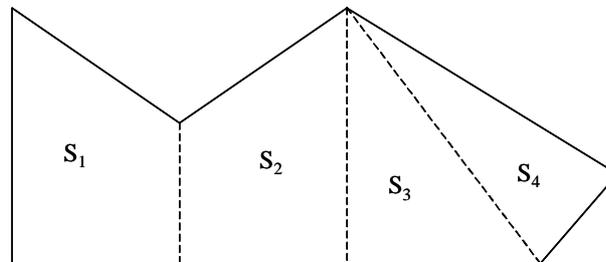


Figura 2.23 - A área S da figura indicada é $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

Figuras limitadas por uma linha curva

Método dos trapézios

É um método expedito que permite calcular uma área aproximada. Substitui-se a linha curva por uma linha poligonal e transforma-se a figura cuja área se pretende determinar numa série de trapézios todos com a mesma altura d (ver Figura 2.24).

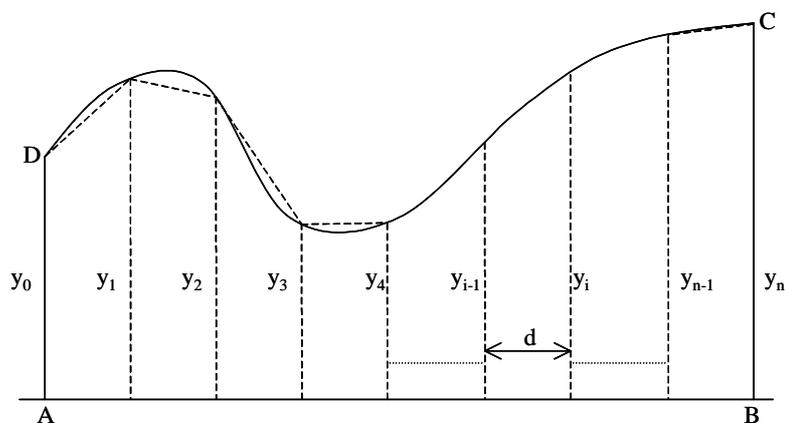


Figura 2.24 - Divisão de uma área em trapézios de altura d , para determinação da área utilizando o método dos trapézios.

Têm-se então que:

$$S = \frac{1}{2}d(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n)$$

$$S = d\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right)$$

Caso a área a medir seja totalmente limitada por uma linha curva, pode fazer-se uma adaptação deste método traçando um segmento de recta segundo a maior dimensão da figura.

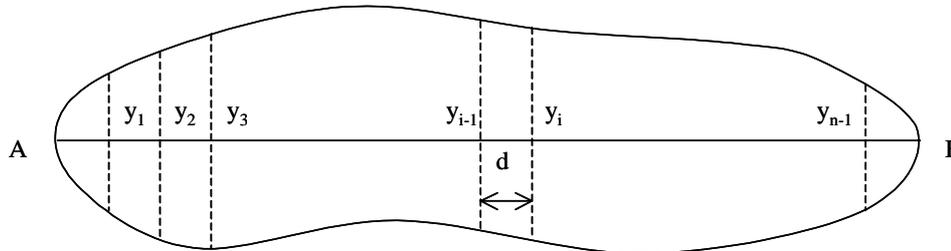


Figura 2.25 - Adaptação do método dos trapézios para cálculo da área da figura, sendo $S = d(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$.

Método de Simpson ou das parábolas

Quando se pretende atingir uma precisão mais elevada do que o método anterior permite atingir, pode utilizar-se o método de Simpson, segundo o qual se divide o segmento AB num número par ($2n$) de partes iguais com dimensão d , e substituir a curva entre cada grupo de três pontos consecutivos (tais como A', C, D) por um arco de parábola que passe por esses três pontos.

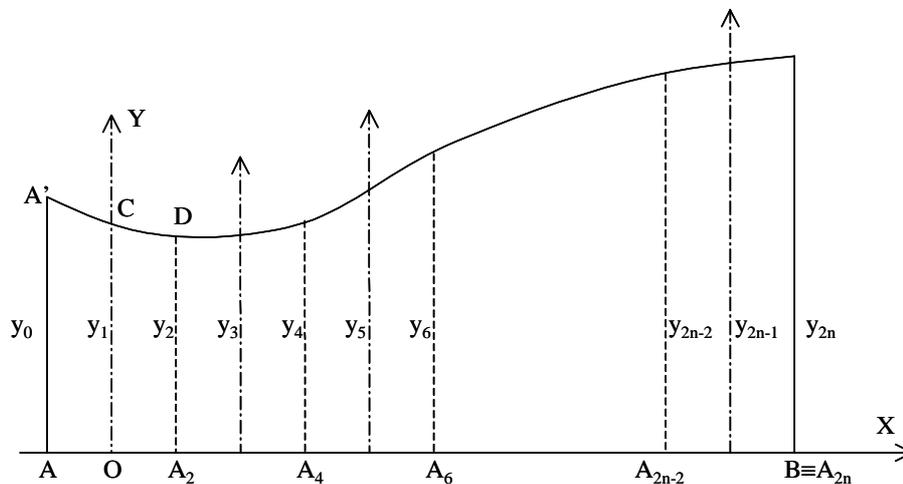


Figura 2.26 - Esquema da definição da posição sucessiva dos eixos coordenados para a determinação de uma área pelo método de Simpson.

Considerando um sistema de eixos como o definido na Figura 2.26 essas parábolas terão uma equação da forma:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

A área da figura AA'CDA₂A será então dada por:

$$S_1 = \int_{-d}^d (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx = \left[a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 \right]_{-d}^d = 2a_0d + \frac{2}{3}a_2d^3 = \frac{d}{3}(6a_0 + 2a_2d^2)$$

Como a parábola passa pelos pontos $A(-d, y_0)$, $C(0, y_1)$ e $D(d, y_2)$, tem-se:

$$y_0 = a_0 - a_1d + a_2d^2$$

$$y_1 = a_0$$

$$y_2 = a_0 + a_1d + a_2d^2$$

pelo que:

$$y_0 + y_2 = 2a_0 + 2a_2d^2$$

com $y_1 = a_0$ obtém-se que:

$$2a_2d^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

Entrando com este valor na expressão de S_1 , vem:

$$S_1 = \frac{d}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Deslocando agora o eixo OY da forma indicada na Figura 2.26 pode-se escrever:

$$S_1 = \frac{d}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$S_2 = \frac{d}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$S_3 = \frac{d}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$S_n = \frac{d}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Como $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, somando membro a membro estas igualdades obtém-se a chamada fórmula de Simpson:

$$S = \frac{d}{3} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})]$$

Caso se trate de uma região totalmente limitada por uma linha curva, procede-se de forma análoga à descrita para o método dos trapézios.

2.5. Infra-estruturas cartográficas

2.5.1. A Rede Geodésica

Os levantamentos topográficos são, em geral, apoiados num conjunto de pontos de coordenadas geodésicas conhecidas - cuja determinação pertence ao domínio da Geodesia - materializados por sinais estáveis, facilmente visíveis, designados por *vértices geodésicos*. Este conjunto de pontos é representado graficamente por uma malha triangular, denominada **rede geodésica**. Ao método utilizado na determinação das coordenadas dos vértices chama-se a **triangulação geodésica**.

A triangulação geodésica consiste na medição dos ângulos internos dos triângulos da malha e na propagação das coordenadas astronómicas (ou naturais) do ponto astronómico fundamental para os outros pontos da rede.

Resumidamente, a triangulação geodésica consiste em medir o azimute e o comprimento de um lado de um triângulo a que pertence o ponto astronómico fundamental

(comprimento este designado por **base**). De seguida, estacionando um teodolito em todos os vértices dos triângulos, medem-se os seus ângulos internos. Finalmente são calculadas as coordenadas ajustadas dos vértices dos triângulos. O ajustamento da rede pode incluir a observação das coordenadas astronómicas noutros pontos (pontos de Laplace) e a medição de novas bases.

As redes geodésicas podem ser classificadas em três ordens. Na rede de **primeira ordem**, ou rede primordial, a distância entre os vértices varia entre 30 e 60 km, podendo, em condições excepcionais, ir até 100 ou 200 km, que é o alcance máximo dos instrumentos de medida.

A rede geodésica de primeira ordem é adensada com novos vértices, afastados entre si e dos primeiros cerca de 20 a 30 km, e que formam com aqueles a **rede geodésica de segunda ordem**.

Os vértices desta rede estão ainda muito distantes e, portanto, introduzem-se novos vértices apoiados nos anteriores formando malhas cujos vértices estão distanciados de 5 a 10 km. A rede assim obtida, **rede geodésica de terceira ordem**, é constituída por malhas onde se podem já aplicar os métodos topográficos.

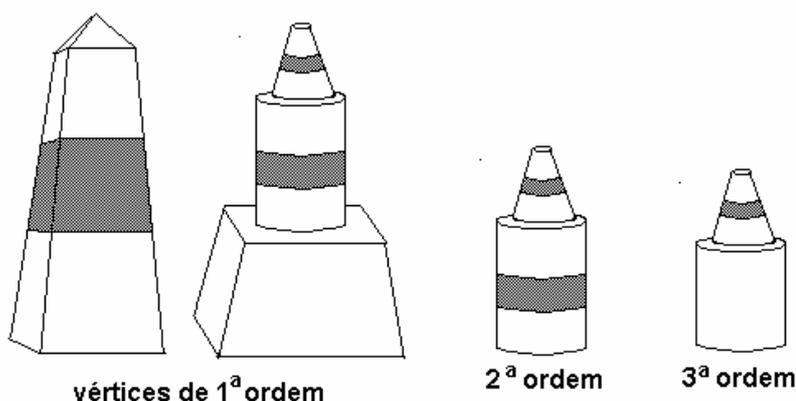


Figura 2.27 - Marcos dos vértices da rede geodésica.

A construção e manutenção das três primeiras ordens de vértices da rede geodésica é da responsabilidade exclusiva do Instituto Geográfico Português (IGP). O adensamento da rede geodésica, por vezes designado por **rede de quarta ordem** é efectuado por diversas entidades sendo em geral escolhidos pontos notáveis de edifícios ou outro tipo de construções com características de dominância na paisagem.

A escolha destes vértices é evidentemente condicionada pela sua intervisibilidade e, por isso mesmo, antes de se iniciarem os trabalhos necessários ao estabelecimento de qualquer triangulação, deve fazer-se um projecto da mesma e o reconhecimento do terreno. Esta última operação é de extrema importância, pois dela depende em grande parte a rapidez e facilidade de execução do trabalho e a precisão dos resultados obtidos.

2.5.2. Triangulação topográfica

Como em topografia interessa fundamentalmente o pormenor, não é possível utilizar apenas os vértices geodésicos para apoio dos levantamentos, pois as distâncias entre eles são demasiado grandes. Por este motivo, aumenta-se a densidade de pontos da rede utilizando novos vértices, que se apoiam nos vértices geodésicos. Obtém-se assim a rede topográfica, constituída por triângulos cujos lados têm comprimentos entre 500 m e 1 km.

2.5.3. Triangulação topográfica com apoio geodésico

É construída com apoio nos vértices geodésicos, podendo-se, quando necessário, (por exemplo em zonas de visibilidade reduzida, onde as condições são pouco favoráveis ao estabelecimento de triângulos), introduzir mais vértices com poligonação (ver Secção 3.5.4).

No levantamento de zonas pouco extensas, ou mesmo em regiões extensas em que as condições morfológicas dificultem o estabelecimento de uma triangulação (por exemplo terrenos cobertos de floresta), podem utilizar-se apenas redes de poligonais para a determinação dos pontos de apoio.

2.5.4. Triangulação topográfica independente

Ao estabelecer-se uma rede de triangulação é sempre conveniente usar-se o apoio geodésico para que todos os trabalhos fiquem ligados à rede geodésica nacional e se enquadrem numa referência global. No entanto, pode acontecer que, devido aos pontos de apoio se encontrarem muito distantes e o tipo de trabalho não justificar a construção de pontos de apoio mais próximos, se construa uma rede sem apoio nos vértices geodésicos, a que se chama *triangulação topográfica independente*.

Para a sua construção é necessário:

- medir uma base (um comprimento);
- atribuir um rumo a um dos lados da triangulação (de preferência a base);
- atribuir coordenadas a um vértice da triangulação (de preferência um dos vértices da base).

Pode ainda medir-se mais do que uma base para controlo de resultados.

Tal como no caso da triangulação topográfica com apoio geodésico, a densificação da rede pode ser feita com poligonação.

3. Levantamentos topográficos

3.1. Introdução

As operações de recolha de dados topográficos são designada por *levantamentos topográficos*. Os levantamentos topográficos podem ser executados utilizando:

- os métodos clássicos da Topografia, que se baseiam fundamentalmente na medição de ângulos e distâncias, recorrendo a instrumentos tais como estações totais, teodolitos e níveis;
- métodos fotogramétricos, sendo a informação obtida a partir de fotografias aéreas métricas, ou imagens numéricas recolhidas por sensores instalados em satélites artificiais da Terra;
- sistemas globais de navegação por satélite (GNSS – Global Navigation Satellite Systems), nomeadamente o Sistema de Posicionamento Global, mais conhecido por GPS, que utiliza receptores dos sinais emitidos pelos satélites da constelação GPS, permitindo a determinação precisa das coordenadas dos locais onde são colocadas as antenas dos receptores.

A utilização de quaisquer destes métodos requer a execução de *trabalho de campo*, que, no caso dos métodos clássicos de levantamentos topográficos e da utilização dos GNSS, corresponde normalmente à recolha de dados, e a posterior execução de ajustamentos e cálculos necessários à obtenção das quantidades pretendidas, a que se chama usualmente *trabalho de gabinete*.

Neste capítulo serão estudados os métodos clássicos de aquisição de dados topográficos, que se baseiam na medição de ângulos e distâncias. Os ângulos que interessa medir, quer para a execução de levantamentos quer para a implantação de pontos, são ângulos horizontais e verticais.

Ângulo horizontal ou azimutal de duas direcções que passam por um ponto é o rectilíneo do diedro formado pelos planos verticais que contêm essas direcções, isto é, o ângulo formado pelas projecções dessas direcções sobre o plano horizontal.

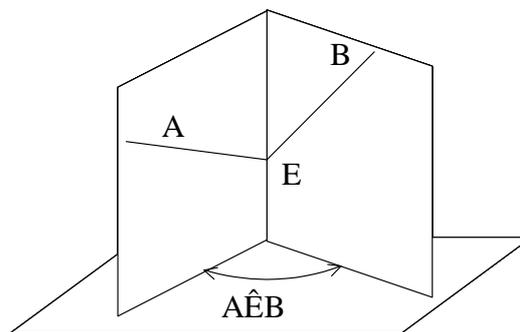


Figura 3.1 – Ângulo horizontal ou azimutal de duas direcções concorrentes num ponto E.

Para se definir o ângulo vertical de uma direcção emergente de um ponto temos que distinguir os casos em que o elemento de referência é o plano horizontal ou a vertical que passa nesse ponto. Assim, tem-se:

- 1) Altura de uma direcção é o ângulo que essa direcção forma com o plano horizontal. É contada a partir do plano horizontal de onde emerge a direcção e varia entre -100 e +100 graus.
- 2) Distância zenital de uma direcção é o ângulo que essa direcção faz com a vertical que passa pelo ponto de onde emerge. É contada a partir da vertical e varia entre zero e 200 graus.

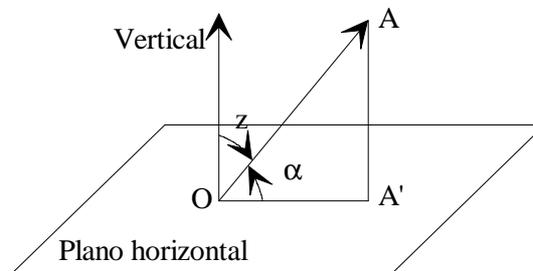


Figura 3.2 - O ângulo α é a altura de direcção [OA] e o ângulo z a sua distância zenital.

Tem-se desta forma que $z = 100^\circ - \alpha$.

Os instrumentos utilizados em Topografia para medir ângulos horizontais e ângulos verticais são chamados de teodolitos.

As distâncias medidas com o equipamento utilizado em Topografia são normalmente distâncias reais entre pontos. No entanto, para a maioria dos métodos, é necessário conhecer as distâncias horizontais e não as reais, o que exige, ou a conversão das últimas nas primeiras, ou a adaptação dos métodos de medição para a medição de distâncias horizontais.

3.2. Equipamento Topográfico

Faz-se de seguida um breve resumo do principal equipamento utilizado em Topografia clássica. Este equipamento é utilizado juntamente com outros acessórios, como tripés, fios-de-prumo, fitas, etc.

3.2.1. Teodolitos

Os teodolitos são instrumentos construídos com a finalidade de medir ângulos horizontais e verticais. Os ângulos horizontais medidos têm o vértice num ponto do terreno, onde é estacionado o aparelho, e são definidos por duas direcções visadas utilizando a luneta do instrumento. Os ângulos verticais têm vértice no centro do aparelho e são definidos apenas por uma direcção visada.

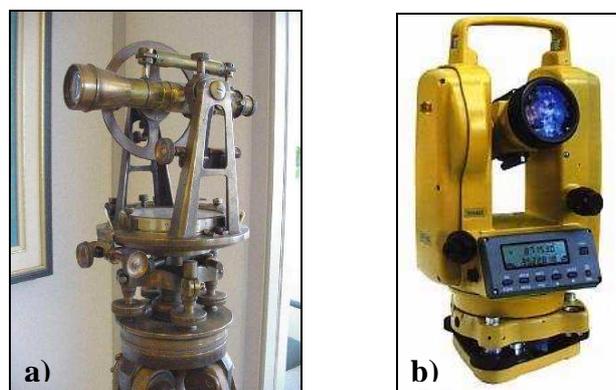


Figura 3.3 - a) Teodolito clássico. b) Teodolito electrónico.

Os teodolitos são estacionados no terreno em tripés, ou em pilares e têm como componentes fundamentais:

- 1) *uma luneta* - cujo eixo óptico materializa as direcções, podendo tomar todas as posições no espaço com movimentos em torno de um eixo que, depois do estacionamento do teodolito, ficará colocado na posição vertical (eixo principal) e outro que ficará na posição horizontal (eixo secundário);
- 2) *dois limbos* - destinados a medir os ângulos e que estão colocados na posição horizontal e vertical, de forma que os seus centros existam teoricamente sobre os eixos atrás mencionados;
- 3) *nivelas* - cuja finalidade é colocar vertical o eixo principal do teodolito.

3.2.2. Distanciómetros Electrónicos

Os distanciómetros electrónicos são instrumentos que permitem medir distâncias através da emissão de um raio laser e da sua recepção depois de ser reflectido no outro ponto que define a distância a medir. Normalmente exigem a utilização de um reflector, que envia o raio emitido de volta para o aparelho, embora, actualmente, alguns distanciómetros possam medir distâncias relativamente pequenas sem reflector.

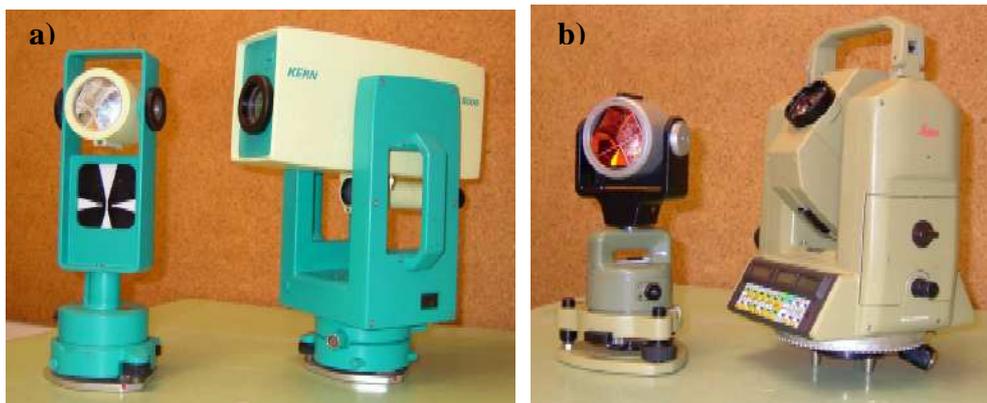


Figura 3.4 – a) Distanciómetro electrónico independente. b) Distanciómetro electrónico integrado num teodolito (Estação Total).

3.2.3. Estações Totais

Designa-se por Estação total um equipamento que engloba um teodolito e um distanciómetro electrónico. Estes equipamentos são muito versáteis pois permitem medir ângulos horizontais, ângulos verticais e distâncias com muita eficiência.



Figura 3.5 – Estação Total.

3.2.4. Níveis

Os aparelhos que têm como objectivo definir linhas de visada horizontais são chamados de níveis. Estes aparelhos são utilizados para fazer operações de nivelamento, ou seja operações de cálculo de diferenças de altitude entre pontos do terreno. São normalmente utilizados juntamente com miras.



Figura 3.6 – a) Nível. b) Observações de uma linha de nivelamento geométrico utilizando um nível e respectiva mira.

3.3. Medição de ângulos

3.3.1. Constituição e funcionamento de um teodolito

O teodolito dispõe de uma parte fixa, chamada *base*, onde se apoia o instrumento, e outra móvel, chamada *alidade*, susceptível de rodar em torno do *eixo principal do teodolito*. O eixo em torno do qual bascula a luneta chama-se *eixo secundário* ou *eixo dos munhões*. É um eixo supostamente perpendicular ao eixo principal e que o deve intersectar num ponto chamado *centro do teodolito*. A luneta dispõe ainda de um *eixo óptico*, que deve passar pelo centro do teodolito.

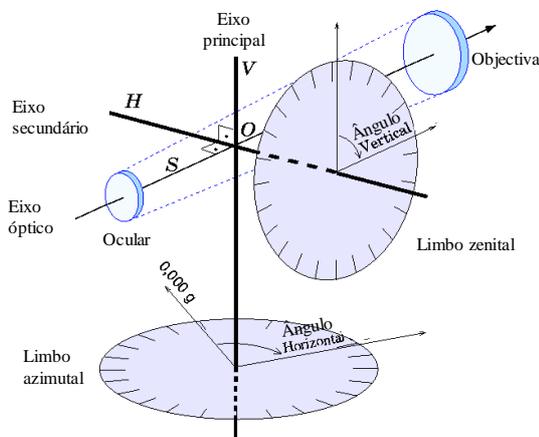


Figura 3.7 Constituição de um teodolito: V representa o eixo principal, H o eixo secundário, S o eixo óptico do teodolito e O o centro do teodolito.

Associado ao eixo principal existe o *limbo azimuthal ou horizontal* e associado ao eixo secundário existe o *limbo vertical* (que na maior parte dos instrumentos tem como finalidade medir ângulos zenitais, sendo portanto chamado de limbo zenital).

3.3.1.1. Nivelas

Existem dois tipos de nivelas: as nivelas tóricas e as nivelas esféricas.

Nivelas tóricas

São formadas por um tubo de vidro com a forma de uma porção de um toro de revolução (ver Figura 3.8) de grande raio (o círculo gerador tem em média 1 cm de raio e o equador entre 15 e 200 m), quase cheio de um líquido não viscoso (normalmente éter), sendo o restante espaço ocupado por vapores desse líquido que formam a bolha da nivela.

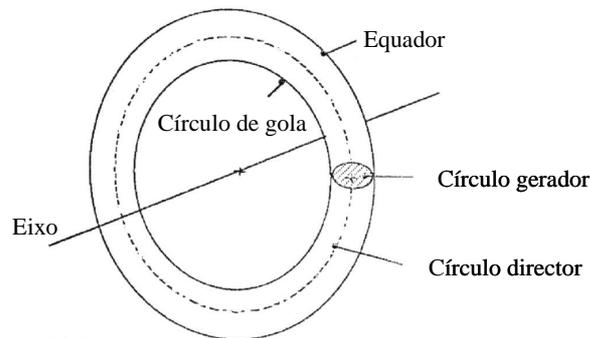


Figura 3.8 - Toro de revolução.

Em virtude dos princípios de equilíbrio dos fluidos, a bolha ocupará sempre a parte mais elevada do toro, de modo que se o plano do equador for vertical, a tangente ao toro no meio da bolha será horizontal.

Os elementos geométricos de uma nivela tórica são (ver Figura 3.9): o *plano médio da nivela*, que é o plano do equador e corta o toro segundo dois arcos de circunferência concêntricos, designando-se o exterior por *linha média da nivela* e o seu raio por *raio de curvatura da nivela*. *Directriz da nivela* é a tangente à linha média da nivela no seu ponto médio, chamado *centro da nivela*. O centro da nivela é definido pela sua graduação, não sendo na maior parte das vezes gravado na nivela.

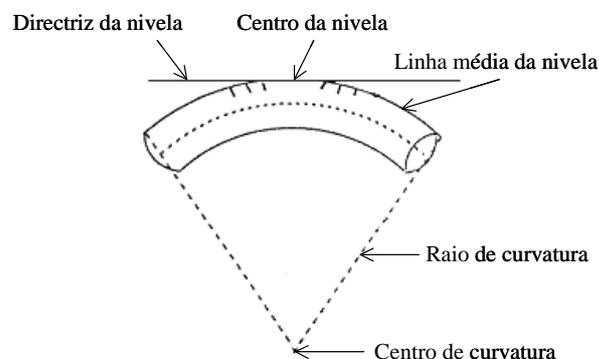


Figura 3.9 - Elementos geométricos de uma nivela tórica.

Diz-se que uma nivela está *calada* quando o centro da bolha coincide com o centro da nivela.

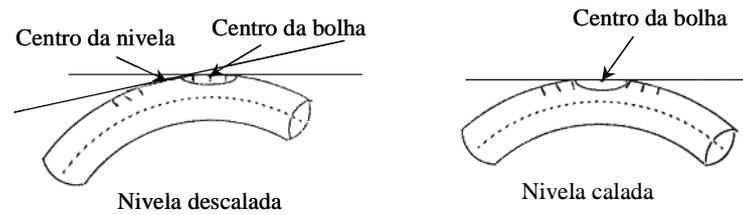


Figura 3.10 - Uma nívela tórica calada e descalada.

Chama-se **sensibilidade** (ver Figura 3.11) de uma nívela à propriedade de esta, quando se bascula o seu plano médio em torno do eixo, traduzir, através de deslocamentos da bolha, pequenas variações de inclinação da sua directriz. É expressa pelo ângulo α de que roda a directriz quando a bolha se desloca de um determinado arco ℓ , o seu valor em segundos centesimais é dado pela expressão:

$$\alpha = \frac{\ell}{R} \rho$$

em que ρ é o valor de um radiano em segundos centesimais ($\rho = 636620''$). Uma nívela é tanto mais sensível quanto maior for o deslocamento da bolha para um dado α , isto é, quanto maior for o raio de curvatura R . Uma nívela é caracterizada pelo valor do ângulo α correspondente a uma divisão da graduação. Temos assim, por exemplo, as seguintes três nívelas com sensibilidade decrescente:

$\ell = 2 \text{ mm}$	$\alpha = 1''$	$R = 1273 \text{ m}$
$\ell = 2 \text{ mm}$	$\alpha = 20''$	$R = 63 \text{ m}$
$\ell = 2 \text{ mm}$	$\alpha = 30''$	$R = 42 \text{ m}$

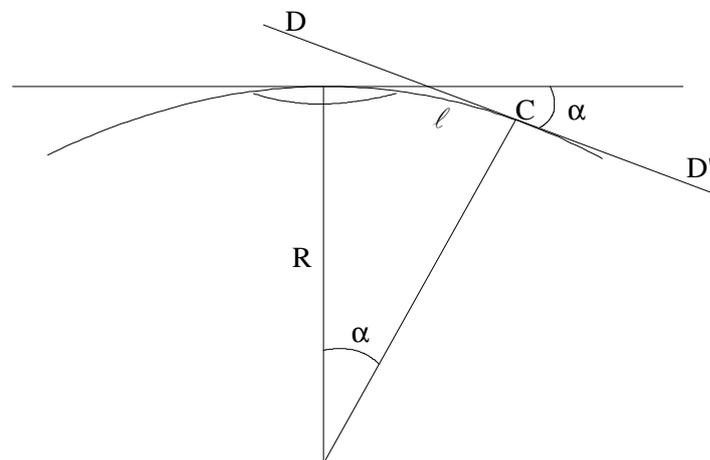


Figura 3.11 - A sensibilidade de uma nívela é caracterizada pelo ângulo α que roda a directriz quando a bolha se desloca de um arco ℓ .

Montagem das nívelas tóricas nos instrumentos

Nos teodolitos as nívelas estão normalmente solidárias com o eixo principal, tendo como finalidade colocá-lo vertical. Desta forma, o plano médio da nívela deve ser paralelo ao eixo a que a nívela é solidária e a sua directriz deve ser perpendicular a este eixo, quando isto não acontecer diz-se que a nívela está **desrectificada**. O eixo principal é suportado por uma base triangular munida de três parafusos nivelantes, que permitem variar a inclinação conjunta do eixo e da nívela, parafusos estes que vão ser utilizados para calar a nívela.

Partindo do princípio de que a nivela está rectificada, os procedimentos a seguir são (Figura 3.12):

- 1) Colocar a nivela de modo que a directriz desta fique aproximadamente paralela ao plano vertical que passa por dois dos parafusos nivelantes;
- 2) Rodar esses dois parafusos em sentidos contrários até calar a nivela;
- 3) Rodar a alidade (e conseqüentemente a nivela) de 100 graus em torno do eixo principal;
- 4) Voltar a calar a nivela rodando agora apenas o terceiro parafuso nivelante.

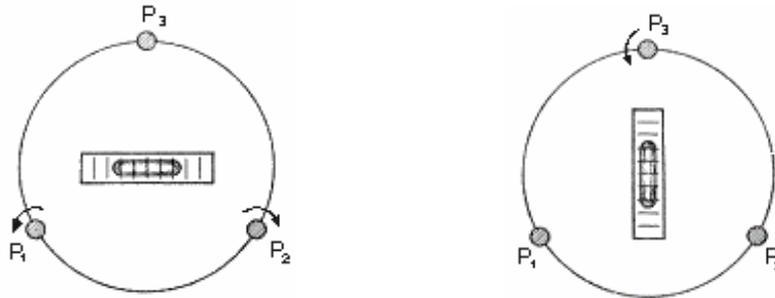


Figura 3.12 - Representação esquemática dos parafusos nivelantes de um teodolito e da nivela tórica durante o procedimento de verticalização do eixo principal.

Depois de efectuadas estas operações o eixo principal deve estar vertical e, ao rodar-se o teodolito em torno deste, a bolha da nivela tórica não se deve deslocar. Se isso acontecer a nivela não está rectificada e neste caso, ou se rectifica a nivela ou adoptam-se outros procedimentos para verticalizar o eixo principal, que não serão estudados neste curso.

Nivelas esféricas

Uma nivela esférica é um recipiente com a forma de um cilindro, limitado superiormente por uma calote esférica, com uma circunferência de referência gravada no seu centro, e inferiormente por uma superfície qualquer (ver Figura 3.13). Está, tal como as nivelas tóricas, quase completamente cheia de um líquido de baixa viscosidade. A bolha ocupa a parte mais elevada da calote esférica e o plano tangente ao centro da bolha é sempre horizontal.

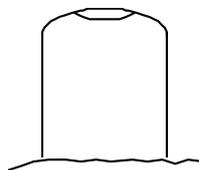


Figura 3.13 - Representação de uma nivela esférica.

Chama-se **plano director** da nivela esférica ao plano tangente à calote no centro do círculo de referência. A nivela está calada quando a bolha estiver concêntrica com a circunferência de referência, ficando então o plano director horizontal.

Nos teodolitos a nivela esférica é normalmente solidária ao eixo principal. Como o objectivo é verticalizar este eixo, a nivela está rectificada quando o seu plano director lhe for perpendicular.

As nivelas esféricas são nivelas de baixa precisão e são utilizadas apenas para fazer uma verticalização aproximada do eixo principal, usando os três parafusos nivelantes, sendo essa verticalização depois refinada com a nivela tórica.

3.3.1.2. A luneta

A luneta de um teodolito é composta fundamentalmente por dois sistemas ópticos, a **ocular** e a **objectiva**, funcionando qualquer deles como uma lente convergente. Como o objecto a focar está sempre situado muito além do foco da objectiva, esta vai originar uma imagem real e invertida (ver Figura 3.14). A ocular vai funcionar em relação a esta imagem como uma lupa, pelo que esta vai ter que se formar entre o centro óptico e o foco da ocular. Podemos então afirmar que a luneta origina uma imagem virtual, invertida e com um aumento considerável do diâmetro do objecto. Nas lunetas de fabrico moderno, graças a um conjunto de prismas incorporado no corpo da luneta, as imagens observadas através da ocular são imagens direitas.

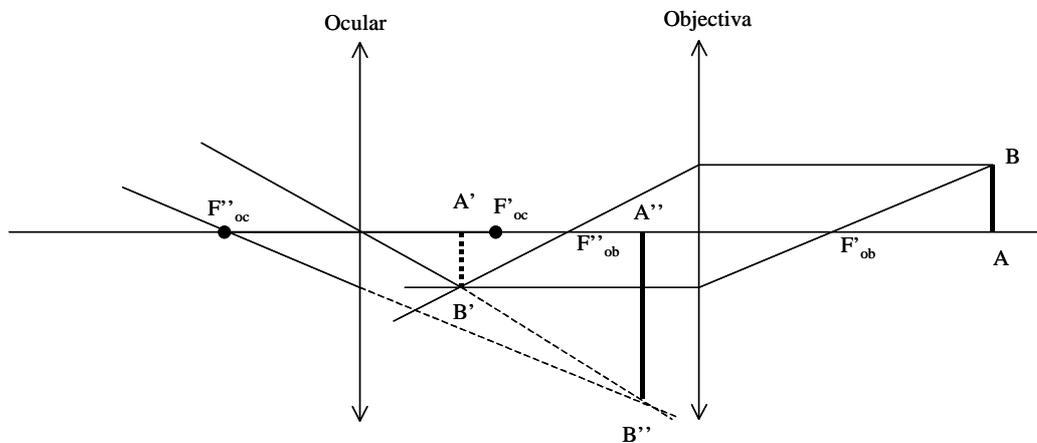


Figura 3.14 - Esquema de uma luneta. Oc - Ocular; Ob - Objectiva; AB - Objecto; A'B'' - Imagem obtida com o conjunto das duas lentes; F'_oc e F''_oc - Focos da ocular; F'_ob e F''_ob - Focos da objectiva.

Para se definirem linhas de pontaria existe, no corpo da luneta, entre a ocular e a objectiva, uma lâmina de vidro com um sistema de linhas cruzadas, finamente gravadas, a que se dá o nome de retículo (ver Figura 3.15).

Chama-se **linha de pontaria** ou **linha de visada** ao lugar geométrico dos pontos do espaço cujas imagens se formam sobre o ponto de cruzamento dos fios do retículo.

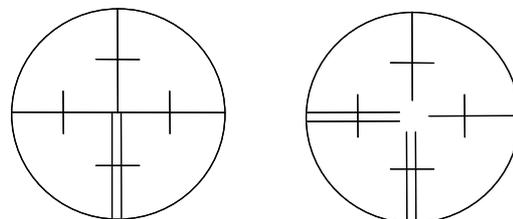


Figura 3.15 - Dois possíveis aspectos do retículo, quando observado através da luneta.

Fazer pontaria a um ponto equivale a obrigar que a linha de pontaria da luneta passe por esse ponto.

Podemos ainda diferenciar **pontarias em azimuth** e **pontarias em altura**. Diz-se que se está a apontar em azimuth para um determinado ponto quando a imagem desse ponto se situar

apenas sobre o fio vertical do retículo. Diz-se que se está a apontar em altura quando a imagem do ponto se situar apenas sobre o fio horizontal do retículo.

Para referenciar a posição da imagem do objecto relativamente aos fios do retículo convém que essa imagem se forme no plano do retículo. Diz-se que há **paralaxe da imagem** quando a imagem do objecto dada pela objectiva não se forma sobre esse plano. Um observador constata a existência ou não de paralaxe da imagem deslocando a vista em frente da ocular. Se a imagem do objecto e a imagem do retículo se deslocarem uma relativamente à outra existe paralaxe da imagem.

Para se evitar a existência de paralaxe a focagem deve constar de duas operações:

- 1) focagem do retículo;
- 2) focagem do objecto.

3.3.2. Condições para a medição de ângulos

Para que com um teodolito se possam medir realmente ângulos horizontais e verticais com vértice no ponto onde o teodolito está estacionado, devem verificar-se, além de algumas condições de construção que serão expostas mais à frente, as seguintes condições de estação:

- 1) o eixo principal deve estar vertical;
- 2) o eixo principal deve passar pelo ponto estação.

Estas condições têm de ser satisfeitas quando do estacionamento do teodolito no ponto estação, o que se consegue, com o auxílio de nivelas e dispositivos de centragem, mediante as seguintes operações:

a) **Centragem do teodolito** - o centro do teodolito e o ponto estação devem ficar sobre a mesma vertical. Em primeiro lugar é feita uma centragem aproximada no ponto estação com um fio de prumo e depois uma centragem rigorosa com um prumo óptico ou uma haste prumada.

b) **Verticalização do eixo principal** - esta verticalização é feita com o auxílio de nivelas solidárias com o eixo principal.

Na prática o estacionamento de um teodolito sobre um tripé é feito por fases:

- 1) antes de colocar o teodolito sobre o tripé, faz-se uma centragem aproximada deste com um fio de prumo;
- 2) depois coloca-se o instrumento no tripé e faz-se uma verticalização aproximada do eixo principal, com o auxílio da nivela esférica;
- 3) em seguida refina-se a centragem do teodolito com recurso a um prumo óptico ou uma haste prumada;
- 4) por fim faz-se a verticalização rigorosa do eixo principal com o auxílio da nivela tórica.

3.3.2.1. Medição de ângulos azimutais:

O limbo azimutal de um teodolito está solidário com a base deste e portanto permanece fixo durante as observações, variando as leituras com as pontarias feitas para as várias posições. A graduação do limbo azimutal é normalmente feita em graus e no sentido retrógrado (sentido dos ponteiros do relógio).

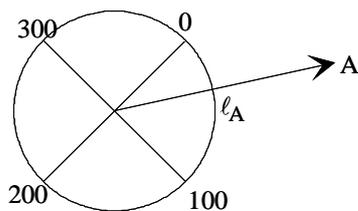


Figura 3.16 - Limbo azimutal de um teodolito. À pontaria para o ponto A corresponde a leitura azimutal l_A .

Para medir o ângulo azimutal formado pelas direcções [AB] e [AC], estaciona-se o teodolito no ponto A, aponta-se a luneta sucessivamente para B e C e faz-se, em cada uma das pontarias, uma leitura no limbo azimutal. A diferença das duas leituras dá o valor do ângulo azimutal.

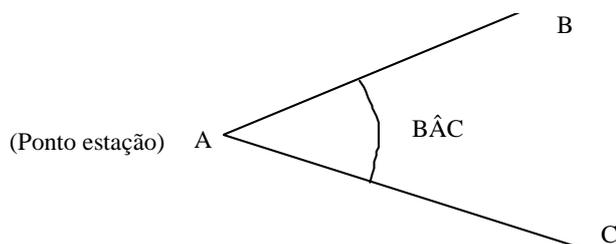


Figura 3.17 - Medição de um ângulo azimutal. É feita pontaria para B obtendo-se a leitura l_{AB} no limbo azimutal, de seguida faz-se pontaria para C obtendo-se a leitura no limbo azimutal correspondente a esta pontaria l_{AC} . O ângulo $B\hat{A}C = l_{AC} - l_{AB}$.

Para que, depois de estacionado o teodolito, se meçam realmente ângulos azimutais o teodolito deve satisfazer as seguintes condições de construção:

Condições de construção para medição de ângulos horizontais

- 1) O eixo principal do teodolito deve ser normal ao plano do limbo horizontal e passar pelo seu centro;
- 2) A graduação do limbo deve ser exacta ou, no caso de teodolitos electrónicos, o sistema electrónico de leitura do limbo deve ser exacto;
- 3) O eixo óptico deve intersectar o eixo principal;
- 4) O eixo secundário deve ser normal ao eixo principal;
- 5) O eixo óptico da luneta deve ser perpendicular ao eixo secundário.

Estas condições devem ser satisfeitas, embora, na prática, por vezes existam pequenos erros residuais. Na Tabela 3.1 indica-se a designação dos erros resultantes da sua não verificação. Sempre que se detecte que a amplitude dos erros é significativa, estes devem ser enviados à casa construtora para rectificação.

Tabela 3.1 - Erros resultantes das condições de construção não se verificarem perfeitamente

Condição de construção <u>não</u> satisfeita	Erro resultante
Perpendicularidade entre o eixo principal e o plano do limbo horizontal	Erro de inclinação do eixo principal sobre o plano do limbo
Passagem do eixo principal pelo centro do limbo azimutal	Erro de excentricidade da alidade
Graduação ou codificação do limbo exacta	Erro de graduação
Intersecção do eixo óptico com o eixo principal	Erro de excentricidade do eixo óptico
Perpendicularidade entre o eixo secundário e o eixo principal	Erro de inclinação do eixo secundário
Perpendicularidade entre o eixo óptico da luneta e o eixo secundário	Erro de colimação do eixo óptico

Quando se pretenderem fazer observações com grande precisão, pode-se eliminar o efeito dos erros através de métodos de observação.

Observações conjugadas

Fazer **observações conjugadas** consiste em fazer duas pontarias para um mesmo ponto, rodando o teodolito de 200 graus em torno do eixo principal e basculando a luneta em torno do eixo secundário. Tem-se assim numa das pontarias o círculo zenital à esquerda e na outra o círculo zenital à direita. Faz-se uma leitura azimutal correspondente a cada uma das pontarias (ℓ_1 e ℓ_2), leituras que devem diferir de aproximadamente 200 graus.

Leitura feita com o círculo zenital à esquerda (posição directa) $\rightarrow \ell_1$

Leitura feita com o círculo zenital à direita (posição inversa) $\rightarrow \ell_2$

A leitura correcta ℓ é obtida através de $\ell = \frac{\ell_1 + \ell_2 \pm 200}{2}$.

Com a utilização de observações conjugadas consegue-se eliminar o efeito do erro de excentricidade da alidade, do erro de excentricidade do eixo óptico, do erro de inclinação do eixo secundário e do erro de colimação do eixo óptico.

Quanto ao erro de graduação, existem métodos próprios para a atenuação do seu efeito sobre as medições, métodos que não vão ser aqui expostos, pois só são utilizados quando se pretende medir ângulos com grande precisão.

Quanto ao erro de inclinação do eixo principal sobre o plano do limbo, é um erro normalmente muito pequeno e de natureza semelhante ao erro de graduação, sendo portanto atenuado o seu efeito utilizando os mesmos métodos.

3.3.2.2. Medição de ângulos zenitais:

A distância zenital da direcção [CA], definida pelo centro do teodolito e pelo ponto A, a que se faz pontaria, determina-se com uma só leitura no limbo zenital (ver Figura 3.18).

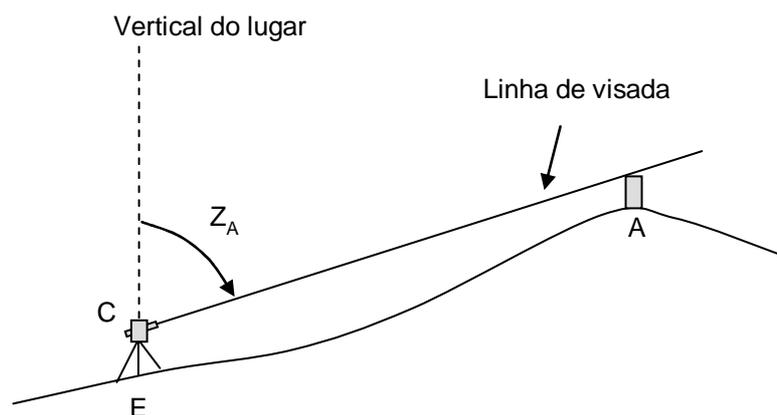


Figura 3.18 – Leitura zenital da estação E para o ponto A.

Para que a leitura obtida seja correcta é necessário que o índice esteja numa posição bem determinada, posição essa que, numa visada horizontal, dê origem a uma leitura zenital de exactamente 100 graus. Se tal não suceder diz-se que o teodolito tem **erro de índice**.

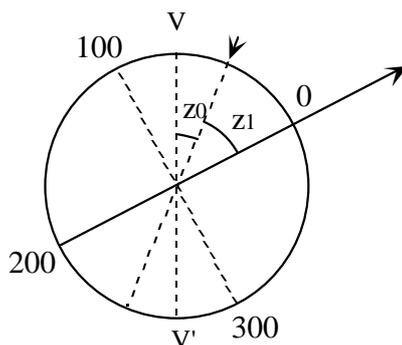


Figura 3.19 - Em virtude do índice de leitura se encontrar na posição indicada pela seta e não na vertical, existe erro de índice z_0 .

Para orientar o índice existe nos aparelhos mais antigos uma nivela que lhe está associada e que se chama **nivela de calagem zenital**. Ao medir-se um ângulo zenital tem de se ter o cuidado de calar sempre a nivela antes de fazer a leitura. Nos teodolitos mais modernos a nivela de calagem zenital foi substituída por um dispositivo pesado chamado dispositivo de colimação vertical automático, que orienta automaticamente o índice.

Tal como para a medição de ângulos azimutais também existem condições que devem ser satisfeitas para a correcta medição de ângulos zenitais.

Condições de construção para medição de ângulos zenitais

- 1) O eixo secundário deve ser perpendicular ao plano do limbo zenital e passar pelo seu centro.
- 2) A graduação do limbo zenital deve ser exacta, ou, no caso dos teodolitos electrónicos, o sistema de leitura deve originar leituras exactas.
- 3) O erro de índice deve ser nulo.

A não verificação das duas primeiras condições origina erros análogos aos seus homólogos na medição de ângulos horizontais.

Note-se, no entanto, que a medição de ângulos zenitais é menos precisa do que a medição de ângulos horizontais, devido ao efeito da refração atmosférica. O facto da densidade da atmosfera aumentar à medida que nos aproximamos da superfície da Terra, faz com que a linha de visada não seja uma linha recta mas sim uma curva com a concavidade voltada para baixo (ver Figura 3.20). Por este motivo, os efeitos dos erros resultantes da não verificação das duas primeiras condições de construção são desprezáveis.

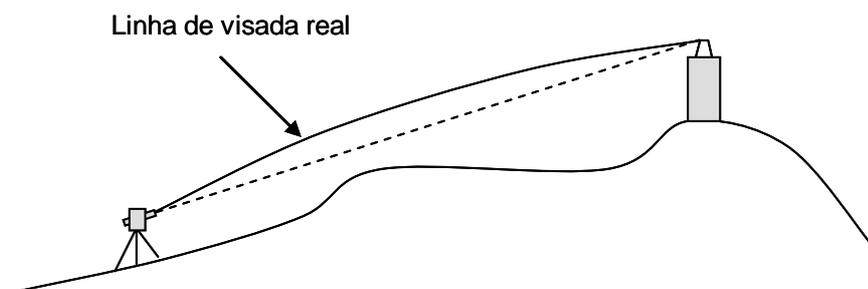


Figura 3.20 – A refração dos raios luminosos na atmosfera provoca a curvatura da linha de visada.

Estudo do erro de índice

Vamos de seguida provar que o efeito do erro de índice se elimina com leituras conjugadas.

Consideremos que, ao contrário do que acontece nas observações azimutais, em que o limbo está fixo e é o índice de leitura que se desloca com a alidade, o índice de leitura é fixo e é o limbo que se desloca com a luneta. Sendo assim, o limbo está graduado no sentido directo e a linha 0 → 200 graus tem a direcção da linha de pontaria.

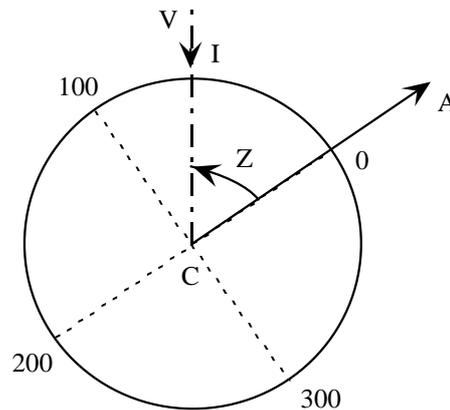


Figura 3.21 - Limbo zenital. V representa a vertical, I a posição do índice e z o ângulo zenital da direcção [CA].

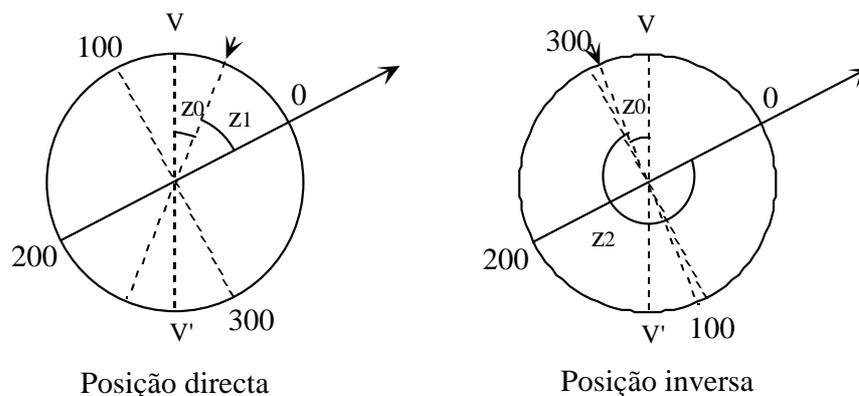


Figura 3.22 - Medição da distância zenital na posição directa e inversa, quando existe erro de índice z_0 .

Seja z_1 a amplitude da distância zenital obtida com o instrumento na posição directa, z_2 o valor obtido na posição inversa e z_0 o erro de índice. Assim, a distância zenital correcta z , pode ser obtida através de:

$$z = z_1 + z_0 \quad (3.1)$$

Na posição inversa tem-se que:(3.1)

$$z = 400 - (z_2 + z_0) \quad (3.2)$$

Igualando os segundos membros de (3.1) e (3.2) obtém-se

$$z_1 + z_0 = 400 - (z_2 + z_0)$$

Donde se pode deduzir que

$$z_0 = \frac{400 - (z_2 + z_1)}{2}$$

Somando membro a membro (1) e (2) vem

$$z = \frac{z_1 + (400 - z_2)}{2}$$

Expressão que permite calcular o valor do ângulo zenital não afectado do eventual erro de índice.

3.4. Medição de distâncias

Na medição de distâncias podemos considerar, quanto à precisão, medidas de baixa, média e alta precisão. Dentro da alta precisão podemos distinguir ainda a alta precisão topográfica e a muito alta precisão ou alta precisão geodésica.

Erros Toleráveis

Baixa precisão	1 ou 2 dm por 100 metros
Média precisão	1 ou 2 cm por 100 metros
Alta precisão	Topográfica1 ou 2 mm por 100 metros
	Geodésica1 ou 2 mm por 1000 metros

Vejamos agora como se distribuem as diferentes precisões nos trabalhos topográficos correntes:

A **baixa precisão** utiliza-se normalmente em levantamentos de pormenor e excepcionalmente em poligonação (poligonais expeditas ou de baixa precisão).

A **média precisão** utiliza-se em poligonação e excepcionalmente em levantamento de pormenor (em zonas urbanas onde os terrenos sejam muito caros).

A **alta precisão topográfica** utiliza-se na medição de bases em triangulações topográficas independentes.

A **alta precisão geodésica** utiliza-se na medição de bases de triangulações geodésicas.

Fundamentalmente existem dois processos de medição de distâncias: medição directa, caracterizada pela aposição à distância a medir de um escalão de medida e medição indirecta que consiste em medir outras grandezas relacionadas com a grandeza a medir e calcular esta a partir dessas grandezas. Dentre as medições indirectas podemos ainda distinguir:

- 1) medições por via trigonométrica;
- 2) medições por via electromagnética.

Para se atingir a mesma precisão, os métodos directos exigem material mais simples e mais barato do que os métodos indirectos, contudo estes são de mais rápida execução. Até à relativamente pouco tempo, apenas os métodos directos permitiam atingir alta precisão, no entanto, actualmente os distanciómetros electrónicos permitem atingir a alta e mesmo a muito alta precisão. Além disso, em certas circunstâncias, como por exemplo em terrenos muito acidentados ou em zonas de grande movimento, os métodos indirectos são mesmo os únicos de utilização possível.

Actualmente a medição de distâncias com os distanciómetros electrónicos substituiu quase totalmente todos os outros métodos de medição de distâncias, pois a medição é muito rápida, podem obter-se exactidões elevadas e o custo deste tipo de aparelhos tem descido consideravelmente, pelo que estes se tornaram de uso corrente.

3.4.1. Medição directa de distâncias

A medição directa de uma distância entre dois pontos faz-se comparando esta com o comprimento de um instrumento de medição (fita ou fio). Se a distância a medir for demasiado grande para ser medida apenas com uma fitada, é necessário traçar o alinhamento definido pelos pontos que definem a distância, dividindo-a em vários troços. Isto é feito recorrendo a hastes de madeira ou metal denominadas de bandeirolas.

O material fundamental a utilizar é constituído por fitas ou fios com características que diferem consoante a precisão a atingir.

Para **baixa precisão** o material a necessário consiste em:

- Fitas de plástico ou pano;
- Bandeirolas para os alinhamentos.

A colocação das bandeirolas que definem os extremos dos troços a medir é feita à vista desarmada, de modo que o observador veja sempre duas bandeirolas olhando para trás ou para a frente. As distâncias entre as bandeirolas devem ser sempre que possível aproximadamente o comprimento da fita.

Para **média precisão** o material a necessário consiste em:

- Fios de aço;
- Um óculo para os alinhamentos;
- Estacas com referências metálicas para definir os alinhamentos;
- Dinamómetro para medir a tensão na fita;
- Termómetro.

Em média precisão as fitas devem ser suspensas e a sua tensão medida com um dinamómetro, obrigando a que, na altura da medição, a tensão seja a recomendada pelo construtor. Os alinhamentos devem ser feitos com um óculo e definidos por meio de estacas, que na parte superior devem ter uma placa metálica com uma referência. Deve ainda medir-se a temperatura da fita na altura da medição com um termómetro.

Para **alta precisão** o material a necessário consiste em:

- Fitas ou fios de ínvar;
- Um óculo para os alinhamentos;
- Tripés com referências metálicas;
- Dispositivos tensores;
- Termómetro.

Os fios ou fitas a utilizar são de uma liga metálica de aço e níquel, chamada ínvar, que tem um baixo coeficiente de dilatação, sendo portanto muito menos sensíveis às variações de temperatura do que as fitas de aço. Os fios e as fitas não devem no entanto ser torcidos ou

sofrer choques, pois isso altera o seu comprimento e não devem ser enrolados em espiras pequenas para não se produzirem deformações.

Os fios têm sobre as fitas as vantagens de serem menos sensíveis à acção do vento mas, por outro lado, estes têm a vantagem de denunciar mais facilmente qualquer torção.

Os fios ou as fitas são estendidos, sendo mantidos esticados através de dispositivos de tensão (normalmente massas tensoras)

Os alinhamentos são feitos com um óculo e com tripés de referência, de modo que os pontos que delimitam os vários troços do comprimento a medir fiquem definidos com precisão.

As diferenças de nível entre as diferentes referências são calculadas com nivelamento de precisão.

Cada troço deve ser medido quatro vezes, com dois ou mais fios, sendo o valor adoptado para cada troço a média das medidas feitas.

3.4.1.1. Correções na medição directa de distâncias

Correcção de inclinação

Como a distância que se pretende calcular não é a distância medida no terreno (L) mas sim a distância horizontal (D), é necessário converter a distância inclinada na distância horizontal. Isso pode ser feito considerando o ângulo δ representado na Figura 3.22, que representa a inclinação da distância medida relativamente à horizontal, ou a diferença de nível entre os pontos A e B que delimitam a distância a medir. Assim,

$$D = L \cos \delta$$

Determinação de δ :

Em medições de baixa precisão faz-se com um teodolito uma visada para um ponto na vertical de B a uma distância de B igual à altura do instrumento colocado em A, e mede-se a distância zenital z , sendo depois $\delta = 100^\circ - z$.

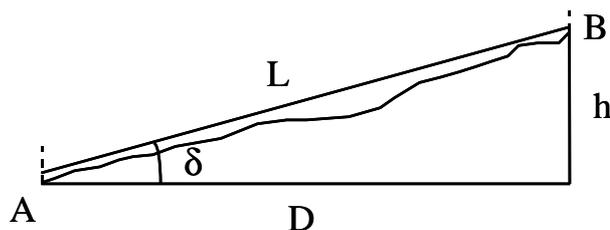


Figura 3.23 - D representa a distância horizontal entre os pontos A e B; e L a distância inclinada, medida por métodos directos.

Se o terreno não tiver toda a mesma inclinação e o comprimento a medir tiver sido dividido em vários troços, é necessário calcular o valor de δ para cada troço.

Em trabalhos de baixa precisão pode-se utilizar o processo indicado na Figura 3.24, em que se mede directamente a distância horizontal de cada troço. Para definir com mais precisão os pontos que definem os vários troços, pode utilizar-se um fio de prumo, de modo que a extremidade inferior fique exactamente sobre os pontos que definem a distância.

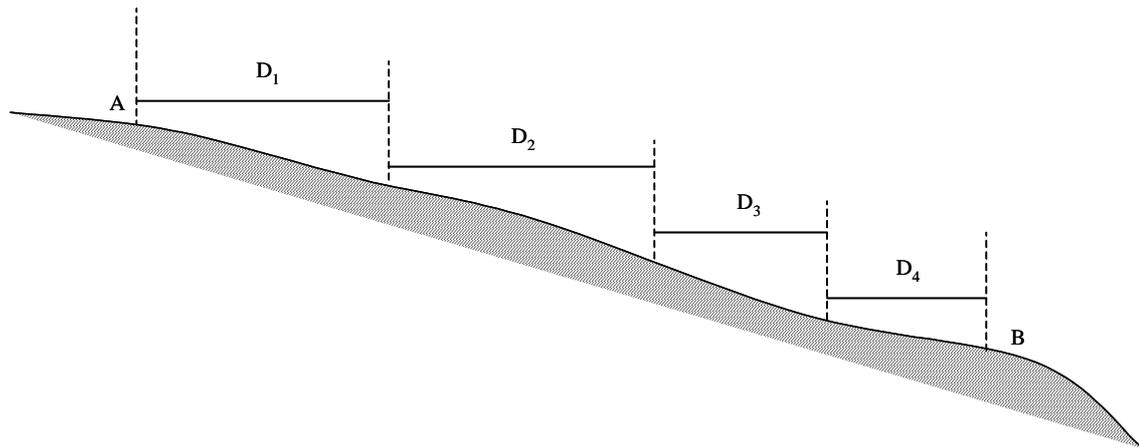


Figura 3.24 - Método de medição directa de distâncias que só pode ser utilizado quando é exigida baixa precisão.

Como o ângulo δ nunca se consegue determinar com grande precisão, em trabalhos de média e alta precisão determina-se a distância horizontal a partir do desnível h entre A e B (ver Figura 3.23).

Como

$$L^2 = D^2 + h^2$$

temos que

$$D = \sqrt{L^2 - h^2}$$

ou seja:

$$D = L \sqrt{1 - \frac{h^2}{L^2}} \quad (3.3)$$

Como $0 \leq \frac{h^2}{L^2} \leq 1$ podemos desenvolver $\sqrt{1 - \frac{h^2}{L^2}}$ em série de Taylor, em torno do ponto zero. Sendo o desenvolvimento de $f(x)$ em série de Taylor em torno de um ponto a dado por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

para $a=0$ vem:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

Para $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$, com $x = \frac{h^2}{L^2}$ tem-se:

$$\left(1 - \frac{h^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{L^2} - \frac{1}{8} \frac{h^4}{L^4} - \frac{1}{16} \frac{h^6}{L^6} - \dots = 1 - \left[\frac{1}{2} \frac{h^2}{L^2} + \frac{1}{8} \frac{h^4}{L^4} + \frac{1}{16} \frac{h^6}{L^6} + \dots \right]$$

Dentro do último parêntesis recto temos uma série convergente, pois é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h^2}{L^2}\right)^n$, que é convergente. Assim, substituindo em (3.3) tem-se:

$$D = L - \frac{h^2}{2L} - \frac{h^4}{8L^3} - \frac{h^6}{8L^5} - \dots$$

Que é a fórmula tradicionalmente utilizada para determinar a distância horizontal. Na prática, verifica-se que o termo à sexta é sempre desprezável e assim considera-se

$$D = L - \left(\frac{h^2}{2L} + \frac{h^4}{8L^3} \right)$$

Correcção de curvatura

Quando a fita usada para a medição da distância for apoiada em estacas, ficando portanto suspensa, é necessário aplicar ao valor medido uma correcção, sempre negativa, devido à curvatura da fita. Seja \overline{AB} a distância a medir e suponha-se que a fita é suspensa em dois suportes situados ao mesmo nível e submetida a uma tensão T . Ela toma, por estar sujeita ao seu próprio peso, a forma de uma curva, chamada catenária.

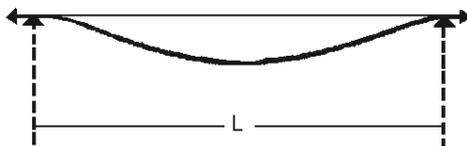


Figura 3.25 - Medição do comprimento L com uma fita apoiada nos pontos A e B , que definem os extremos do comprimento.

A correcção C a subtrair ao valor medido L , correspondente à diferença entre o valor do comprimento do arco medido (considerado, para o cálculo da correcção, com a forma de uma parábola) e à corda que lhe corresponde, é dada por:

$$C_c = \frac{L}{24} \left(\frac{pL}{T} \right)^2$$

sendo L o comprimento medido e p o peso da fita por metro. Esta expressão foi deduzida para o caso em que os pontos A e B , onde é apoiada a fita, estão ao mesmo nível. Normalmente, desde que a diferença de nível não seja muito grande, utiliza-se sempre esta expressão. No entanto, em medições de alta precisão, a correcção deve ser calculada com rigor, existindo tabelas para esse fim em que o valor da correcção é dado em função do desnível entre os pontos.

Correcção de temperatura

Como a temperatura a que se efectua a medição é normalmente diferente da temperatura de aferição da fita, à medida obtida é necessário aplicar uma correcção que é dada pela fórmula:

$$C_t = KL (t - t_0)$$

onde t_0 é a temperatura de aferição da fita, t a temperatura da fita no momento da medição, K o coeficiente de dilatação do metal de que é feita a fita e L o comprimento medido.

Nas medições de baixa precisão não é necessário ter em consideração a correcção de temperatura.

Existem ainda outras correcções a utilizar quando se fazem medições de alta precisão, sendo o valor dessas correcções calculadas através de tabelas fornecidas pelas casas construtoras.

3.4.2. Estadimetria

Este tipo de medição é realizado com o auxílio de uma estadia. Chama-se *estadia* a qualquer dispositivo óptico que permita definir duas linhas de visada concorrentes num ponto conhecido, chamado *centro da estadia* ou *centro de analatismo* e formando um ângulo conhecido, chamado *ângulo de analatismo* ou *ângulo paralático* (ver Figura 3.26).

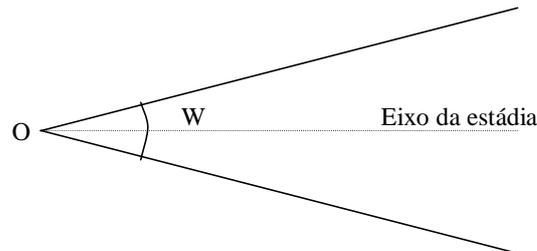


Figura 3.26 - O ponto O é o centro da estadia representada na figura e o ângulo w o ângulo de analatismo ou ângulo paralático.

Pode-se definir uma estadia com a luneta de um teodolito, desde que o seu retículo disponha de referências simétricas relativamente ao seu centro, como por exemplo os traços (1) e (2) ou (3) e (4) representados na Figura 3.27. Um teodolito com uma luneta que permita definir uma estadia (luneta estadiada) chama-se um *taqueómetro*.

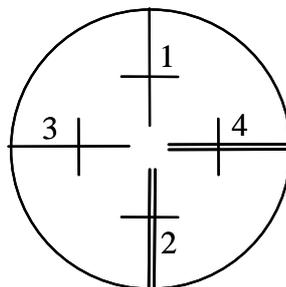


Figura 3.27 - Luneta estadiada. Os traços (1) e (2) são utilizados para miras verticais e os traços (3) e (4) para miras horizontais.

Princípio da estadia: a distância do centro de analatismo a uma mira colocada perpendicularmente ao eixo da estadia é directamente proporcional ao comprimento do segmento determinado na mira pelas linhas estadimétricas (Figura 3.28).

Como o triângulo $[AOB]$ é semelhante ao triângulo $[A'OB']$

$$\frac{D}{S} = \frac{D'}{S'} = k$$

sendo k a constante estadimétrica, tem-se então que:

$$D = KS$$

Observando a Figura 3.28 pode-se concluir que:

$$\frac{D}{S/2} = \cotg \frac{w}{2} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{2} \cotg \left(\frac{w}{2} \right) S$$

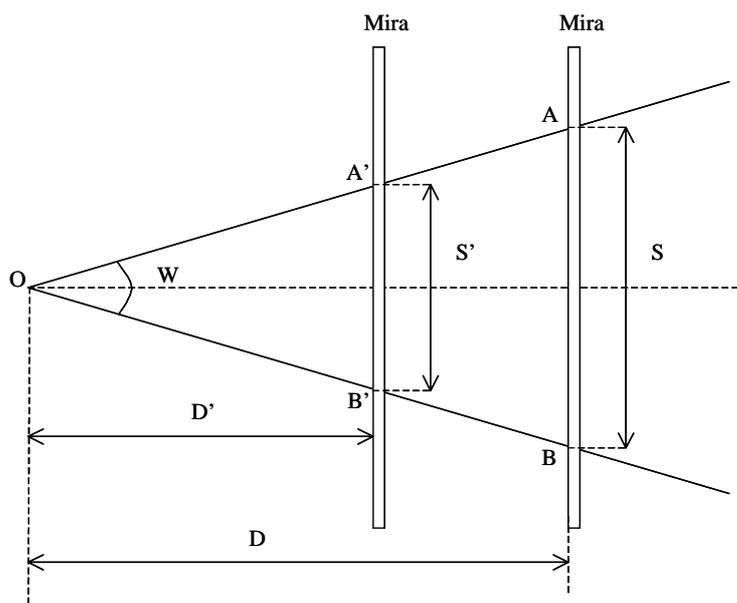


Figura 3.28 - Representação de uma mira colocada perpendicularmente a uma estadia em duas posições a distâncias diferentes D e D'.

logo:

$$K = \frac{1}{2} \cotg \left(\frac{w}{2} \right)$$

Normalmente os teodolitos são construídos de modo que $K = 100$ o que implica que $w = 0,6366^g$.

3.4.2.1. Fórmula taqueométrica da distância para mira vertical

O modo como foi enunciado o princípio da estadia implica a perpendicularidade entre o eixo da estadia e a mira. No entanto não é cómodo cumprir esta condição, sendo mais fácil colocar a mira vertical, para o que se pode utilizar uma nivela esférica adaptada à mira e que deve ser mantida calada enquanto o observador visa a mira.

É então necessário deduzir fórmulas que se possam aplicar a este caso, pois normalmente o eixo da estadia não fica perpendicular à mira.

Vamos supor que se pretende determinar a distância horizontal D entre os pontos A e B do terreno. Estaciona-se um taqueómetro em A e coloca-se uma mira em B, segura por um ajudante, que deve ter o cuidado de manter a nivela calada durante a medição, e portanto a mira vertical.

Aponta-se a luneta do taqueómetro para a mira e a estadia determina nela o segmento \overline{MN} (ver Figura 3.29). Para ser possível aplicar o princípio da estadia vamos considerar uma mira fictícia perpendicular em O ao eixo da estadia e seja $\overline{M'N'}$ o segmento que seria determinado pela estadia nessa mira fictícia.

Ter-se-ia então:

$$D = K \overline{M'N'}$$

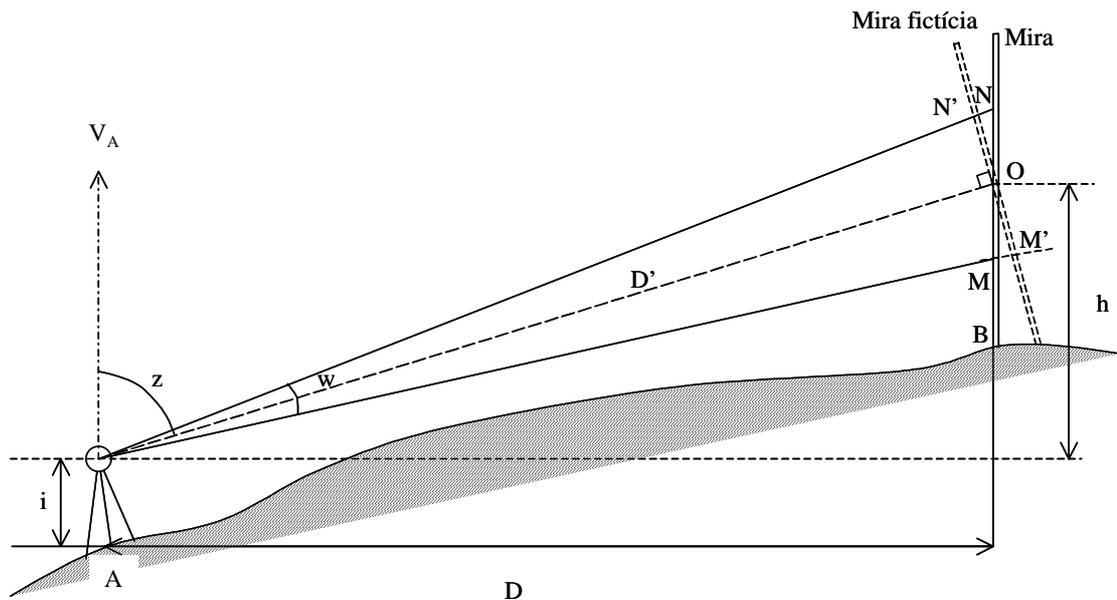


Figura 3.29 - Taqueómetro estacionado em A e uma mira colocada verticalmente no ponto B.

No entanto, sendo as leituras feitas na mira verdadeira, o segmento que se obtém é \overline{MN} e não $\overline{M'N'}$, contudo pode-se determinar $\overline{M'N'}$ em função de \overline{MN} e do ângulo zenital z .

Note-se que o triângulo $[NON']$ é aproximadamente rectangular em N' ($\hat{N}' = 100^\circ + \frac{w}{2}$, sendo habitualmente $\frac{w}{2} = 0.3183^\circ$) podemos então escrever:

$$\overline{M'N'} \cong \overline{MN} \sin z$$

donde:

$$D' \cong k \overline{MN} \sin z$$

e como $D = D' \sin z$ pode-se escrever

$$D = k \overline{MN} \sin^2 z$$

Na prática designa-se usualmente o segmento \overline{MN} por S e o produto KS por G (número gerador). Deste modo, sendo $G = KS$ e $K = 100$ tem-se:

$$\boxed{D = G \sin^2 z}$$

que se designa por **fórmula taqueométrica da distância para mira vertical**.

O comprimento S é obtido através das leituras na mira correspondentes aos traços superior (ℓ_s) e inferior (ℓ_i) do retículo, que definem a estadia (ver Figura 3.30). Então:

$$S = \ell_s - \ell_i$$

Pode ainda fazer-se uma leitura na mira correspondente ao traço médio do retículo, normalmente designada por leitura média (ℓ_m). Em rigor $\overline{OM} \neq \overline{ON}$, no entanto o erro daí resultante é desprezável. Sendo assim, podemos ainda calcular S através de:

$$S = 2(\ell_s - \ell_m) \quad \text{ou} \quad S = 2(\ell_m - \ell_i)$$

com:

$$l_m = \frac{l_s + l_i}{2}$$

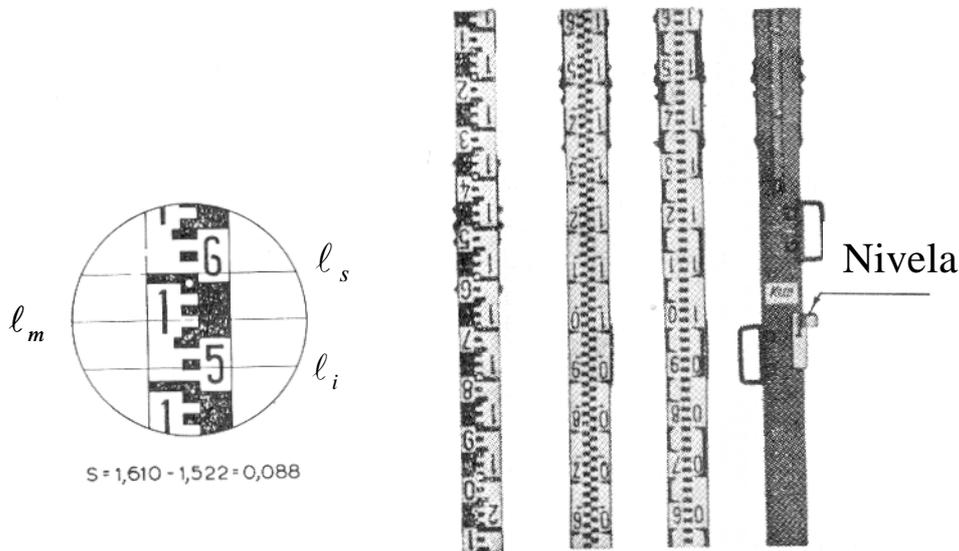


Figura 3.30 - Miras verticais e imagem de uma mira vista através da luneta de um taqueómetro.

Nota: O erro resultante de considerar recto o ângulo em N' é muito menor do que o que resulta dos erros que se cometem na medição de z e na leitura de \overline{MN} , não só porque a mira oscila durante a medição, mas também porque normalmente a graduação da mira não tem divisões inferiores ao centímetro.

3.4.2.2. Erros na medição estadimétrica

Analisemos as possíveis causas de erro para o cálculo da distância através de estadimetria. Podemos ter:

- Erro em K

Com o uso, pode acontecer que a constante estadimétrica passe a não ter o valor dado pelo construtor, se bem que esta possibilidade seja reduzida na maior parte dos instrumentos modernos. Quando o operador suspeite de um erro em K deve enviar o instrumento à casa construtora para rectificação.

- Erro na medição do ângulo zenital z (já estudado).

- Erros em S :
 - Erro de paralaxe da imagem
 - Erro de refração atmosférica
 - Erro de ondulação da imagem
 - Erro de mobilidade da mira
 - Erro de falta de verticalidade da mira

As precauções a tomar para obter maior precisão no processo estadimétrico incidem essencialmente na medição de S . Deste modo, deve ter-se o cuidado de verificar se não existe paralaxe da imagem, pelo processo já conhecido.

Quanto à influência da refração atmosférica, devido às diferenças de temperatura entre as camadas de ar mais próximas do solo e as camadas mais altas, um raio visual rasante

e outro mais elevado têm curvaturas diferentes, o que introduz um erro na leitura de S . Por este motivo deve evitar-se fazer leituras na mira junto ao solo.

A ondulação da imagem resulta da subida de ar quente, que origina variações de densidade e provoca uma ondulação da imagem da mira, não permitindo fazer leituras com precisão.

As miras vulgares são normalmente seguras por um operador (porta - miras) que as não consegue manter rigorosamente fixas, especialmente em dias de vento. Deste modo, como as leituras na mira não são efectuadas simultaneamente, (nada garante que, por exemplo, quando se faz a leitura do fio inferior a leitura correspondente ao fio superior seja a mesma que foi feita) pode resultar um erro para o valor de S .

A verticalidade da mira consegue-se com o auxílio de uma nivela esférica que lhe é solidária, no entanto, pode acontecer que esta não esteja calada quando são feitas as leituras e consequentemente a mira não esteja vertical.

3.4.3. Medição electrónica de distâncias

Com a utilização de distanciómetros consegue-se, rápida e comodamente, obter alta e muito alta precisão na medição de distâncias curtas ou longas. O seu grande automatismo reduz a importância do observador, uma vez que este se limita praticamente a orientar a direcção do feixe emitido pelo instrumento e a disposição dos reflectores.

3.4.3.1. Funcionamento de um distanciómetro electrónico

A medição de distâncias com distanciómetros electrónicos é feita colocando o aparelho numa das extremidades da distância a medir e na outra extremidade um reflector, que enviará a onda electromagnética emitida pelo distanciómetro de volta ao aparelho. O princípio teórico de medição da distância (D), entre o distanciómetro e o reflector, deriva da relação que existe entre a distância, o tempo de trajecto (t) e a velocidade (v) de uma onda electromagnética que a percorra, sendo

$$D = t \times v$$

No entanto, nos instrumentos modernos, o tempo não é medido directamente, sendo a distância medida com base no comprimento de onda λ de uma modulação do feixe emitido.

A maior parte dos instrumentos electro-ópticos modernos utilizam luz visível de lasers Hélio-Néon com $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$, ou luz infravermelha não visível de díodos de Arsenieto de Gálio com $\lambda = 0.9 \mu\text{m}$.

Na maioria dos sistemas electro-ópticos, o instrumento emite um feixe luminoso, cuja intensidade é modulada electronicamente. Esta modulação sinusoidal da intensidade da luz é equivalente a ligar e desligar uma luz com um interruptor, e é feita de modo a variar de zero (correspondente aos 0°) até um máximo de luz aos 90° , voltando novamente a zero aos 180° , a um segundo máximo aos 270° e a zero aos 360° (ver Figura 3.31).

O distanciómetro transmite o feixe de luz modulado para o reflector, que o reflecte de volta ao emissor, onde é convertido num sinal eléctrico, permitindo fazer uma comparação de fase entre o sinal emitido e recebido.

A distância é obtida determinando o número inteiro m de vezes que o comprimento de onda da modulação cabe na distância percorrida pelo feixe, mais a parte fraccionária p , que é

medida através da diferença de fase entre o sinal modulado transmitido e o sinal recebido. Deste modo, como a distância a medir é percorrida duas vezes, temos (ver Figura 3.32):

$$D = \frac{1}{2}(m\lambda + p\lambda) \quad (3.4)$$

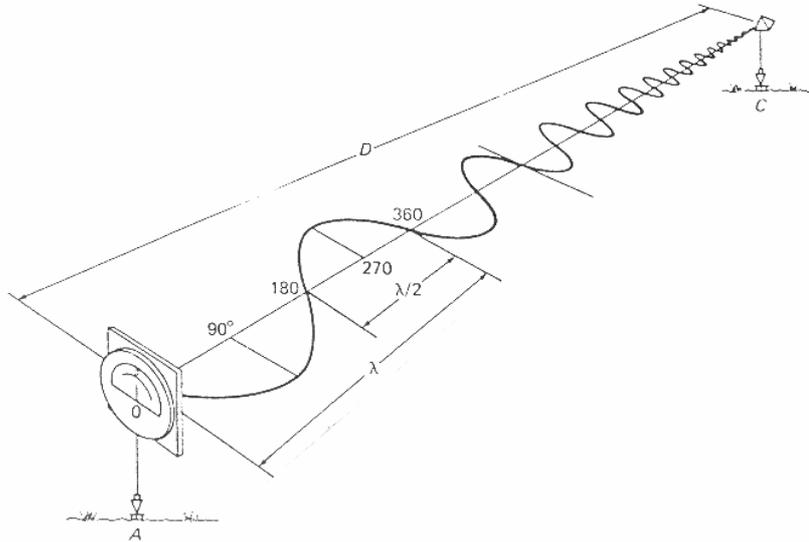


Figura 3.31 - Modulação do sinal emitido pelo distanciômetro (extraído de Davis et. al., 1981).

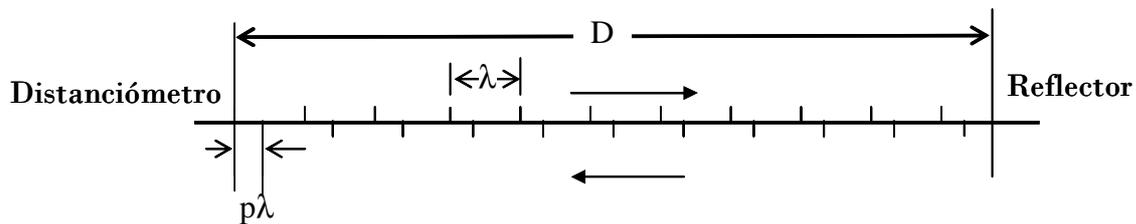


Figura 3.32 - Princípio de medição de distâncias com distanciômetros (extraído de Davis et. al., 1981).

Sendo c a velocidade da luz durante a medição e T o período da modulação temos:

$$\lambda = cT$$

Como $T = \frac{1}{f}$, sendo f a frequência da modulação, temos:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (3.5)$$

A velocidade de propagação da luz é obtida utilizando o índice de refração n da atmosfera no instante da medição, através de:

$$n = \frac{c_o}{c}$$

sendo $c_0 = 299792,5$ km/s a velocidade da luz no vazio. O índice de refração é determinado em função da temperatura, pressão e humidade atmosférica e do comprimento de onda da portadora. Desta forma, a equação (3.5) pode ser reescrita da forma:

$$\lambda = \frac{c_0}{fn}$$

Substituindo em (3.4) λ pelo valor encontrado, obtemos para a distância D , a medir, a expressão:

$$D = m \frac{c_0}{2fn} + p \frac{c_0}{2fn}$$

As fontes de erro neste processo de medição são resultantes, principalmente, de três causas:

- dificuldade em estabelecer o ponto exacto, no interior do instrumento, a partir do qual é efectuada a medição
- variação das condições atmosféricas ao longo do trajecto percorrido pela onda electromagnética
- incerteza associada ao processo de medição

Os reflectores utilizados têm a forma de um canto de cubo de faces planas, para que a onda reflectida seja paralela à onda emitida. Note-se que é importante utilizar o tipo adequado de reflector para um dado instrumento, por forma a evitar a existência de erros sistemáticos na medição da distância, resultantes das diferentes densidades do vidro utilizado no reflector e do caminho óptico nele percorrido.

Alguns distanciómetros permitem medir distâncias relativamente curtas (até cerca de 1000m) sem a utilização de reflectores, visando apenas uma superfície como madeira, tijolo ou metal. Esta capacidade é muito útil quando é necessário medir distâncias a pontos não acessíveis.

3.4.3.2. Cálculo de distâncias horizontais e verticais

As distâncias medidas com os distanciómetros são distâncias inclinadas, pelo que é necessário entrar com a inclinação da visada para se obterem distâncias horizontais e verticais.

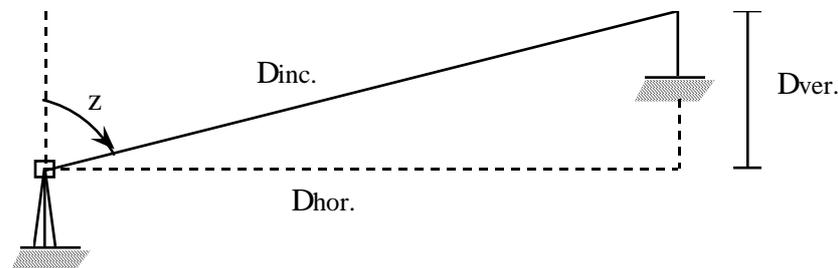


Figura 3.33 - Distâncias que se podem obter directamente numa estação total.

A utilização de uma estação total (distanciómetro incorporado num teodolito) permite obter imediatamente, para além da distância inclinada ($D_{incl.}$), a distância horizontal (D_{hor}) e vertical (D_{ver}) do distanciómetro ao reflector através das expressões:

$$D_{hor.} = D_{incl.} \sin z$$

$$D_{ver.} = D_{incl.} \cos z$$

Nota: As distâncias $D_{hor.}$, $D_{ver.}$ e D_{incl} indicadas são definidas pelo centro do distanciômetro e pelo reflector, e não as distâncias entre os pontos onde estes são colocados. Para a obtenção destas últimas é necessário ter em consideração as alturas do distanciômetro e do reflector.

3.5. Métodos de determinação de coordenadas

Os métodos para a determinação de coordenadas de pontos do terreno são basicamente:

- Irradiação
- Triangulação
- Intersecções
- Poligonação

3.5.1. Irradiação

Dadas as coordenadas de dois pontos A e B pretende determinar-se as coordenadas do ponto C. Para esse efeito mede-se a distância \overline{BC} e, estacionando um teodolito no ponto B e fazendo pontarias para A e C, determina-se o ângulo azimutal \widehat{ABC} .

As coordenadas de A e B permitem obter o rumo (BA) e a distância \overline{AB} . É então calculado o rumo (BC) adicionando a (BA) o ângulo \widehat{ABC} . Finalmente, as coordenadas de C são obtidas a partir das coordenadas de B, da distância \overline{BC} e do rumo (BC) (ver Figura 3.34).

Conhecido: M_A, P_A, M_B, P_B

Elementos medidos: $\widehat{ABC}, \overline{BC}$

Pedido: M_C, P_C

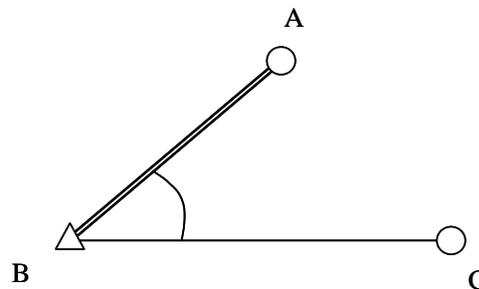


Figura 3.34 – Irradiação das coordenadas de B para C.

3.5.2. Triangulação

Neste método, estacionam-se todos os vértices dos triângulos, efectuando-se, em seguida, uma compensação dos valores angulares obtidos. O procedimento a seguir é:

- Estacionam-se todos os vértices do triângulo e medem-se os seus três ângulos internos;
- Faz-se a compensação dos valores angulares obtidos, distribuindo o erro igualmente pelos três ângulos;
- Determinam-se as coordenadas do ponto pretendido.

Considere-se então um triângulo [ABC] (ver Figura 3.35). São conhecidas as coordenadas dos pontos B e C e mediram-se os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} . Pretendem-se calcular as coordenadas do ponto A.

Conhecido: M_B, P_B, M_C, P_C

Elementos medidos: $\hat{A}^*, \hat{B}^*, \hat{C}^*$

Pedido: M_A, P_A

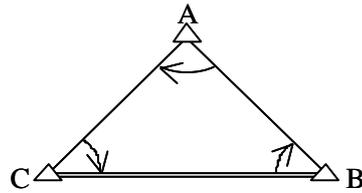


Figura 3.35 - Triângulo [ABC].

1) Cálculo de (BC) e de \overline{BC} .

$$\overline{BC} = \sqrt{(M_C - M_B)^2 + (P_C - P_B)^2} \quad \text{tg}(BC) = \frac{M_C - M_B}{P_C - P_B}$$

2) Compensação angular

Calcula-se o erro de fecho angular ε_a através de:

$$\varepsilon_a = 200 - \hat{A}^* - \hat{B}^* - \hat{C}^*$$

Divide-se depois este valor pelos 3 ângulos, adicionando-se algebricamente a cada um deles uma correcção a_i ($i = 1, \dots, 3$), tal que:

$$a_1 \square a_2 \square a_3 \square \varepsilon_a/3$$

obtendo-se então os ângulos compensados:

$$\hat{A} = \hat{A}^* + a_1$$

$$\hat{B} = \hat{B}^* + a_2$$

$$\hat{C} = \hat{C}^* + a_3$$

3) Determinação de \overline{BA} e \overline{CA}

$$\overline{BA} = \overline{BC} \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$$

$$\overline{CA} = \overline{BC} \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}}$$

4) Determinação de (BA) e (CA)

$$(BA) = (BC) + \hat{B}$$

$$(CA) = (CB) - \hat{C}$$

5) Determinação das coordenadas de A

a) a partir de B

$$M_A = M_B + \overline{BA} \sin(BA)$$

$$P_A = P_B + \overline{BA} \cos(BA)$$

b) a partir de C

$$M_A = M_C + \overline{CA} \sin(CA)$$

$$P_A = P_C + \overline{CA} \cos(CA)$$

3.5.3. Intersecções

Existem três tipos de intersecções:

- intersecção directa
- intersecção lateral
- intersecção inversa

3.5.3.1. Intersecção directa e lateral

Na intersecção directa não se estaciona o vértice a determinar Q , estacionando-se dois vértices de coordenadas conhecidas A e B e medindo-se os ângulos azimutais α e β .

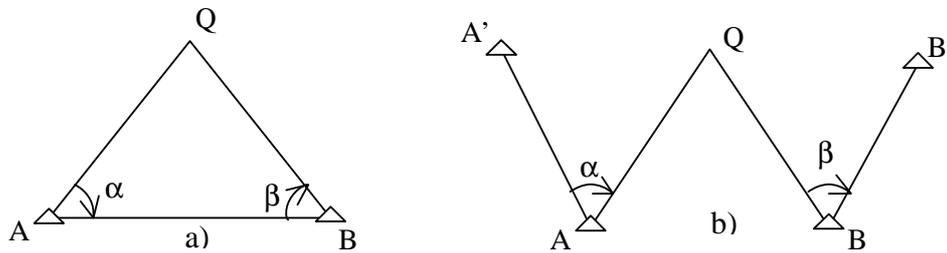


Figura 3.36 – Duas configurações possíveis de uma intersecção directa: a) e b)

Convém que o ângulo em $B\hat{Q}A$ esteja compreendido entre aproximadamente 50° e 150° , pois um ângulo muito agudo ou muito obtuso pode conduzir a grandes erros no posicionamento do vértice.

Na intersecção lateral estaciona-se o vértice de coordenadas a determinar, Q , e um dos vértices de coordenadas conhecidas, que designaremos por A , sendo medidos dois ângulos azimutais α e γ .

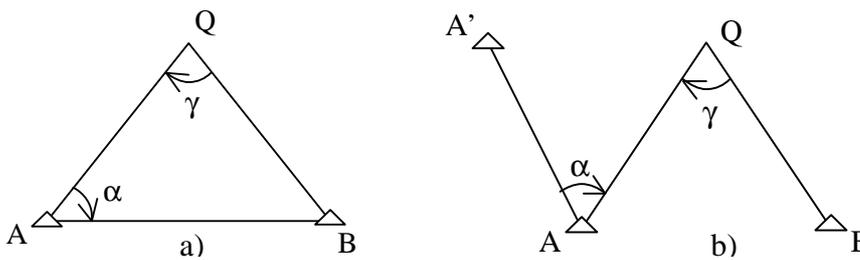


Figura 3.37 - Duas configurações possíveis de uma intersecção lateral: a) e b)

É evidente que tanto a intersecção directa como a lateral se podem resolver através da resolução de triângulos, no entanto, estas intersecções resolvem-se normalmente recorrendo às fórmulas que a seguir se deduzem, diferendo as intersecções directas das laterais apenas na forma como são calculados os rumos dos lados.

Através das observações efectuadas determinam-se (AQ) e (BQ)

Intersecção Directa	Caso a) da Figura 3.36	$(AQ) = (AB) - \alpha$	$(BQ) = (BA) + \beta$
	Caso b) da Figura 3.36	$(AQ) = (AA') + \alpha$	$(BQ) = (BB') - \beta$
Intersecção Lateral	Caso a) da Figura 3.37	$(AQ) = (AB) - \alpha$	$(QB) = (QA) - \gamma$
	Caso b) da Figura 3.37	$(AQ) = (AA') + \alpha$	$(QB) = (QA) - \gamma$

Recordando que, para dois pontos genéricos X e Y , se tem:

$$M_Y - M_X = (P_Y - P_X) \operatorname{tg}(XY) \quad \text{e} \quad P_Y - P_X = (M_Y - M_X) \operatorname{cotg}(XY)$$

então:

$$\begin{aligned}
& M_B - M_A \\
&= \left(M_Q - M_A \right) - \left(M_Q - M_B \right) \\
&= \left(P_Q - P_A \right) \operatorname{tg}(AQ) - \left(P_Q - P_B \right) \operatorname{tg}(BQ) \\
&= \left(P_Q - P_A \right) \operatorname{tg}(AQ) - \left[\left(P_Q - P_A \right) - \left(P_B - P_A \right) \right] \operatorname{tg}(BQ) \\
&= \left(P_Q - P_A \right) \left[\operatorname{tg}(AQ) - \operatorname{tg}(BQ) \right] + \left(P_B - P_A \right) \operatorname{tg}(BQ)
\end{aligned}$$

donde

$$P_Q - P_A = \frac{\left(M_B - M_A \right) - \left(P_B - P_A \right) \operatorname{tg}(BQ)}{\operatorname{tg}(AQ) - \operatorname{tg}(BQ)} \quad \text{e} \quad M_Q - M_A = \left(P_Q - P_A \right) \operatorname{tg}(AQ)$$

Estas fórmulas não podem no entanto ser usadas quando (AQ) ou (BQ) tomarem o valor 100° ou 300° . Nestas condições, podem substituir-se por outras em que entrem co-tangentes:

$$\begin{aligned}
& P_B - P_A \\
&= \left(P_Q - P_A \right) - \left(P_Q - P_B \right) \\
&= \left(M_Q - M_A \right) \operatorname{cotg}(AQ) - \left(M_Q - M_B \right) \operatorname{cotg}(BQ) \\
&= \left(M_Q - M_A \right) \operatorname{cotg}(AQ) - \left[\left(M_Q - M_A \right) - \left(M_B - M_A \right) \right] \operatorname{cotg}(BQ) \\
&= \left(M_Q - M_A \right) \left[\operatorname{cotg}(AQ) - \operatorname{cotg}(BQ) \right] + \left(M_B - M_A \right) \operatorname{cotg}(BQ)
\end{aligned}$$

donde

$$M_Q - M_A = \frac{\left(P_B - P_A \right) - \left(M_B - M_A \right) \operatorname{cotg}(BQ)}{\operatorname{cotg}(AQ) - \operatorname{cotg}(BQ)} \quad \text{e} \quad P_Q - P_A = \left(M_Q - M_A \right) \operatorname{cotg}(AQ)$$

Verificação de cálculos: A partir das coordenadas de B e de Q , calculadas a partir do ponto A , determina-se o rumo $(BQ)^*$. Em seguida, compara-se o rumo $(BQ)^*$ com o rumo (BQ) calculado a partir das observações. A diferença $(BQ) - (BQ)^*$ deve ser nula.

3.5.3.2. Intersecção inversa

Neste tipo de intersecção estaciona-se o vértice de coordenadas a determinar, O , visando-se três vértices de coordenadas conhecidas, que designamos por A , B e C , sendo medidos dois ângulos azimutais α e β .

É de notar que os quatro pontos A , B , C e O não podem pertencer a uma mesma circunferência. Mostra-se que, nessas condições, $\hat{BAC} + \alpha + \beta = 200^\circ$.

Esquema geral da resolução de uma intersecção inversa

Na Figura 3.38 os pontos A , B e C representam os três vértices observados de coordenadas conhecidas e O o ponto de coordenadas a determinar, a partir do qual são observados os ângulos α e β .

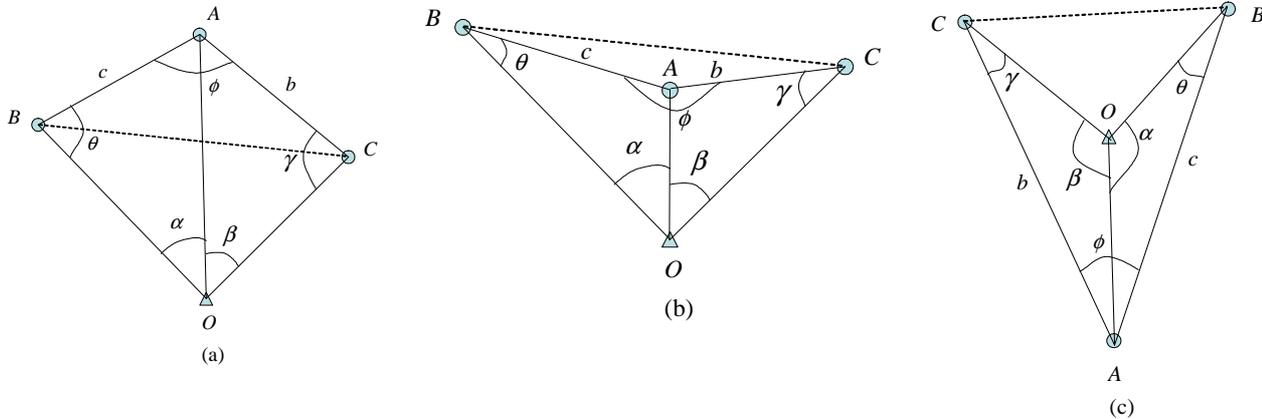


Figura 3.38 - Três casos possíveis para a intersecção inversa.

A obtenção (e a confirmação) das coordenadas planimétricas de O recorre à determinação das distâncias e dos rumos das direcções $[AO]$, $[BO]$ e $[CO]$. Para tal, é necessário determinar os ângulos θ e γ indicados na Figura 3.38.

Seja a quantidade auxiliar R definida por

$$R = \theta + \gamma$$

Nas figuras anteriores, verifica-se, no polígono $[OBAC]$, que

$$R = 400^g - (\phi + \alpha + \beta),$$

uma vez que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 400^g .

Em qualquer um dos três casos indicados, aplicando a analogia dos senos no triângulo $[OAC]$, obtém-se

$$\frac{\overline{AO}}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta},$$

onde $b = \overline{AC}$. Do mesmo modo, utilizando a analogia dos senos, do triângulo $[OBA]$ vem

$$\frac{\overline{AO}}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \alpha},$$

onde $c = \overline{AB}$.

Resolvendo as duas últimas equações em ordem à distância \overline{AO} e igualando, vem

$$\sin \theta = \frac{b \sin \gamma \sin \alpha}{c \sin \beta}.$$

Uma vez que $\theta = R - \gamma$, a equação anterior transforma-se em

$$\sin(R - \gamma) = \frac{b \sin \gamma \sin \alpha}{c \sin \beta},$$

ou seja,

$$\sin R \cos \gamma - \cos R \sin \gamma = \frac{b \sin \gamma \sin \alpha}{c \sin \beta}.$$

Dividindo ambos os membros da última equação por $\sin R \sin \gamma$, obtém-se

$$\cot \gamma = \cot R + \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta \sin R}.$$

Desta forma, o processo de resolução de uma intersecção inversa segue os seguintes passos:

Algoritmo

1. Calcular os ângulos α e β a partir das leituras azimutais: $\alpha = l_{OA} - l_{OB}$ e $\beta = l_{OC} - l_{OA}$.
2. Calcular as distâncias $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$.
3. Determinar o ângulo ϕ , utilizando, por exemplo, a diferença entre rumos: $\phi = (AB) - (AC)$.
4. Determinar R por meio de $R = 400^g - (\phi + \alpha + \beta)$.
5. Tendo em atenção que $0 < \gamma < 200^g$, determinar γ utilizando $\cot \gamma = \cot R + \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta \sin R}$.
6. Calcular $\theta = R - \gamma$.
7. Determinar a distância \overline{AO} utilizando $\overline{AO} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$ (e, se pretendido, confirmar o cálculo por meio de $\overline{AO} = \frac{c \sin \theta}{\sin \alpha}$).
8. Calcular o rumo (AO) , por intermédio $(AO) = (AC) + \hat{CAO}$, sendo $\hat{CAO} = 200^g - \gamma - \beta$.
9. Calcular o rumo inverso (OA) por intermédio de $(OA) = (AO) \pm 200^g$.
10. Determinar (OC) através de $(OC) = (OA) + \beta$.
11. Calcular o rumo inverso (CO) através de $(CO) = (OC) \pm 200^g$.
12. Se pretendido, confirmar os cálculos por meio de $(CA) = (CO) + \gamma$.
13. Determinar \overline{CO} pela analogia dos senos: $\overline{CO} = \frac{b \sin \hat{CAO}}{\sin \beta}$.
14. Calcular as coordenadas planimétricas de O por meio de $M_o = M_c + \overline{CO} \sin(CO)$ e de $P_o = P_c + \overline{CO} \cos(CO)$.

15. Se pretendido, confirmar cálculos a partir de $M_o = M_A + \overline{AO} \sin(AO)$ e de $P_o = P_A + \overline{AO} \cos(AO)$, sendo \overline{AO} obtido por meio da analogia dos senos: $\overline{AO} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$.

3.5.4. Poligonação

A poligonação consiste no estabelecimento, observação e cálculo de poligonais. Uma poligonal é formada por um conjunto de segmentos de recta contíguos, que formam uma linha poligonal (donde deriva o nome do método). A observação de uma poligonal consiste em medir o comprimento dos seus lados e a amplitude dos ângulos por eles formados.

A poligonação é um método de cálculo de coordenadas, que, para a obtenção do mesmo número de pontos de apoio, é de execução muito mais rápida do que a triangulação e as intersecções, sendo no entanto mais sujeito a erros do que estes. Assim, quando a precisão não é um factor primordial, pode utilizar-se a poligonação para o adensamento da rede de apoio topográfico. A poligonação também é normalmente utilizada em trabalhos onde é necessário fazer o levantamento de faixas de terreno compridas e estreitas, como, por exemplo, no caso do traçado de estradas, caminhos de ferro, redes de saneamento, linhas de alta tensão, etc.

Como norma, uma rede de poligonais deve sempre apoiar-se numa triangulação topográfica. Neste caso, essa rede é composta por poligonais principais (poligonais que ligam entre si vértices da triangulação) e poligonais secundárias (que ligam entre si vértices das poligonais principais ou um vértice de uma poligonal principal e um vértice de uma triangulação).

Quando uma poligonal não for apoiada em vértices de uma triangulação deve ser apoiada em vértices de outras poligonais, ou ser uma poligonal fechada sobre si mesma (poligonal em que o primeiro vértice coincide com o último).

Normas para o estabelecimento de uma poligonal

O estabelecimento de uma poligonal deve ser feito após um prévio reconhecimento da zona, dependendo o seu traçado do acidentado do terreno e do facto de haver ou não visibilidade entre os pontos sucessivos da poligonal. Desta forma, não se podem estabelecer normas rígidas para o traçado de poligonais. No entanto, para se melhorar a precisão dos resultados obtidos, convém que a escolha dos vértices tenha em atenção os seguintes factores:

- 1) O comprimento dos lados deve ser tão grande quanto possível, a fim de diminuir o número de vértices e, conseqüentemente, atenuar a influência dos erros cometidos nas observações. O valor deste comprimento é evidentemente limitado, não só pelo acidentado do terreno, como pelas características dos instrumentos utilizados;
- 2) O comprimento dos lados de uma poligonal deve ser, tanto quanto possível, da mesma ordem de grandeza, evitando-se portanto a existência simultânea de lados compridos e curtos;
- 3) Não são aconselhados desníveis acentuados entre vértices consecutivos de uma poligonal.

3.5.4.1. Cálculo e compensação de uma poligonal

Analisaremos o cálculo de uma poligonal com vértices A, 1, 2, 3 e B, sendo os vértices A e B vértices de uma triangulação que servem de pontos de apoio da poligonal. Conhecem-se ainda as coordenadas dos vértices A' e B', ou os rumos (AA') e (BB').

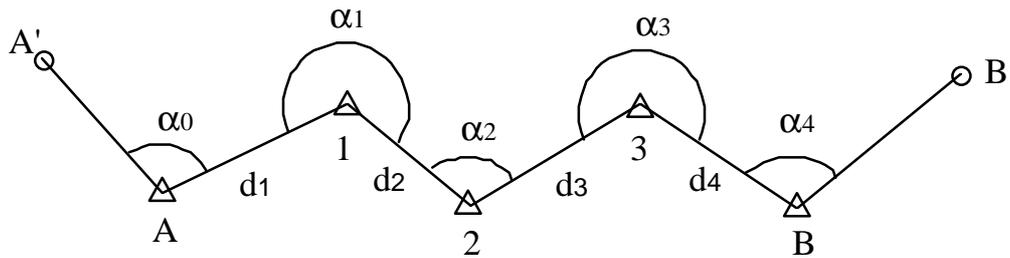


Figura 3.39 - Uma linha poligonal apoiada nos vértices A e B de uma triangulação.

Nesta poligonal medem-se os ângulos α_0 , α_1 , α_2 , α_3 e α_4 (5 ângulos) e os lados d_1 , d_2 , d_3 e d_4 (4 lados). Note-se que, para determinar as coordenadas dos vértices 1, 2 e 3, eram apenas necessárias as medidas de 3 ângulos (α_0 , α_1 , e α_2) e 3 lados (d_1 , d_2 e d_3), ficando assim 3 medidas em excesso, que permitem fazer o ajustamento da poligonal.

De um modo geral, no caso de uma poligonal apoiada, sendo n o número de vértices da poligonal (contando com os vértices de apoio A e B) medem-se n ângulos e $(n-1)$ lados, obtendo-se no total $(2n-1)$ medidas. Como para a determinação das coordenadas dos $(n-2)$ vértices da poligonal a calcular são suficientes $(n-2)$ ângulos e $(n-2)$ lados, no total $(2n-4)$ medidas, sobram 3 medidas para o ajustamento da poligonal.

No caso de uma poligonal fechada sobre si mesma, tudo se passa de forma semelhante, havendo igualmente três medidas em excesso para o ajustamento. Note-se que, nestas poligonais, como o vértice final é coincidente com o vértice inicial, este é contado duas vezes na determinação de n .

O ajustamento de uma poligonal pode ser feita por processos rigorosos, nomeadamente utilizando o método dos mínimos quadrados. No entanto, também se pode utilizar um método expedito para fazer o seu cálculo e ajustamento, que será o método estudado no âmbito deste curso.

Neste método, o cálculo e o ajustamento de uma poligonal são feitos simultaneamente e em duas fases:

1ª fase: Nesta fase faz-se o cálculo dos rumos provisórios dos lados da poligonal; calcula-se o erro de fecho angular, que não deve exceder determinadas tolerâncias; e finalmente os rumos definitivos.

2ª fase: Na segunda fase calculam-se as coordenadas relativas provisórias; o erro de fecho linear, que também não deve exceder determinadas tolerâncias; e as coordenadas definitivas dos vértices da poligonal.

A classificação de uma poligonal quanto à precisão depende da precisão com que foram medidos os ângulos formados pelos vários segmentos da poligonal e o comprimentos dos seus lados, dividindo-se estas normalmente em três tipos: poligonais de baixa precisão ou expeditas, poligonais de média precisão e poligonais de alta precisão.

3.5.4.2. Esquema geral de resolução de uma poligonal

Vamos apresentar este esquema supondo que a poligonal a resolver é uma poligonal aberta, apoiada nos pontos A e B de uma triangulação (ver Figura 3.39). A adaptação deste tipo de poligonal a qualquer outro tipo (por exemplo poligonais fechadas – poligonais em que os vértices de orientação A' e B' são coincidentes - ou poligonais fechadas sobre si mesmas) é

simples, requerendo apenas uma adaptação em relação aos vértices inicial e final e aos ângulos a medir.

Dados:	Quantidades observadas:		Pedidos:
	leituras azimutais:	distâncias:	
M_A, P_A	$\ell_{AA'}, \ell_{A1}$	d_1	M_1, P_1
$M_{A'}, P_{A'}$	ℓ_{1A}, ℓ_{12}	d_2	M_2, P_2
M_B, P_B	ℓ_{21}, ℓ_{23}	d_3	M_3, P_3
$M_{B'}, P_{B'}$	ℓ_{32}, ℓ_{3B}	d_4	
	$\ell_{B3}, \ell_{BB'}$		

Começa-se por calcular os ângulos α_i ($i = 0, \dots, n-1$) a partir das leituras azimutais:

$$\alpha_0 = \ell_{A1} - \ell_{AA'}$$

$$\alpha_1 = \ell_{12} - \ell_{1A}$$

$$\alpha_2 = \ell_{23} - \ell_{21}$$

$$\alpha_3 = \ell_{3B} - \ell_{32}$$

$$\alpha_4 = \ell_{BB'} - \ell_{B3}$$

1ª FASE: CÁLCULO dos rumos

1) Cálculo dos rumos (AA') e (BB'):

Com as coordenadas dos vértices A, A', B e B' determinam-se os rumos (AA') e (BB').

$$tg(AA') = \frac{M_{A'} - M_A}{P_{A'} - P_A}$$

$$tg(BB') = \frac{M_{B'} - M_B}{P_{B'} - P_B}$$

2) Cálculo de (BB')*

Designando por (BB')* o rumo (BB') calculado utilizando as medições feitas obtém-se:

$$(A1) = (AA') + \alpha_0$$

$$(12) = (A1) + \alpha_1 \pm 200$$

$$(23) = (12) + \alpha_2 \pm 200$$

$$(3B) = (23) + \alpha_3 \pm 200$$

$$(BB') = (3B) + \alpha_4 \pm 200$$

$$(BB')^* = (AA') + \sum_{i=0}^4 \alpha_i - 200k$$

Sendo k um número inteiro

3) Determinação do erro de fecho angular e verificação da tolerância:

Como (BB') e (BB')* normalmente não são iguais, calcula-se o erro de fecho angular através da seguinte equação:

$$\epsilon_a = (BB') - (BB')^*$$

É agora necessário verificar se o erro angular é admissível para a precisão exigida na poligonal em questão. Pode-se então considerar que o erro terá que ser menor do que as tolerâncias abaixo indicadas para poligonais de alta, média e baixa precisão.

Tolerância angular:

Alta precisão: $T_a = (\sqrt{n})'$ $n \rightarrow$ número de ângulos

Média precisão: $T_a = (2\sqrt{n})'$

Baixa precisão: $T_a = (4\sqrt{n})'$

Se $|\varepsilon_a| < T_a \Rightarrow$ Pode-se continuar o cálculo da poligonal!

4) Cálculo dos ângulos corrigidos

Se o erro estiver dentro da tolerância distribui-se o seu valor uniformemente pelos ângulos α_i , obtendo-se os ângulos compensados $\overline{\alpha}_i$.

$$\overline{\alpha}_0 = \alpha_0 + c_0 \quad \text{sendo } c_0 \square c_1 \square c_2 \square c_3 \square c_4 \square \frac{\varepsilon_a}{5}$$

$$\overline{\alpha}_1 = \alpha_1 + c_1$$

$$\overline{\alpha}_2 = \alpha_2 + c_2$$

$$\overline{\alpha}_3 = \alpha_3 + c_3$$

$$\overline{\alpha}_4 = \alpha_4 + c_4$$

5) Cálculo dos rumos definitivos

Finalmente, procede-se ao cálculo dos rumos definitivos da seguinte forma:

$$(A1) = (AA') + \overline{\alpha}_0$$

$$(12) = (A1) + \overline{\alpha}_1 \pm 200$$

$$(23) = (12) + \overline{\alpha}_2 \pm 200$$

$$(3B) = (23) + \overline{\alpha}_3 \pm 200$$

$$(BB') = (3B) + \overline{\alpha}_4 \pm 200$$

2ª FASE: Cálculo das coordenadas

Por coordenadas relativas de um vértice entende-se as coordenadas desse vértice em relação a um sistema de eixos paralelos aos do sistema principal e com origem no vértice anterior. Deste modo:

$$M_i - M_{i-1} = \Delta M_i = d_i \sin(i-1,i)$$

$$P_i - P_{i-1} = \Delta P_i = d_i \cos(i-1,i)$$

considerando-se, neste exemplo, $M_0 = M_A$, $P_0 = P_A$, $M_4 = M_B$ e $P_4 = P_B$.

1) Cálculo das coordenadas relativas provisórias:

$$\Delta M_1 = M_1 - M_A = d_1 \sin (A1)$$

$$\Delta M_2 = M_2 - M_1 = d_2 \sin (12)$$

$$\Delta M_3 = M_3 - M_2 = d_3 \sin (23)$$

$$\underline{\Delta M_4 = M_B^* - M_3 = d_4 \sin(3B)}$$

$$\sum \Delta M_i = M_B^* - M_A \quad \Rightarrow \quad M_B^* = M_A + \sum \Delta M_i$$

Comparando os valores obtidos por cálculo com os valores conhecidos de M_B , pode escrever-se a equação da projecção do erro de fecho linear sobre OP (ε_M).

$$\boxed{\varepsilon_M = M_B - M_B^*}$$

Da mesma forma para as coordenadas P:

$$\Delta P_1 = P_1 - P_A = d_1 \cos(A1)$$

$$\Delta P_2 = P_2 - P_1 = d_2 \cos(12)$$

$$\Delta P_3 = P_3 - P_2 = d_3 \cos(23)$$

$$\underline{\Delta P_4 = P_B^* - P_3 = d_4 \cos(3B)}$$

$$\sum \Delta P_i = P_B^* - P_A \quad \Rightarrow \quad P_B^* = P_A + \sum \Delta P_i$$

Comparando os valores obtidos por cálculo com os valores conhecidos de P_B , pode escrever-se a equação da projecção do erro de fecho linear sobre OM (ε_P).

$$\boxed{\varepsilon_P = P_B - P_B^*}$$

2) Cálculo do erro de fecho linear e verificação da tolerância:

Com os valores de ε_M e ε_P calcula-se o erro de fecho linear da poligonal:

$$\varepsilon_\ell = \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_P^2}$$

Valores da tolerância linear: $L = \sum d_i$ (comprimento da poligonal)

Alta precisão: $T_\ell = 0,005\sqrt{L} + 0,05$

Média precisão: $T_\ell = 0,01\sqrt{L} + 0,1$

Baixa precisão: $T_\ell = 0,06\sqrt{L}$

Se $\varepsilon_\ell < T_\ell \quad \Rightarrow \quad$ Pode-se continuar o cálculo da poligonal!

Se este valor não ultrapassar a tolerância linear aceitável, de acordo com o tipo de poligonal, faz-se a sua distribuição pelas coordenadas relativas provisórias ΔM_i e ΔP_i , obtendo-se as coordenadas relativas corrigidas $\overline{\Delta M_i}$ e $\overline{\Delta P_i}$.

3) Cálculo das coordenadas relativas corrigidas:

A distribuição de ε_M e ε_P pelas coordenadas relativas provisórias é feita proporcionalmente aos valores absolutos dessas coordenadas, utilizando-se na prática uma forma simplificada e expedita de o fazer.

$$\overline{\Delta M_1} = \Delta M_1 + m_1$$

$$\overline{\Delta P_1} = \Delta P_1 + p_1$$

$$\overline{\Delta M_2} = \Delta M_2 + m_2$$

$$\overline{\Delta P_2} = \Delta P_2 + p_2$$

$$\overline{\Delta M_3} = \Delta M_3 + m_3$$

$$\overline{\Delta P_3} = \Delta P_3 + p_3$$

$$\overline{\Delta M_4} = \Delta M_4 + m_4$$

$$\overline{\Delta P_4} = \Delta P_4 + p_4$$

$$\frac{m_1}{|\Delta M_1|} = \frac{m_2}{|\Delta M_2|} = \frac{m_3}{|\Delta M_3|} = \frac{m_4}{|\Delta M_4|} = \frac{\varepsilon_M}{\sum |\Delta M|} \Rightarrow m_i = |\Delta M_i| \frac{\varepsilon_M}{\sum |\Delta M|}$$

$$\frac{p_1}{|\Delta P_1|} = \frac{p_2}{|\Delta P_2|} = \frac{p_3}{|\Delta P_3|} = \frac{p_4}{|\Delta P_4|} = \frac{\varepsilon_P}{\sum |\Delta P|} \Rightarrow p_i = |\Delta P_i| \frac{\varepsilon_P}{\sum |\Delta P|}$$

4) Cálculo das coordenadas definitivas:

De posse das coordenadas relativas corrigidas imediatamente se calculam as coordenadas definitivas:

$$M_1 = M_A + \overline{\Delta M_1}$$

$$P_1 = P_A + \overline{\Delta P_1}$$

$$M_2 = M_1 + \overline{\Delta M_2}$$

$$P_2 = P_1 + \overline{\Delta P_2}$$

$$M_3 = M_2 + \overline{\Delta M_3}$$

$$P_3 = P_2 + \overline{\Delta P_3}$$

$$M_B = M_3 + \overline{\Delta M_4}$$

$$P_B = P_3 + \overline{\Delta P_4}$$

3.5.4.3. Medição dos lados e ângulos de uma poligonal

Os lados das poligonais podem ser medidos por processos directos ou por processos indirectos. Os ângulos são medidos com um teodolito, devendo utilizar-se um teodolito de segundos quando se trate de uma poligonal de precisão.

A precisão de medição dos ângulos na observação de uma poligonal é de grande importância e, para se obterem os melhores resultados, é necessário ter o maior cuidado na centragem do teodolito e na pontaria aos sinais. Efectivamente, um erro de centragem do teodolito traduz-se sempre num erro de medição do ângulo no vértice respectivo, o mesmo sucedendo com um erro de pontaria ao sinal (ver Figura 3.40 e Figura 3.41).

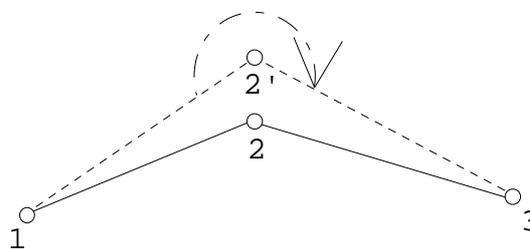


Figura 3.40 - Erro na medição de um ângulo, devido a um erro de centragem do teodolito.

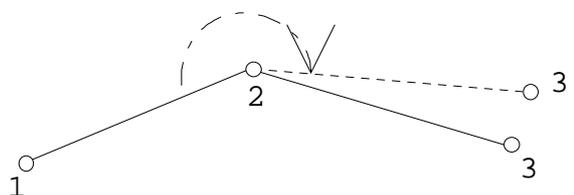


Figura 3.41 - Erro na medição de um ângulo, devido a um erro de pontaria.

Um erro na medição de um dos ângulos de uma poligonal acarreta sempre uma rotação da mesma igual à amplitude do referido erro. Se a poligonal for comprida, essa rotação origina um deslocamento considerável do vértice final.

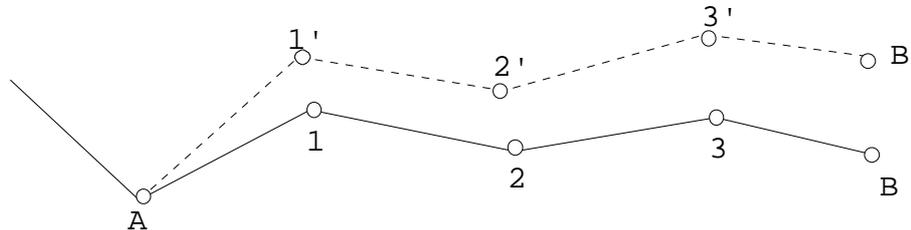


Figura 3.42 - Rotação de uma poligonal, devido a um erro de pontaria no vértice A.

3.6. Nivelamento

3.6.1. Noções de altimetria

Designa-se por cota de um ponto do terreno a distância desse ponto a uma superfície considerada como referência. A medição de cotas implica a escolha da superfície de referência, isto é a escolha de uma *datum altimétrico*.

Se a superfície considerada como referência for o Geóide, as cotas designam-se por *altitudes ortométricas* e são medidas ao longo da direcção da linha do fio-de-prumo que passa no ponto em causa. Se a superfície de referência for o elipsóide, as cotas designam-se por *altitudes geodésicas* e são medidas ao longo da perpendicular ao elipsóide que passa no ponto.

Como a distância vertical entre as superfícies equipotenciais não é constante, pontos com a mesma altitude ortométrica podem não estar sobre a mesma superfície equipotencial. Isto levou à definição das altitudes geopotenciais e das altitudes dinâmicas, que são constantes ao longo das superfícies equipotenciais. A *altitude geopotencial* de um ponto é a diferença entre o potencial gravítico sobre a superfície equipotencial que contém o ponto e o potencial gravítico do Geóide. A *altitude dinâmica* é o quociente entre a altitude geopotencial e a gravidade normal sobre o elipsóide de referência à latitude de 45°. Note-se que, por exemplo, para trabalhos de hidráulica que se desenvolvam em grandes extensões, o que interessa são as altitudes geopotenciais e dinâmicas e não as altitudes ortométricas.

Para a determinação das altitudes ortométricas é necessário conhecer pontos do Geóide e, portanto, definir o nível médio das águas do mar, o que se consegue através de instrumentos registadores de marés, os *marégrafos*.

Os marégrafos são colocados nas costas marítimas, usualmente nos estuários dos rios, devido ao facto do mar ser aí mais calmo. Em virtude das discordâncias que se notam entre os valores do nível médio das águas do mar em diversos pontos, discordâncias essas devidas principalmente às correntes marítimas e às irregularidades das marés, utiliza-se em cada país um único marégrafo. Em Portugal o marégrafo de referência encontra-se em Cascais.

Como os métodos da Topografia Clássica permitem apenas determinar diferenças de altitude, para se determinar a altitude de pontos do terreno é necessário ter na vizinhança pelo menos um ponto de altitude conhecida. No caso de não haver nenhum ponto nessas condições, e quando o que interessar for apenas a posição relativa dos pontos de um projecto, pode escolher-se como superfície de referência uma superfície qualquer, por exemplo, a

correspondente a um dos pontos do projecto. Como a distância vertical dos pontos do terreno relativamente a uma superfície qualquer, considerada como referência, se designa por **cota** do ponto, em muitos trabalhos de Topografia, trabalha-se com cotas e não com altitudes. Depois de calcular as cotas dos pontos, para se obterem as respectivas altitudes, basta adicionar às cotas obtidas a altitude da superfície considerada como referência.

A diferença de nível ou de altitude entre dois pontos A e B é dada por:

$$dN_{AB} = N_B - N_A$$

Sendo N_A a cota do ponto A e N_B a cota do ponto B.

A determinação das diferenças de nível faz-se por intermédio de uma operação topográfica a que se dá o nome de nivelamento.

A determinação das diferenças de nível pode ser feita por três métodos diferentes, dando origem respectivamente a três tipos de nivelamento.

- 1) Método trigonométrico ou indirecto → Nivelamento trigonométrico
- 2) Método geométrico ou directo → Nivelamento geométrico
- 3) Método barométrico → Nivelamento barométrico

Quanto à precisão, os métodos apresentados têm as seguintes tolerâncias:

$$\text{Nivelamento geométrico} \begin{cases} \text{Alta precisão - erro tolerável} \leq 1\text{mm/km} \\ \text{Ordinário - erro tolerável} \leq 1\text{cm/km} \end{cases}$$

Nivelamento trigonométrico - erro tolerável $\leq 1\text{dm/km}$

Nivelamento barométrico - erro tolerável $\leq 1\text{m/km}$

3.6.2. Curvatura terrestre e refração atmosférica

Os métodos de nivelamento têm como objectivo medir a diferença de cotas entre pontos do terreno. Se a distância entre os pontos for considerável, é necessário tem em consideração a curvatura da superfície de referência no cálculo das diferenças de nível. Além disso, a aplicação dos métodos de nivelamento implica a execução de visadas e a medição de quantidades que permitem determinar distâncias verticais, pelo que o efeito da refração atmosférica, que provoca uma curvatura da linha de visada, influencia os resultados obtidos. O efeito da curvatura terrestre e da refração atmosférica são normalmente considerados conjuntamente, pois têm efeitos contrários. Na Figura 3.43 está representada a superfície de referência utilizada para a medição das cotas. Ao considerar-se que a superfície de referência é um plano tangente à superfície de referência real no ponto E, os pontos E e E' estariam ao mesmo nível, quando na realidade têm uma diferença de nível igual a $\overline{E'E''}$. Assim, o comprimento $\overline{E'E''}$ representa o efeito da curvatura terrestre, valor que deve ser adicionado ao valor obtido para a diferença de nível entre os pontos E e E'. Considerando a superfície de referência uma esfera com raio igual a 6400km (raio aproximado da Terra), e como o plano considerado é tangente à superfície de referência, temos que

$$\overline{EE'}^2 + R^2 = (R + \overline{E'E''})^2$$

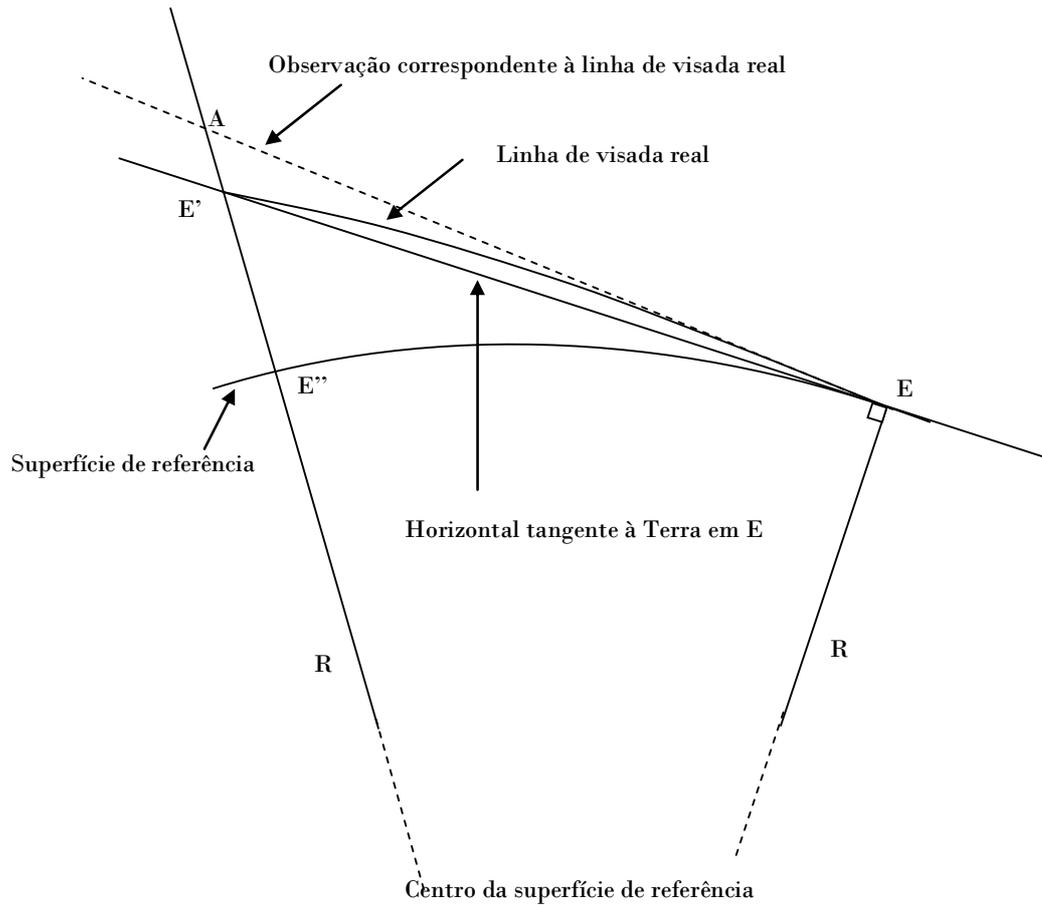


Figura 3.43 – Efeito da refração atmosférica e da curvatura da Terra.

Designando por D a distância $\overline{EE'}$, distância horizontal entre os pontos, e por c a correcção relativa à curvatura terrestre, isto é o comprimento $\overline{E'E''}$, temos que:

$$D^2 + R^2 = (R + c)^2$$

ou seja

$$D^2 + R^2 = R^2 + 2Rc + c^2$$

$$D^2 = c(2R + c)$$

Isto é,

$$c = \frac{D^2}{(2R + c)}$$

Como c é muito menor do que R , podemos considerar

$$c \approx \frac{D^2}{2R}$$

Considerando $R=6400\text{km}$ temos

$$c \approx 0,781 \times 10^{-5} D^2 \text{ km}$$

onde o valor de D deve ser usado em quilómetros.

Para se obter o valor da correcção em metros deverá multiplica-se por 1000, sendo portanto

$$c \approx 0,0781D^2m$$

continuando o valor de D a ser usado em quilómetros.

O efeito da refração atmosférica faz com que, ao visarmos o ponto E', estejamos na realidade a fazer medições relativamente ao ponto A. Assim, para que as medições efectuadas se refiram ao ponto E', é necessário subtrair o comprimento $r = \overline{E'A}$ ao valor obtido. Este valor depende do índice de refração da atmosfera n, que varia normalmente entre 0,06 e 0,08, sendo

$$r \approx \frac{n}{R}D^2$$

Considerando mais uma vez $R=6400\text{km}$ e $n=0,07$ temos

$$r \approx 1,094 \times 10^{-5} D^2 \text{km}$$

onde o valor de D deve ser usado em quilómetros.

Para que o valor da correcção seja apareça em metros, temos que

$$r \approx 0,01094D^2m$$

Assim, a correcção devido ao efeito da curvatura terrestre e refração atmosférica toma o valor

$$c \& r \approx 0,06716D^2m \approx \frac{D^2}{15}m$$

Desta forma, para uma distância horizontal de 0,5 km, o valor da correcção devida à curvatura terrestre e refração atmosférica é de 0,017 m, para uma distância de 1km é já de 0,067 m, para uma distância da ordem de 15 km é já da ordem dos 15 m e para uma distância de 150 km de 1500 m. Assim para distâncias inferiores a aproximadamente 500m poderá ser dispensável entrar com a correcção de curvatura e refração, uma vez que o seu efeito é muito pequeno, mas para distâncias maiores o seu valor tem de ser tido em consideração.

3.6.3. Nivelamento Trigonométrico

Com este método podemos determinar o desnível entre dois pontos A e B do terreno, conhecendo a distância horizontal D entre eles e o ângulo zenital z da linha de visada.

Da Figura 3.44 conclui-se que a distância vertical h, conhecida como altura trigonométrica é dada por:

$$h = D \cotg z$$

e portanto a diferença de nível entre A e B é dada por:

$$dN_{AB} = h + i - Av$$

Quando é visada uma mira vertical colocada em B, $Av = \ell_m$ e portanto:

$$dN_{AB} = h + i - \ell_m$$

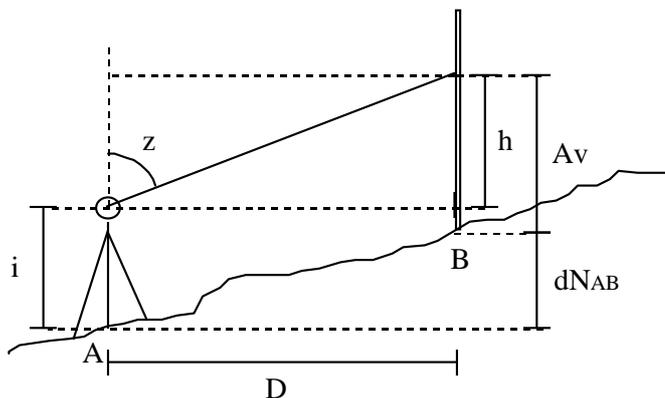


Figura 3.44 - Para a determinação da diferença de nível entre A e B (dN_{AB}) com nivelamento trigonométrico, estacionou-se um teodolito no ponto A e visou-se um ponto na vertical do ponto B.

Note-se que, quando a distância D é superior a algumas centenas de metros os efeitos da curvatura da Terra e da refração atmosférica fazem-se sentir, pelo que o seu valor tem que ser tido em conta no cálculo de h, sendo nesse caso,

$$h = D \cotg z + (c \& r)$$

onde o valor de $c \& r$ é o indicado na secção 3.6.2., ou seja,

$$h = D \cotg z + \frac{D^2}{15}$$

3.6.4. Nivelamento Geométrico

Este tipo de nivelamento utiliza instrumentos chamados *níveis*, cuja principal característica é a de definirem com grande precisão linhas de visada horizontais. A diferença de nível entre os pontos A e B obtém-se através da diferença das leituras feitas com um nível estacionado em qualquer ponto do terreno, numa mira vertical colocada sucessivamente nos pontos A e B. Desta forma, de acordo com a Figura 3.45, tem-se:

$$dN_{AB} = \ell_A - \ell_B$$

sendo ℓ_A a leitura feita na mira colocada em A e ℓ_B a leitura feita na mira colocada em B.

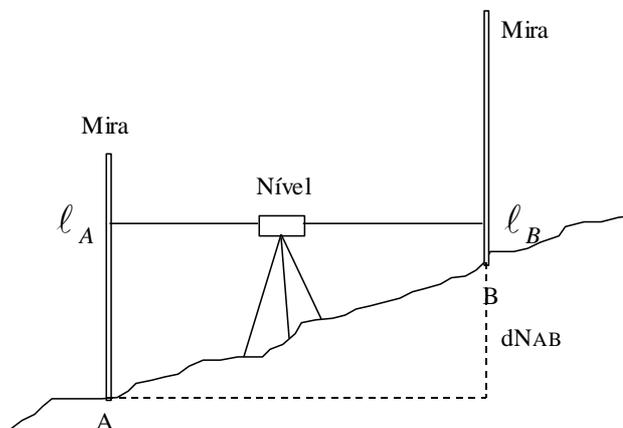


Figura 3.45 - Nivelamento geométrico para a determinação da diferença de nível entre os pontos A e B (dN_{AB}).

3.6.4.1. Constituição e funcionamento de um nível

Os níveis, tal como os teodolitos, são formados por uma base e uma alidade, que roda em torno do eixo principal. Estes aparelhos não têm, no entanto, eixo secundário, rodando a luneta apenas em torno do eixo principal.

Os níveis de luneta podem classificar-se em níveis de nivela solidária e níveis de horizontalização automática. Os níveis de nivela solidária dispõem de uma nivela tórica que permite colocar a linha de visada horizontal, enquanto que, nos de horizontalização automática, a linha de visada, como o nome indica, é colocada horizontal automaticamente. Este último tipo de níveis está a substituir rapidamente os níveis de nivela solidária, uma vez que são de utilização muito mais rápida e prática.

Nível bloco

As principais componentes de um nível bloco são a luneta e a nivela, que podem rodar conjuntamente em torno do eixo principal.

O nível bloco monta-se sobre um tripé e na sua base existem três parafusos nivelantes, ou um dispositivo de rótula, que permitem verticalizar aproximadamente o eixo principal, verticalização essa feita com o auxílio de uma nivela esférica existente na base do nível e solidária com o eixo principal. Para a horizontalização rigorosa da linha de pontaria é necessário calar, com o auxílio de um parafuso, chamado parafuso de inclinação, uma nivela tórica de grande sensibilidade, cuja directriz deve ser paralela à linha de visada.

Um nível-bloco está construído de acordo com a sua idealização teórica quando, estando a nivela calada, a linha de pontaria fica horizontal e o fio nivelador (traço horizontal do retículo) fica também horizontal. Desta forma, temos as seguintes condições de construção e de estação:

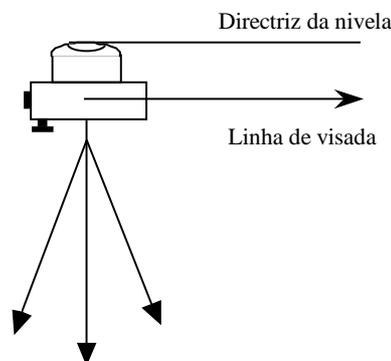


Figura 3.46 - Representação esquemática de um nível bloco.

Condição de estação:

- Eixo principal vertical

Um nível bloco está em estação quando o eixo principal estiver vertical. Esta condição não é em geral rigorosamente cumprida, pois a horizontalização do eixo óptico, que é o objectivo a cumprir, é conseguida com o auxílio do parafuso de inclinação.

CONDIÇÃO DE CONSTRUÇÃO:

- Paralelismo entre a directriz da nivela tórica e o eixo óptico da luneta.

De facto, sendo a directriz da nivela paralela à linha de visada, quando a nivela estiver calada a linha de visada fica horizontal.

Não se verificando a condição de construção temos o chamado **erro de inclinação**, que será estudado mais à frente. Nos níveis bloco, o erro de inclinação pode ser rectificado, através de procedimentos que não serão estudados neste curso, quando a sua amplitude tiver influência sobre o valor obtido para a diferença de nível, isto é, quando o seu efeito sobre o valor da diferença de nível for da ordem dos milímetros

Nível de horizontalização automática

Os níveis deste tipo não têm qualquer nivela associada à luneta nem parafuso de inclinação. Um dispositivo óptico pesado, colocada no interior da luneta, permite, pela acção da gravidade, compensar qualquer inclinação residual do eixo da luneta após a verticalização do eixo principal, dando origem à horizontalização do eixo óptico. Este dispositivo, que tem o nome de compensador, é essencialmente constituído por um conjunto de 3 prismas, um dos quais de reflexão total, ou por um conjunto de 2 prismas e um espelho plano, suspensos do corpo da luneta de modo que a sua posição relativa varie com a inclinação da luneta (ver Figura 3.47).

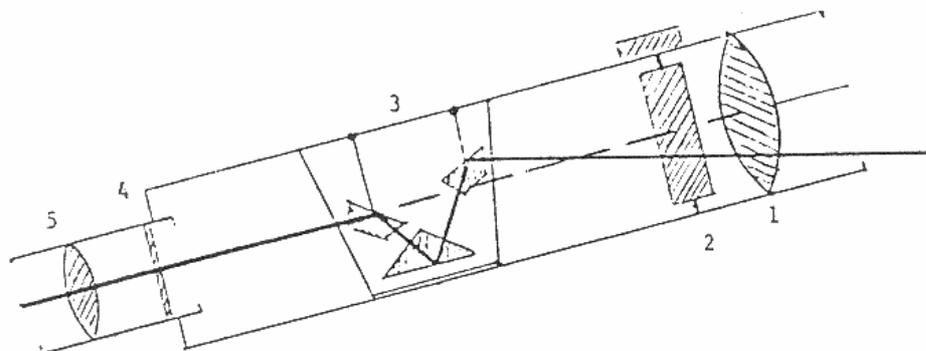


Figura 3.47 Representação esquemática de um nível de horizontalização automática. 1 - objectiva; 2 - lente de focagem interna; 3 - compensador; 4 - retículo; 5 - ocular.

Condição de estação:

Tal como para o nível-bloco, a condição de estação de um nível de horizontalização automática é que o eixo principal esteja vertical.

Realizada esta condição, o que se consegue com três parafusos nivelantes existentes na base do nível e com uma nivela esférica solidária com o eixo principal, o compensador entra em funcionamento, colocando a linha de visada horizontal.

Enquanto o eixo principal não estiver sensivelmente vertical, o compensador fica encostado ao corpo da luneta e permanece bloqueado. Assim, a nivela esférica solidária com o eixo principal deve ter sensibilidade suficiente para que o sistema compensador possa actuar. Depois de calada a nivela deve esperar-se alguns segundos antes de fazer as leituras nas miras, para que o compensador deixe de oscilar.

Os níveis de horizontalização automática têm a vantagem de permitirem uma considerável economia de tempo em relação ao nível bloco. No entanto, têm a desvantagem de serem mais caros e permitirem atingir uma precisão inferior, excepto no caso em que o terreno seja pouco firme, tornando-se muito difícil calar a nivela de um nível bloco.

Erro de inclinação de um nível

Como já foi dito, o erro de inclinação surge do facto de a visada feita com o nível não ser rigorosamente horizontal, existindo uma pequena inclinação em relação à horizontal que vamos designar por β (ver Figura 3.48). Nesse caso em vez de ser feita a leitura l_A na mira, faz-se uma leitura l'_A .

Se a linha de pontaria estiver para cima da horizontal, o erro de inclinação β é positivo, se a linha de pontaria descer em relação à horizontal β é negativo.

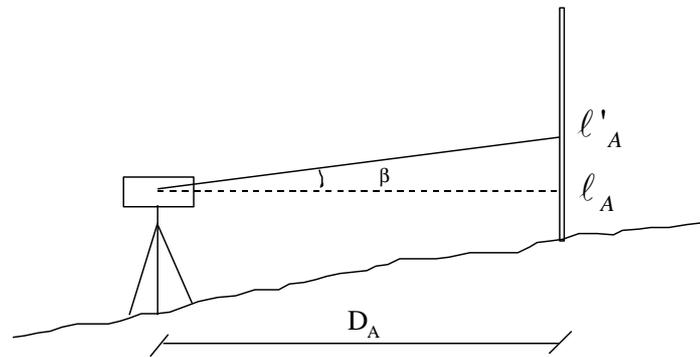


Figura 3.48 – O nível representado tem erro de inclinação β . Devido ao erro de inclinação a leitura na mira é l'_A e não l_A .

$$\text{Como } \operatorname{tg} \beta = \frac{l'_A - l_A}{D_A} \text{ então } l'_A - l_A = D_A \operatorname{tg} \beta$$

e conseqüentemente:

$$l_A = l'_A - D_A \operatorname{tg} \beta$$

Existem métodos que permitem determinar a diferença de nível correcta entre dois pontos, independentemente da existência ou não de erro de inclinação.

Método das visadas iguais:

Este método consiste em estacionar o nível a igual distância dos dois pontos onde é colocada a mira. No caso da Figura 3.49 a mira é colocada nos pontos A e B, sendo $D_A = D_B$.

Se não houvesse erro de inclinação, teríamos as leituras na mira l_A e l_B , sendo

$$dN_{AB} = l_A - l_B$$

Existindo erro de inclinação teremos as leituras l'_A e l'_B . No entanto,

$$\begin{aligned} dN_{AB} &= l_A - l_B \\ &= l'_A - D_A \operatorname{tg} \beta - l'_B + D_B \operatorname{tg} \beta = \\ &= l'_A - l'_B - D_A \operatorname{tg} \beta + D_B \operatorname{tg} \beta = && (\text{em virtude de } D_A = D_B) \\ &= l'_A - l'_B = dN'_{AB} \end{aligned}$$

Poder-se-ia ter imediatamente verificado que, como os triângulos são semelhantes, temos:

$$l'_A - l_A = l'_B - l_B \Rightarrow l'_A - l'_B = l_A - l_B = dN_{AB}$$

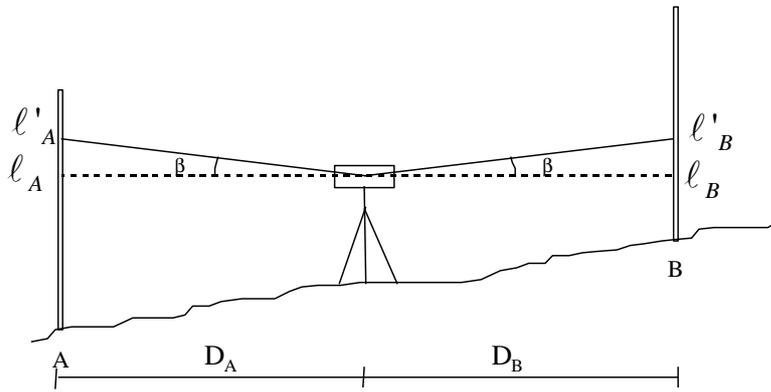


Figura 3.49 - Estacionamento de um nível a igual distância de A e B ($D_A = D_B$).

Assim, como o efeito do erro é igual sobre ambas as leituras, obtém-se a diferença de nível correcta utilizando as leituras com erro.

Método das visadas recíprocas

Neste método fazem-se dois estacionamentos com o nível, em P_1 e P_2 , de forma a que $\overline{P_1A} \square \overline{P_2B}$ e $\overline{P_1B} \square \overline{P_2A}$. Ver exemplo na Figura 3.50

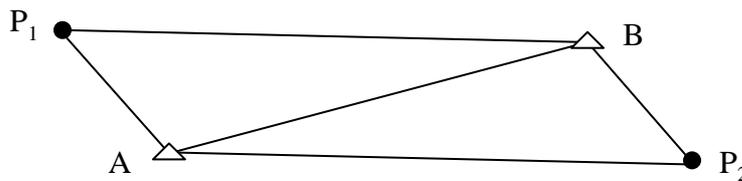


Figura 3.50 – Posição dos níveis relativamente aos pontos A e B quando da utilização do método das visadas recíprocas.

Ao estacionar em P_1 , junto ao ponto A, se não houver erro de inclinação, a linha de visada fica horizontal, obtendo-se na mira as leituras l_{A_1} e l_{B_1} (ver Figura 3.51), sendo a diferença de nível correcta dada por

$$dN_{AB} = l_{A_1} - l_{B_1}$$

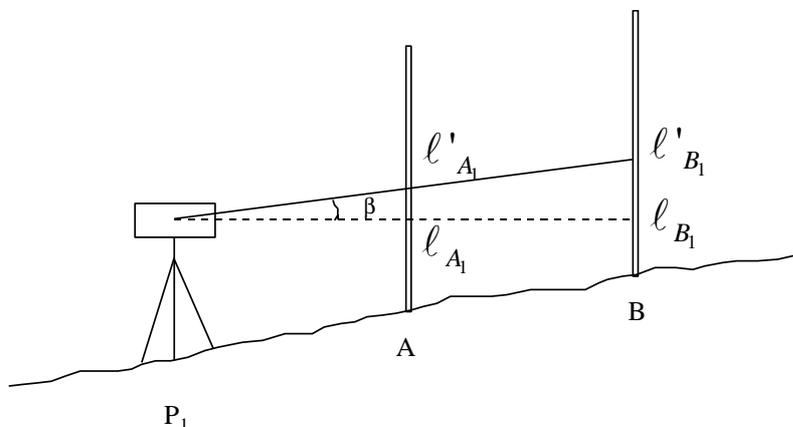


Figura 3.51 – Visadas feitas do nível estacionado em P_1 para a mira colocada, respectivamente, nos pontos A e B.

Havendo erro de inclinação β , obtêm-se na mira as leituras l'_{A_1} e l'_{B_1} , que conduzem a um valor incorrecto da diferença de nível

$$dN'_{AB} = l'_{A_1} - l'_{B_1}$$

Estacionando de seguida em P_2 , junto de B , obtêm-se as leituras na mira l'_{A_2} e l'_{B_2} (ver Figura 3.52). A diferença de nível correcta será então

$$dN_{AB} = l_{A_2} - l_{B_2}$$

e a diferença de nível afectada do erro de inclinação

$$dN''_{AB} = l'_{A_2} - l'_{B_2}$$

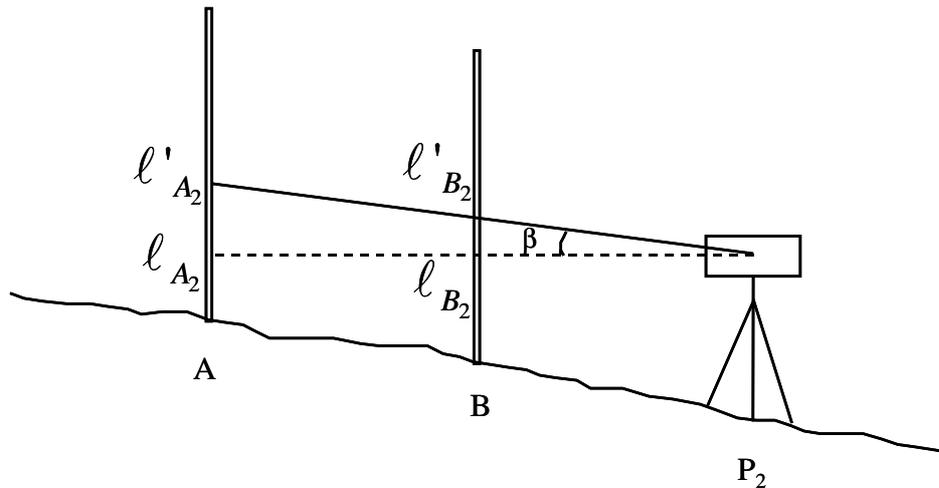


Figura 3.52 - Visadas feitas do nível estacionado em P_2 para as miras colocadas nos pontos A e B.

Como o ângulo β se mantém invariável e como $\overline{P_1A} \square \overline{P_2B}$ e $\overline{P_1B} \square \overline{P_2A}$, temos

$$l'_{B_1} - l_{B_1} = l'_{A_2} - l_{A_2}$$

$$l'_{B_2} - l_{B_2} = l'_{A_1} - l_{A_1}$$

Somando membro a membro estas igualdades obtém-se

$$dN_{AB} = \frac{dN'_{AB} + dN''_{AB}}{2}$$

Pode então concluir-se que a diferença de nível correcta é igual à média dos desníveis obtidos com os dois estacionamentos do nível, mesmo que o nível tenha erro de inclinação.

Determinação do erro de inclinação do nível, conhecendo a diferença de nível correcta entre dois pontos

Conhecendo-se a diferença de nível correcta entre dois pontos e fazendo leituras numa mira colocada, respectivamente, nos pontos A e B, leituras estas afectadas do erro de inclinação, é possível calcular o erro de inclinação do nível da seguinte forma (Figura 3.53):

$$dN_{AB} = l_A - l_B = (l'_A - D_A \operatorname{tg} \beta) - (l'_B - D_B \operatorname{tg} \beta)$$

$$dN_{AB} = l'_A - l'_B - D_A \operatorname{tg} \beta + D_B \operatorname{tg} \beta$$

logo,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dN_{AB} - \ell'_A + \ell'_B}{D_B - D_A}$$

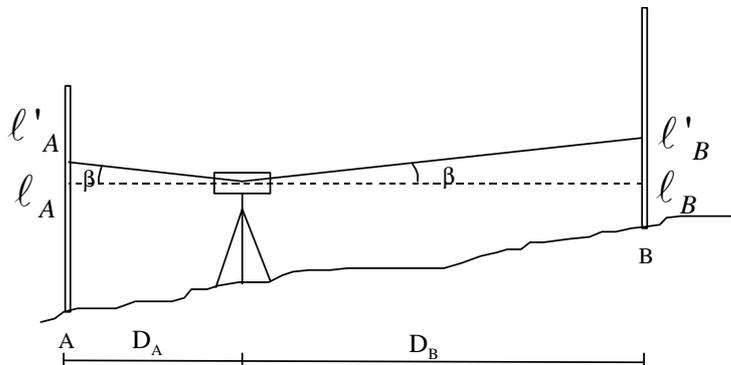


Figura 3.53 - Determinação da diferença de nível entre A e B com nivelamento geométrico.

3.6.4.2. Observação e cálculo de uma linha de nivelamento

A operação de nivelamento geométrico é normalmente feita ao longo de linhas, chamadas **linhas de nivelamento**. São feitas várias estações do nível e observações sucessivas de cada estação para o ponto anterior e seguinte.

Uma linha de nivelamento deve, por princípio, ser fechada. Isto é, a diferença entre as cotas do ponto inicial e final deve ser conhecida.

Pode também utilizar-se um nivelamento fechado sobre si mesmo, que corresponde ao caso em que o ponto final do nivelamento coincide com o ponto inicial, e nesse caso a diferença de nível entre o ponto final e inicial deve ser nula.

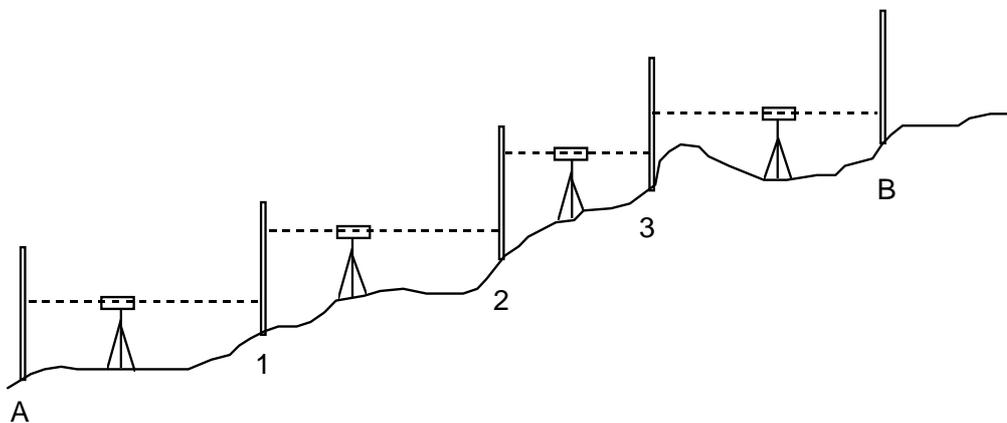


Figura 3.54 - Execução de uma linha de nivelamento entre os pontos A e B.

No caso de não ser possível fazer um nivelamento fechado, depois de se ter feito o nivelamento entre os pontos A e B, no sentido de A para B, deve fazer-se um contra-nivelamento, agora no sentido de B para A. Os valores de dN_{AB} no nivelamento e no contra-nivelamento devem coincidir, se tal não acontecer, e a diferença for aceitável, a média dos dois valores obtidos será um valor mais preciso. Pode ainda fazer-se um nivelamento paralelo, que consiste em fazer em cada estação do nível duas niveladas atrás e duas niveladas à frente, como indica a Figura 3.55. Obtêm-se deste modo duas medidas para dN_{14} , uma através do nivelamento considerando os pontos 1, 2, 3 e 4 e outra através do nivelamento paralelo, considerando os pontos 1, 2', 3' e 4, podendo então fazer-se um ajustamento.

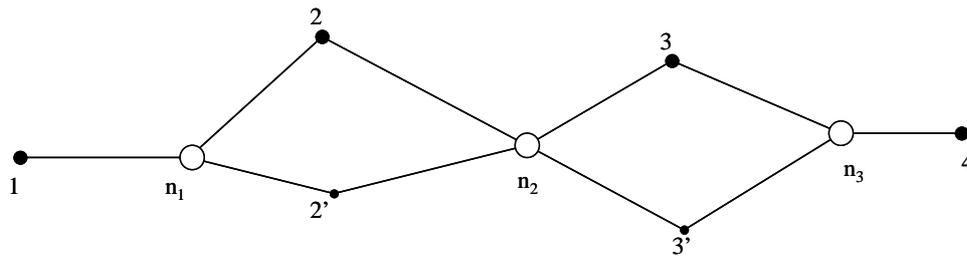


Figura 3.55 - Esquema de um nivelamento paralelo.

O erro de fecho de um nivelamento fechado é a diferença entre o desnível correcto e o desnível observado entre o primeiro e o último ponto do nivelamento. O erro de fecho obtido é normalmente distribuído uniformemente pelos desníveis calculados, obtendo-se assim os desníveis compensados. No caso de se conhecerem as distâncias do nível a cada um dos pontos visados, a distribuição do erro poderá (para maior precisão) ser feita proporcionalmente às distâncias.

O ajustamento e cálculo de um nivelamento geométrico, com vista à obtenção das cotas compensadas dos pontos, inclui os passos seguintes:

- 1- Cálculo dos desníveis observados;
- 2 - Determinação do erro de fecho e das correcções a aplicar aos desníveis observados;
- 3 - Cálculo dos desníveis compensados;
- 4 - Cálculo das cotas.

Exercício 1:

Determine as cotas ajustadas dos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sabendo que $N_A = 428,704m$ e $N_B = 426,610m$.

Resolução:

Pontos visados	Niveladas		Desníveis observados		Correcções	Desníveis compensados		Cotas
	atrás	à frente	+	-		+	-	
A	1,027							428,704
1	0,636	2,472		1,445	+ 0,003		1,442	427,262
2	0,886	3,544		2,908	+ 0,003		2,905	424,357
3	2,984	0,952		0,066	+ 0,003		0,063	424,294
4	3,747	1,478	1,506		+ 0,003	1,509		425,803
5	1,636	0,328	3,419		+ 0,004	3,423		429,226
6	0,148	1,522	0,114		+ 0,003	0,117		429,343
B		2,884		2,736	+ 0,003		2,733	426,610
Verificações	[a] = 11,064	[f] = 13,180	[+]* = 5,039	[-]* = 7,155	$\varepsilon = dN_{AB} - dN_{AB}^*$	[+] = 5,049	[-] = 7,143	$dN_{AB} = N_B - N_A$
	[a] - [f] = -2,116		[+]* - [-]* = -2,116		= 0,022	[+] - [-] = - 2,094		= -2,094

- Desnível afectado de erro = $dN_{AB}^* = [a] - [f] = [+]* - [-]* = -2,116$

- Desnível correcto (valor conhecido) = $dN_{AB} = N_B - N_A = -2,094$

- O erro ε é distribuído uniformemente pelos desníveis.

Em trabalhos de nivelamento, poderá ser necessário determinar cotas de pontos situados nas proximidades de uma linha de nivelamento, mas que não lhe pertençam. Isto pode ser feito aproveitando os estacionamentos do nível e as leituras feitas durante a observação da linha de nivelamento, assim como as cotas obtidas depois do ajustamento. Por exemplo, no caso da linha de nivelamento indicada no Exercício 2, os pontos A, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 pertencem à linha de nivelamento, enquanto que os pontos P₁, P₂, P₃, P₄, P₅, e P₆, são pontos cuja cota se pretende calcular, mas que são visados apenas uma vez, e portanto não lhe pertencem. Estes pontos são denominados de pontos intermédios e sua cota é calculada fazendo a média das cotas obtidas para o ponto considerando os dois pontos da linha de nivelamento visados durante o mesmo estacionamento em que o referido ponto intermédio foi visado.

Exercício 2:

Determine as cotas ajustadas dos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e as cotas dos pontos intermédios P₁, P₂, P₃, P₄, P₅, e P₆, sabendo que $N_A = 428,617m$.

Resolução:

Pontos visados	Niveladas			Desníveis observados		Correcções	Desníveis compensados		Cotas
	atrás	Interm.	à frente	+	-		+	-	
A	0,473								482,617
1	0,215		1,638		1,165	- 0,002		1,167	481,450
P ₁		2,427							479,237
2	1,316		2,674		2,459	- 0,003		2,462	478,988
P ₂		1,153							479,150
P ₃		0,891							479,412
P ₄		1,504							478,799
3	2,750		1,149	0,167		- 0,002	0,165		479,153
4	0,789		0,422	2,328		- 0,003	2,325		481,478
5	1,691		1,963		1,174	- 0,002		1,176	480,302
P ₅		0,892							481,100
P ₆		1,347							480,645
6	2,604		0,385	1,306		- 0,003	1,303		481,605
A	0,148		1,590	1,014		- 0,002	1,012		482,617
Verificações	[a] = 9,838		[f] = 9,821	[+]* = 4,815	[-]* = 4,798	$\epsilon = -0,017$	[+] = 4,805	[-] = 4,805	$dN_{AA} = 0$
	[a] - [f] = 0,017			[+]* - [-]* = -0,017			[+] - [-] = - 2,094		

3.6.5. Nivelamento barométrico

O nivelamento barométrico baseia-se no facto de a pressão atmosférica ser igual ao peso duma coluna cilíndrica vertical de ar atmosférico, com base unitária, e que atravessa toda a atmosfera. Assim, a diferença de pressões atmosféricas entre dois pontos do terreno permite determinar aproximadamente a diferença de nível entre eles. Os instrumentos utilizados neste tipo de nivelamento são os barómetros e os altímetros.

A determinação da diferença de altitudes recorrendo a este processo é sempre pouco precisa, pois a pressão atmosférica é influenciada por vários factores não controláveis.

4. Outros métodos de aquisição de dados topográficos

4.1. Sistemas de Posicionamento e Navegação por Satélite

4.1.1. Introdução

A observação dos astros foi utilizada durante muitos séculos para determinar a posição de pontos sobre a Terra e para auxílio à navegação, tendo sido criados vários equipamentos, como o astrolábio e o sextante. Com o desenvolvimento tecnológico foi possível construir sistemas cada vez mais complexos. O lançamento de satélites artificiais foi um passo determinante nesta área, pois permitiu substituir a observação de astros pela observação de satélites artificiais. Foram assim desenvolvidos vários métodos de posicionamento utilizando satélites, como o LORAN-C e o VLBI. Nos anos 70 foi desenvolvido, pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América, o Sistema de Posicionamento Global (Global Positioning System – GPS). A este sistema seguiu-se, nos anos oitenta, o sistema russo GLONASS. Desde o início do século XXI está em desenvolvimento um sistema europeu, o sistema GALILEO, que, ao contrário dos sistemas americano e russo, será controlado por entidades civis.

4.1.2. Sistemas Globais de Navegação por Satélite

4.1.2.1. Componentes dos sistemas

Os sistemas globais de navegação por satélite (Global Navigation Satellite Systems – GNSS), nomeadamente o GPS, o GLONASS e o GALILEO, são constituídos por três componentes: a componente espacial, a componente de controlo e a componente do utilizador.

Componente espacial: A componente espacial dos GNSS é constituída pelo conjunto dos satélites de cada um dos sistemas (ver Figura 4.1).

Na Tabela 4.1 está indicado o número de satélites dos vários sistemas, assim como a sua altitude e período. Cada satélite contém relógios atómicos de alta precisão e transmite continuamente sinais de rádio (em duas frequências) utilizando um código que o permite identificar. Nos sinais emitidos são enviadas várias mensagens, entre as quais se inclui a posição do satélite.

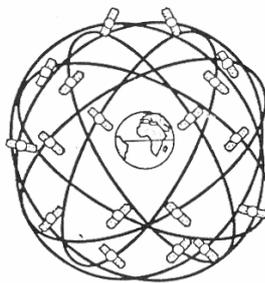


Figura 4.1 - Representação esquemática dos satélites GPS e suas órbitas.

Tabela 4.1 – Satélites dos sistemas GPS, GLONASS e GALILEO.

	Nº de satélites	Altitude	Período
GPS	21 + 3 suplentes	20 200 km	11h 59 min
GLONASS	21 + 3 suplentes	19 100 km	11h15 min
GALILEO	Previstos 27 + 3 suplentes	23 616 km	14h 4 min

Componente de controlo – A componente de controlo é formada por estações monitoras, estações emissoras de dados e estações de controlo. As estações monitoras recebem continuamente a informação enviada pelos satélites, fornecendo dados para a estação de controlo calcular as novas posições dos satélites e as correcções a fazer aos relógios de bordo. Estes dados são depois enviados, para os satélites, pelas estações emissoras.

Componente do utilizador – A componente do utilizador é constituída por todos os receptores, civis e militares, que utilizam os sinais emitidos pelos satélites para calcular a sua posição.

4.1.2.2. Princípio de funcionamento

O princípio básico de funcionamento dos GNSS consiste na medição da distância da antena do receptor a um conjunto de satélites. Como a posição dos satélites é conhecida, a medição da distância do receptor a um satélite permite posicionar o receptor sobre uma esfera de raio e centro conhecidos (ver Figura 4.2). Medindo a distância simultaneamente para três satélites, o receptor fica situado sobre a intersecção de três esferas com raios e centros conhecidos. A intersecção das três esferas permite identificar dois pontos, estando um deles normalmente no espaço, o que permite concluir que o receptor se encontra no outro ponto obtido.

As distâncias aos satélites são obtidas determinando o tempo que os sinais por eles emitidos demoram a chegar ao receptor. Este valor é determinado comparando a fase de uma modulação que é gerada no satélite e no receptor de forma sincronizada. Como a medição deste intervalo de tempo é crítica, e existem limitações de precisão devido aos relógios do receptor serem simples relógios de quartzo e não relógios atómicos, como os colocados nos satélites, é necessário utilizar os dados obtidos a partir de, pelo menos, quatro satélites, para determinar a posição tridimensional do ponto onde está colocada a antena do receptor.

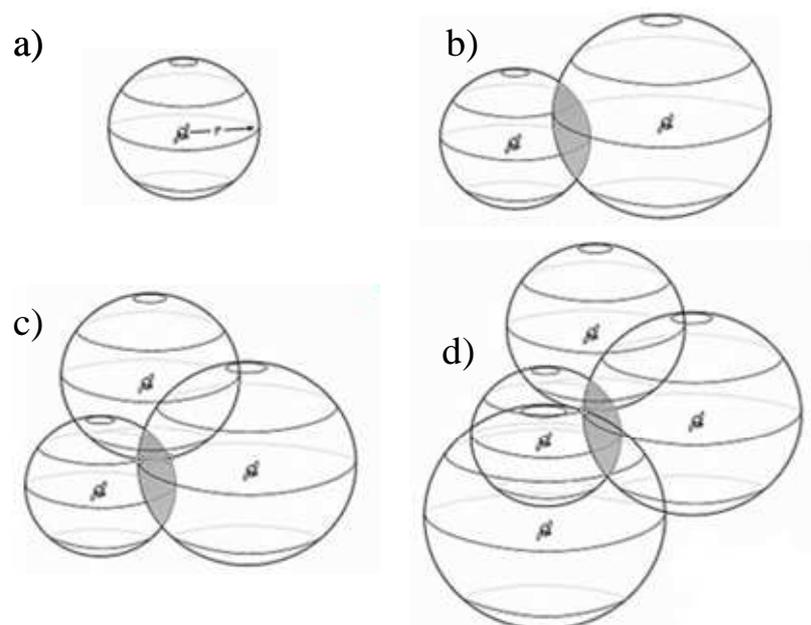


Figura 4.2 – Posição do receptor considerando a) um satélite, b) dois satélites, c) três satélites e d) quatro satélites.

A exactidão do posicionamento com os sistemas de navegação por satélite depende dos receptores e dos métodos de observação utilizados, podendo variar entre as dezenas de metros e alguns milímetros.

4.1.2.3. Posicionamento Diferencial

Os GNSS não permitem obter grande exactidão no posicionamento absoluto de pontos, embora a precisão conseguida seja suficiente para muitas aplicações. A grande precisão é conseguida apenas com posicionamento relativo ou diferencial. Este método de posicionamento requer a utilização simultânea de dois receptores, estando um deles estacionado num ponto P_1 , cuja posição é conhecida, e o outro estacionado no ponto P_2 a determinar. Desta forma, é possível, com o receptor estacionado no ponto de coordenadas conhecidas, avaliar os erros associados à medição e utilizar essa informação para determinar a posição de P_2 com alta precisão (ver Figura 4.3).

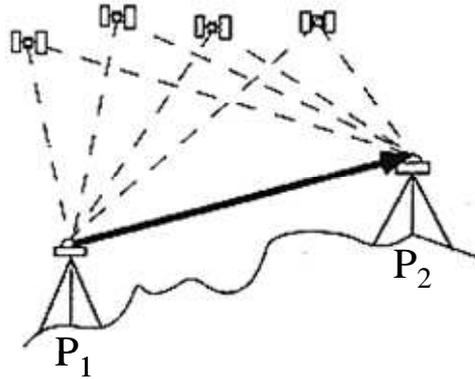


Figura 4.3 – Posicionamento diferencial

4.1.2.4. Limitações dos sistemas

A medição da distância dos satélites ao receptor implica a medição do tempo que o sinal emitido pelo satélite demora a chegar ao receptor. No entanto, a onda emitida pelo satélite atravessa a atmosfera, o que vai provocar uma alteração da sua velocidade de propagação, principalmente na ionosfera, provocando atrasos no sinal que influenciam a exactidão das medições. Estes erros, provocados pelo atraso ionosférico, podem ser minimizados utilizando posicionamento diferencial.

Outro problema que pode surgir na determinação de posições com um sistema de navegação por satélite, é o chamado *multi-caminho*. Este factor de erro deriva do sinal emitido pelo satélite sofrer várias reflexões antes de atingir o receptor, o que faz com que a distância obtida seja maior do que a distância real do receptor ao satélite, o que, naturalmente, introduz erros na posição obtida para o receptor. Este problema é particularmente importante quando se fazem observações junto de edifícios ou superfícies altamente reflectoras, como, por exemplo, água.

Os GNSS podem ser utilizados em qualquer local do planeta e sob quaisquer condições atmosféricas. No entanto, como os receptores têm que receber os sinais enviados pelos satélites, a sua utilização é pouco conveniente em zonas urbanas, principalmente junto de edifícios, pois estes bloqueiam os sinais emitidos pelos satélites, diminuindo o número de satélites disponíveis para o posicionamento, e podem provocar reflexões do sinal. O mesmo acontece em zonas arborizadas, onde, geralmente, o posicionamento com estes sistemas é problemático, ou mesmo impossível.

Com os sistemas de navegação por satélite, a grande precisão obtém-se para as coordenadas bidimensionais. A altitude é sempre menos precisa, pois, por um lado, as altitudes são obtidas relativamente ao elipsóide, pelo que, para se obterem altitudes ortométricas, é necessário conhecer a modelação do géide. Por outro lado, a geometria dos satélites

conveniente para o posicionamento bidimensional não é conveniente para obter uma boa precisão vertical, pelo que, normalmente, a precisão no posicionamento horizontal é valorizada em detrimento da precisão altimétrica.

4.1.2.5. Sistemas de Aumento Baseados em Satélites e em estações locais

Com o objectivo de aumentar a precisão do posicionamento com os sistemas de navegação por satélite, foram desenvolvidos os sistemas de aumento baseados em satélites (Satellite Based Augmentation System – SBAS) e em estações terrestres (Ground Based Augmentation System) – GBAS).

Os SBAS são sistemas regionais constituídos por um conjunto de estações de controlo que recebem continuamente os sinais dos satélites das constelações GPS e GLONASS, o que permite calcular os erros associados ao posicionamento em cada instante. Essa informação é processada, sendo depois enviada para um satélite geo-estacionário, que emite as correcções necessárias às observações feitas na zona coberta pelo sistema, permitindo assim obter, em qualquer instante, posicionamento com precisões mais elevadas. Actualmente, existem vários sistemas SBAS, nomeadamente o sistema americano WAAS e o sistema europeu EGNOS, cuja cobertura está indicada na Figura 4.4.

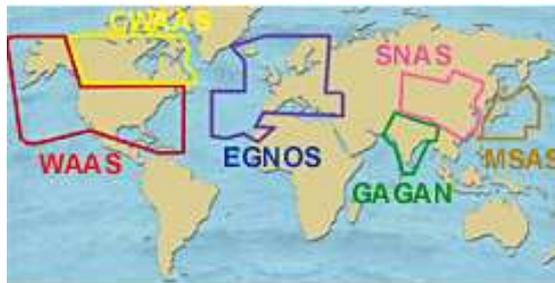


Figura 4.4 – Sistemas SBAS

Os GBAS são sistemas instalados, por exemplo, na proximidade de aeroportos, sendo constituídos por estações de controlo e vários transmissores, que emitem as correcções a aplicar às observações, de modo a aumentar a exactidão e dar maior segurança nos procedimentos de aterragem e descolagem dos aviões.

4.1.3. O Serviço Internacional GNSS (IGS)

O Serviço Internacional GNSS (International GNSS Service - IGS) é a combinação dos sistemas globais de navegação por satélite já existentes a nível mundial, nomeadamente o Sistema de Posicionamento Global (GPS) e o sistema russo GLONASS, juntamente com os sistemas SBAS e GBAS. A segunda geração do IGS, integrará também o sistema europeu GALILEO e terá objectivos civis, permitindo obter a exactidão e integridade necessária para a navegação civil.

4.2. Fotogrametria

A Fotogrametria dedica-se à obtenção de informação acerca de objectos a partir de fotografias destes. Os processos fotogramétricos são executados em várias fases:

1. Planeamento da cobertura fotogramétrica e obtenção das fotografias;
2. Processamento das fotografias;

3. Extração da informação a partir de modelos estereoscópicos e tratamento dos resultados com vista à obtenção do resultado final pretendido (coordenadas de pontos ou mapas).

A Fotogrametria pode ser dividida em duas categorias: a Fotogrametria métrica, que envolve todo o trabalho quantitativo, como a determinação da posição de pontos do terreno, determinação de distâncias, de diferenças de nível, áreas, volumes, etc; e a Fotogrametria interpretativa ou fotointerpretação, onde as imagens são analisadas qualitativamente, com vista à identificação de objectos.

A Fotogrametria métrica é normalmente dividida em Fotogrametria terrestre e Fotogrametria aérea. Na Fotogrametria terrestre as fotografias são tiradas de pontos fixos de coordenadas conhecidas, situados no solo ou junto dele. Na Fotogrametria aérea, a câmara fotográfica é colocada num avião e, à medida que o avião sobrevoa a região, são tiradas fotografias de uma forma sistemática e organizada.

Quase todos os mapas produzidos hoje em dia são obtidos a partir de Fotogrametria aérea.

Note-se que uma fotografia aérea não é equivalente a um mapa. Em primeiro lugar, uma fotografia é uma projecção cónica e não uma projecção cilíndrica e, além disso, a forma do terreno e a posição da câmara introduzem distorções. Por exemplo, quando o terreno não é perfeitamente plano e todo ao mesmo nível, a escala da fotografia nos pontos mais altos será maior do que a escala nos pontos mais baixos, pois aqueles estão mais próximos da câmara.

A obtenção de um mapa a partir de fotografias requer que o terreno seja representado em pelo menos duas fotografias aéreas consecutivas e com sobreposição. A partir destas, utilizando-se técnicas fotogramétricas, pode-se obter uma réplica tridimensional do terreno numa determinada escala, o que permite determinar a posição planimétrica e altimétrica de pontos do terreno, permitindo a obtenção da informação necessária à construção dos mapas planimétricos e topográficos, de perfis do terreno, etc.

4.2.1. Aquisição e processamento de fotografias aéreas

O primeiro passo da execução de um levantamento fotogramétrico é o planeamento da aquisição das fotografias. Para a execução de mapas topográficos ou de ortofotomapas utilizam-se normalmente fotografias verticais. Chama-se *fotografia vertical* àquela em que o eixo da câmara é colocado vertical, embora existam sempre movimentos indesejáveis do avião que causam inclinações de alguns graus em relação à vertical (esta inclinação é normalmente de cerca de 1° e raramente excede 5°).

No caso de uma fotografia aérea vertical com formato quadrado (normalmente 22,8 x 22,8 cm) a região de terreno coberta por cada fotografia também é um quadrado. À medida que o avião vai sobrevoando o terreno são tiradas fotografias sucessivas, de modo que cada duas fotografias adjacentes cubram uma área comum superior a metade da área coberta por uma só fotografia. Esta área é chamada *sobreposição* e é normalmente 60% da área coberta por uma fotografia (ver Figura 4.5).

A linha que une o centro das sucessivas fotografias tiradas numa determinada direcção é chamada *linha de voo* e o conjunto dessas fotografias é normalmente referido como uma *fiada*. Quando o avião chega ao fim de uma fiada volta para trás na direcção contrária, como se mostra na Figura 4.5, e tira as fotografias da fiada seguinte de modo que exista uma sobreposição de cerca de 20% com a fiada anterior. Esta sobreposição, designada por

sobreposição lateral, tem como finalidade assegurar a não existência de regiões não fotografadas entre fiadas sucessivas, de modo a obter-se a informação desejada sem lacunas.

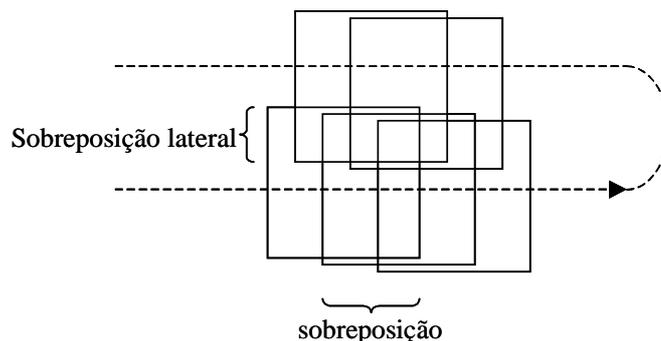


Figura 4.5 - Sobreposição e sobreposição lateral das fotografias aéreas pertencentes a duas fiadas contíguas.

4.2.2. Escala de uma fotografia aérea

A escala de uma fotografia aérea depende da distância focal f da câmara utilizada e da altura de voo H .

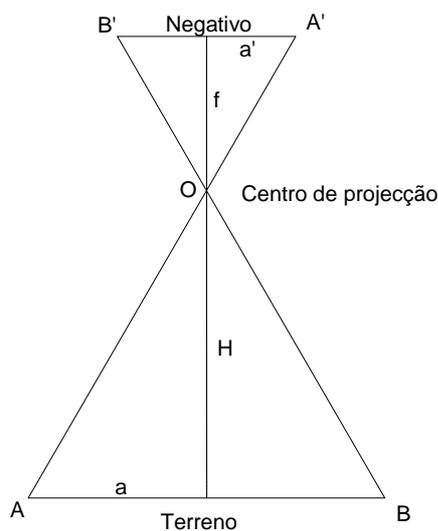


Figura 4.6 - Geometria de uma fotografia aérea vertical. Os pontos A e B têm como imagem respectivamente os pontos A' e B'. O ponto O é o centro de projecção da fotografia, sendo f a distância focal da câmara e H a altitude de voo.

Como se pode observar na Figura 4.6, os triângulos $[AOB]$ e $[B'OA']$ são semelhantes, logo:

$$\frac{a'}{f} = \frac{a}{H} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{f}{H}$$

Se representarmos por $1/E$ a escala da fotografia, que é a razão entre a distância entre dois pontos na fotografia e a distância entre os mesmos dois pontos no terreno (se este for horizontal), então:

$$\frac{1}{E} = \frac{a'}{a} = \frac{f}{H}$$

Desta forma, podemos dizer que a escala da fotografia é a razão entre a distância focal da câmara e a altura de voo.

Note-se que apenas teremos uma escala uniforme nas fotografias se o terreno a sobrevoar for aproximadamente plano e horizontal, o que numa grande parte dos casos não se verifica. Se a variação do relevo for considerável, determina-se a escala média da fotografia através da expressão:

$$\frac{1}{E_{med}} = \frac{f}{H_D - h_{med}}$$

onde E_{med} é o denominador da escala média da fotografia, H_D a altitude de voo relativamente a um datum e h_{med} a altitude média do terreno relativamente a esse datum.

4.2.3. Estereoscopia

A estereoscopia é a capacidade dos indivíduos terem uma percepção tridimensional dos objectos recorrendo a duas imagens obtidas a partir de pontos distintos (os olhos). Cada olho humano permite obter uma visão monocular, que resulta numa perspectiva plana, não permitindo obter informação acerca da profundidade. A visão só com um olho fixa apenas a direcção a que está o objecto, o que é insuficiente para avaliar a distância a que este está do observador. A visão binocular, por outro lado, permite ver um objecto a partir de dois pontos diferentes, devido à separação entre os olhos. Assim, fixa-se uma segunda direcção e a sua intersecção com a primeira localiza o ponto. Pontos mais próximos do observador correspondem a maiores ângulos de convergência entre as duas direcções. Como o ângulo Φ_1 (ver Figura 4.7) é maior do que o ângulo Φ_2 o observador verá o ponto P_1 mais próximo de si do que o ponto P_2 .

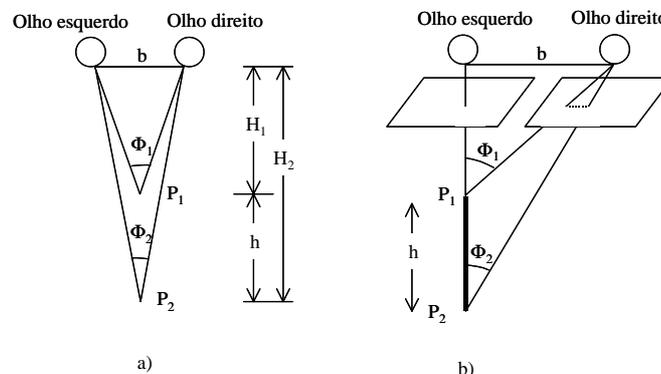


Figura 4.7 - a) Ângulo de convergência na visão estereoscópica. b) Visão estereoscópica com um par de fotografias com sobreposição.

Na Figura 4.7 pode ver-se a analogia entre a visão binocular natural e a visão estereoscópica obtida usando um par de fotografias com sobreposição. Suponhamos que se fotografou uma torre duas vezes, primeiro com a câmara directamente sobre esta e uma segunda vez depois de o avião se ter deslocado uma certa distância. Se for possível ver a primeira fotografia apenas com o olho esquerdo e a segunda apenas com o olho direito, o observador terá uma percepção tridimensional da torre. Os raios visuais correspondentes ao topo da torre intersectam-se segundo um ângulo Φ_1 enquanto que os raios correspondentes à base da torre intersectam-se segundo um ângulo Φ_2 . Como $\Phi_1 > \Phi_2$, o topo da torre aparecerá mais próximo do observador do que a sua base e o observador terá uma visão tridimensional

da torre. A visão estereoscópica de imagens é muito importante tanto para a fotogrametria métrica como interpretativa.

4.2.4. Paralaxe estereoscópica

O termo paralaxe é utilizado para indicar o movimento da imagem de um objecto fixo em relação a outro objecto fixo quando o ponto de observação está em movimento. Se olharmos através da janela de um comboio em movimento, vemos os objectos mais próximos a deslocarem-se a uma velocidade maior do que os que estão mais afastados. O deslocamento relativo destes objectos chama-se paralaxe (os objectos mais próximos deslocaram-se aparentemente mais do que os mais afastados, logo têm uma paralaxe maior). Ao utilizarmos uma câmara aérea para tirar fotografias em intervalos de tempo constantes, de modo que exista sobreposição da região fotografada, ela vai registar a posição dos objectos nos vários instantes de exposição. A mudança de posição dos objectos de uma fotografia para a fotografia seguinte, provocada pelo deslocamento do avião, é chamada de *paralaxe estereoscópica* ou simplesmente *paralaxe*. Existe paralaxe em todos os objectos que aparecem em fotografias sucessivas sendo, de uma forma análoga ao deslocamento de um comboio, a paralaxe dos pontos mais elevados (portanto mais próximos do avião) superior à paralaxe dos pontos mais baixos. Os métodos fotogramétricos de determinação da elevação dos pontos baseiam-se neste efeito, resultando da medição da variação da paralaxe de pontos representados nas fotografias.

4.2.5. Produtos obtidos a partir de fotografias aéreas

As principais aplicações da Fotogrametria aérea são a construção de:

Mapas planimétricos - mapas que contêm apenas informação acerca da posição horizontal dos pontos do terreno.

Mapas topográficos - mapas que indicam o detalhe planimétrico bem como informação altimétrica (normalmente curvas de nível).

Ortofotomapas - representações fotográficas preparadas de forma a que não existam as distorções normalmente existentes nas fotografias e que podem ser utilizados como mapas.

Para obter mais informação sobre Fotogrametria consultar, por exemplo, Moffit e Mikhail (1980).

4.3. Detecção Remota

A Detecção Remota é a ciência que trata da aquisição à distância de informação sobre a superfície terrestre. Os sensores podem estar em vários tipos de plataformas, nomeadamente em satélites artificiais ou aviões.

Os sensores podem ser activos ou passivos. Os sensores activos enviam radiação (normalmente microondas) que é reflectida pela superfície terrestre e posteriormente detectada no sensor. Os sensores passivos apenas detectam a radiação emitida e/ou reflectida pela superfície terrestre. Existem sensores que não geram imagens e sensores capazes de gerar imagens. Estes últimos são constituídos por muitos detectores. Cada detector regista a energia reflectida por um pequeno quadrado da superfície da Terra, que é convertida num valor numérico e é associada a um elemento quadrado da imagem (pixel). O conjunto dos vários pixels forma uma imagem digital (ver Figura 4.8). A informação armazenada em cada pixel corresponde assim à intensidade da radiação numa banda do espectro electromagnético reflectida e/ou emitida por uma zona da superfície terrestre. Essa informação é depois

transmitida para a Terra para as estações de recolha de dados, que a disponibilizam aos utilizadores.

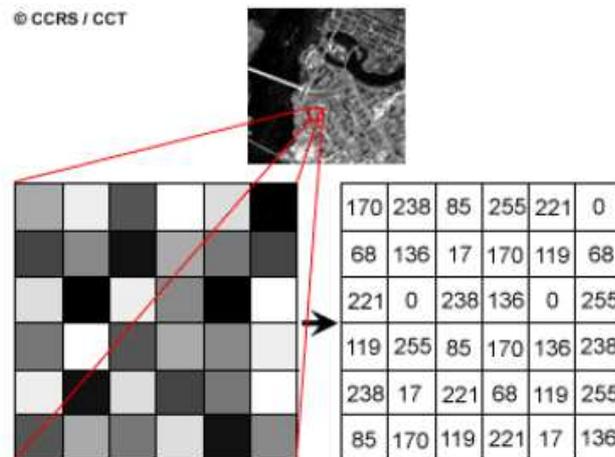


Figura 4.8 – Imagem obtida por um sensor remoto.

Os sensores colocados nos satélites artificiais apresentam características diversas, que podem ser caracterizados pela sua:

- Resolução espacial - dimensão do menor objecto que pode ser detectado com fiabilidade. Depende das condições atmosféricas, do contraste entre os objectos e as zonas circundantes;
- Resolução espectral - dimensão dos intervalos de comprimento de onda do espectro electromagnético que o sensor detecta. Quanto mais alta a resolução espectral (intervalos menores) mais fácil é distinguir entre diferentes objectos ou temas.
- Resolução radiométrica - sensibilidade de um sensor às variações de intensidade do sinal quando regista o fluxo radiante reflectido ou emitido pela superfície terrestre;
- Resolução temporal - intervalo de tempo entre a obtenção de uma imagem da mesma região;

Cada plataforma de recolha de dados pode conter vários sensores, em várias bandas do espectro electromagnético, nomeadamente na zona do visível, infravermelho e microondas.

Na Tabela 4.2 estão indicadas as características de alguns sensores instalados em satélites artificiais que recolhem imagens da superfície da Terra.

A radiação recebida pelos sensores nas várias bandas do espectro electromagnético depende dos objectos que a emitiram e/ou reflectiram. Assim, a análise da intensidade da radiação recebida nas várias bandas permite classificar o que existe à superfície do planeta.

As aplicações da Detecção Remota são inúmeras, como, por exemplo, na cartografia da cobertura do solo, identificação de espécies vegetais, zonas de águas, zonas ardidas, espécies doentes, etc. Com as imagens de alta resolução (por exemplo as obtidas pelos satélites IKONOS e QuickBird), que permitem identificar objectos de pequena dimensão, surgem ainda novas aplicações que podem ir até à cartografia de grandes escalas.

Para mais informação sobre Detecção Remota consultar, por exemplo, Fonseca e Fernandes (2004) ou Lillesand *et al.* (2004).

Tabela 4.2 – Características dos sensores de alguns dos satélites que recolhem imagens da superfície da Terra.

Satélite	Lançamento	Resolução			
		Espacial (m)	Espetral (μm)	Radiométrica	Temporal
Landsat 5	1984	30	Visível: 0,45-0,52 0,52-0,60 0,63-0,69 Infravermelho: 0,76-0,90 1,55-1,75 2,08-2,35	8 bits	16 dias
		120	Infravermelho térmico: 10,4-12,5		
Landsat 7	1999	15	Pancromática: 0,50-0,90	8 bits	16 dias
		30	Visível: 0,45-0,52 0,52-0,60 0,63-0,69 Infravermelho: 0,76-0,90 1,55-1,75 2,08-2,35		
		60	Infravermelho térmico: 10,4-12,5		
Spot 4 Sensor HRVIR	1998	10	Pancromática: 0,61-0,68	8 bits	26 dias
		20	Visível: 0,50-0,59 0,61-0,68 Infravermelho próximo: 0,78-0,89 Infravermelho: 1,58-1,75		
Spot 5 Sensor HRG	2002	2,5 – 5	Pancromática: 0,48-0,71	8 bits	26 dias
		10	Visível: 0,50-0,59 0,61-0,68 Infravermelho próximo: 0,78-0,89		
		20	Infravermelho: 1,58-1,75		
IKONOS	1999	1	Pancromática: 0,45-0,90	11 bits	2,9 dias
		4	Visível: 0,45-0,52 0,52-0,60 0,63-0,69 Infravermelho: 0,76-0,90		1,5 dias
QuickBird	2001	0,61	Pancromática: 0,45-0,90	11 bits	3-7 dias
		2,41	Visível: 0,45-0,52 0,52-0,60 0,63-0,69 Infravermelho: 0,76-0,90		

4.4. Sistemas de Varrimento Laser

Laser é um acrónimo de “Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation”. O nome “varrimento laser” resulta da forma como as medições são efectuadas. A tecnologia Laser não é recente, no entanto, a sua utilização para obtenção de dados geográficos é relativamente recente. Os sistemas de varrimento laser são também conhecidos por LIDAR, que significa “LIght Detection And Ranging”.

O Lidar é constituído por um sensor activo que emite, em cada segundo, um feixe de luz que é composto por milhares de pulsos laser. O princípio usado no LIDAR consiste na medição da distância entre o sensor e o ponto que reflecte cada pulso laser emitido. A posição tridimensional (coordenadas X, Y e Z) da plataforma onde está colocado o sensor é conhecida, assim como a orientação do raio emitido, o que permite, conhecendo a distância percorrida pelo raio até ser recebido pelo sensor, determinar as coordenadas tridimensionais do ponto que o reflectiu. As distâncias observadas são processadas num software proprietário e disponibilizadas como uma nuvem de pontos no formato XYZ.

Em muitos sistemas é acoplado ao sensor de varrimento laser uma máquina fotográfica digital métrica, que permite identificar a textura correspondente a cada ponto recolhido. Colorindo cada ponto da nuvem de pontos com a cor adequada obtém-se uma representação tridimensional muito realista do objecto de estudo (ver Figura 4.9).

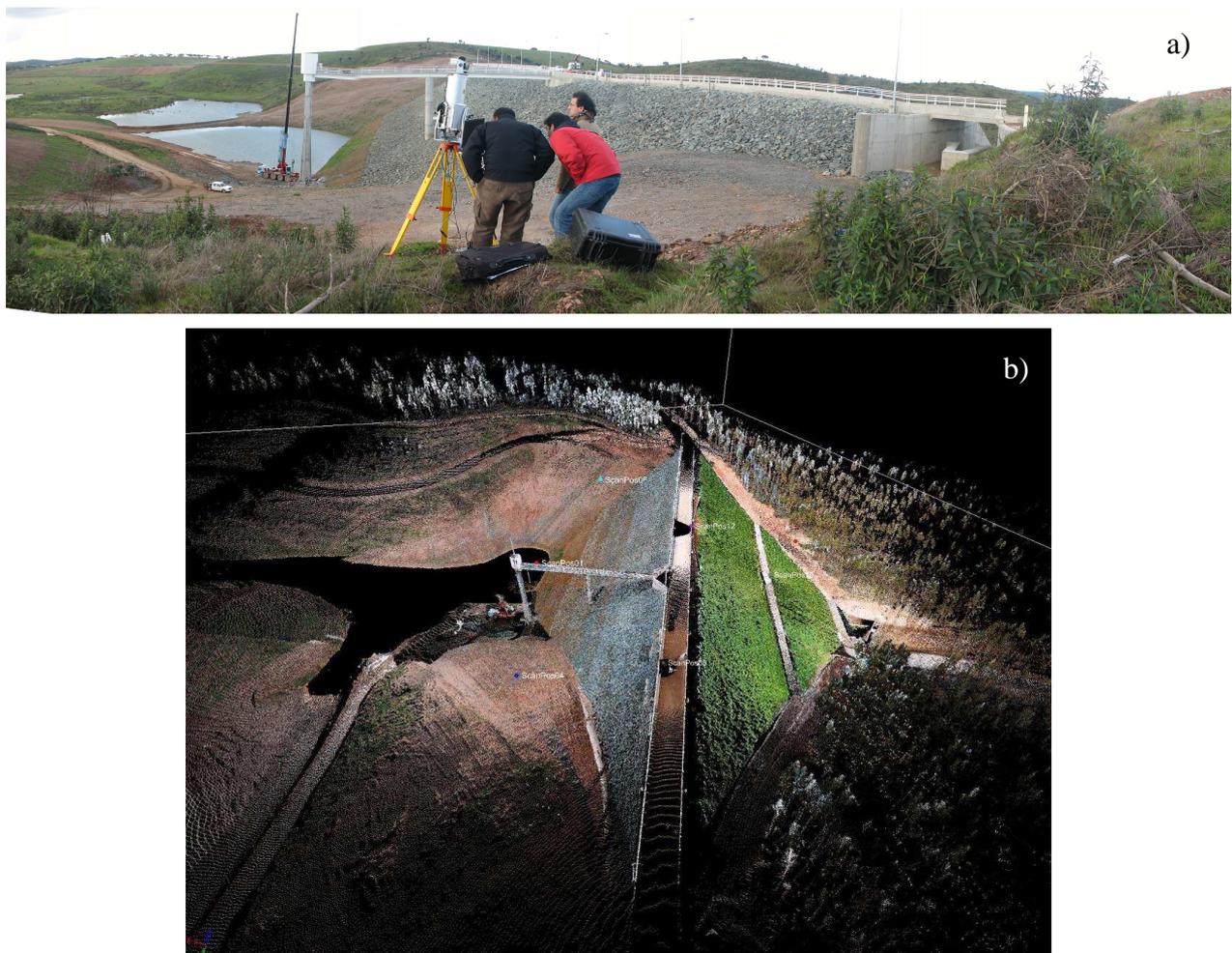


Figura 4.9 – a) Levantamento de uma barragem com um sistema de varrimento laser. b) Resultado do levantamento ilustrado em a) - nuvem de pontos com textura, obtida a partir das fotografias digitais (Artscan).

Com os sistemas de varrimento laser obtém-se um modelo tridimensional das zonas levantadas, conhecendo-se as coordenadas tridimensionais de todos os pontos, assim, é possível, por exemplo, fazer medições sobre o modelo, construir perfis ou vectorizar informação.

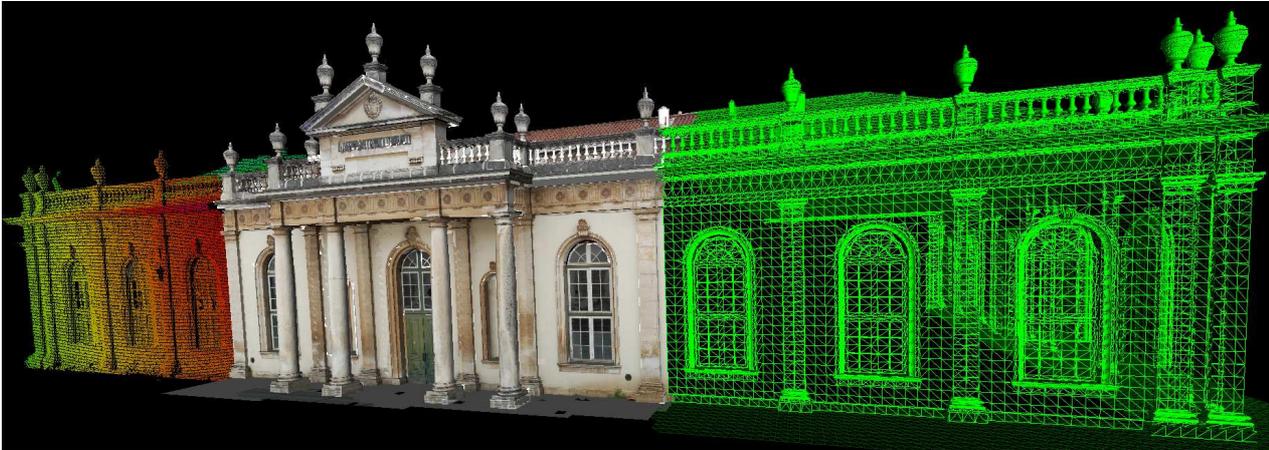


Figura 4.10 – Representação tridimensional do Laboratório Chimico (Universidade de Coimbra). Da esquerda para a direita: nuvem de pontos coloridos, nuvem de pontos com textura e grelha tridimensional (Artscan).

Os sistemas de varrimento laser podem ser usados no terreno para fazer modelos digitais de obras de Engenharia ou monumentos, ou a partir de plataformas aerotransportadas (aviões ou helicópteros) para obter modelos digitais da superfície da Terra (ver Figura 4.11).

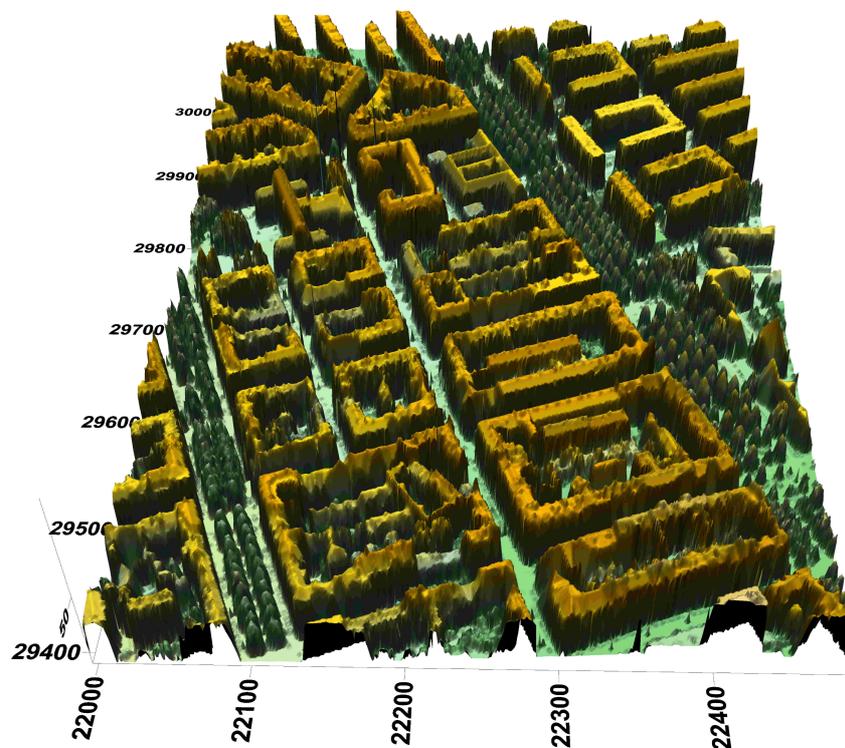


Figura 4.11 – Modelo digital de superfície obtido com LIDAR aéreo.

5. Representação Topográfica

5.1. Altimetria

Existem várias formas de representar o relevo do terreno, sendo as mais frequentes a representação com pontos cotados, curvas de nível e recorrendo a modelos digitais de terreno.

5.2. Curvas de nível

Neste tipo de representação considera-se o terreno cortado por planos de nível equidistantes. Chama-se *curvas de nível* à projecção, sobre a superfície de referência, das linhas resultantes da intersecção desses planos com o terreno. Junto a cada curva de nível é indicada a sua cota. A representação do relevo com curvas de nível é muito sugestiva.

À distância constante entre as curvas de nível dá-se o nome *de equidistância natural* (E_n), que, no caso da Figura 5.1, é de 10 m.

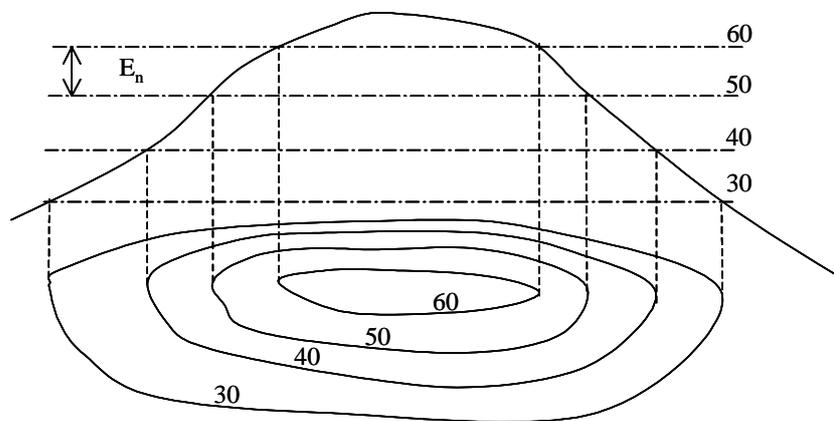


Figura 5.1 - Representação do relevo de uma região com curvas de nível.

Ao valor da equidistância natural reduzida à escala da carta dá-se o nome de *equidistância gráfica* (e), deste modo:

$$e = \frac{E_n}{L}$$

Para escolher a equidistância natural das curvas de nível a representar numa carta é necessário ter em consideração a escala da carta, o relevo do terreno e o objectivo do levantamento. Em Portugal são normalmente utilizadas as seguintes equidistâncias para as escalas indicadas:

ESCALA	E_n
1/50 000	25 m
1/25 000	10 m
1/10 000	5 m
1/5 000	5 m
1/1 000	1 m
1/500	0,5 m

Em terrenos muito acidentados deve aumentar-se o valor da equidistância para que as curvas de nível não se apresentem muito próximas, o que dificulta a leitura da carta. Inversamente, para terrenos muito pouco acidentados, deve adoptar-se uma equidistância menor.

A tangente trigonométrica da inclinação δ do terreno, em relação à horizontal, entre dois pontos A e B é designada por declive e o seu valor é dado por:

$$\partial_{AB} = \operatorname{tg} \delta = \frac{dN_{AB}}{AB}$$

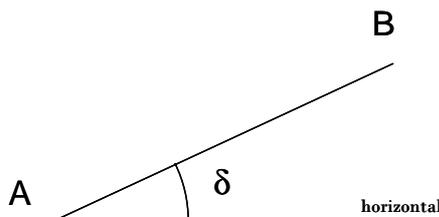


Figura 5.2 – Declive entre A e B.

A noção de declive pode também aplicar-se a pontos das curvas de nível e chama-se linha de maior declive à linha do terreno que forma o maior ângulo com o plano horizontal. A linha de maior declive é perpendicular às curvas de nível.

É evidente que quanto menor for a distância entre as curvas de nível maior é o declive do terreno nessa zona, conseqüentemente, a observação das curvas de nível dá uma ideia da forma do relevo.

5.2.1. Formas fundamentais do relevo

Apresenta-se de seguida a representação de formas básicas do relevo com curvas de nível. A identificação imediata destas formas quando representadas em cartas topográficas facilita a leitura das cartas.

Tergo - É a forma de relevo constituída pela intersecção de duas superfícies com a concavidade voltada para baixo. Na representação dum tergo as curvas de nível aparecem com a concavidade virada para a zona mais elevada do terreno.

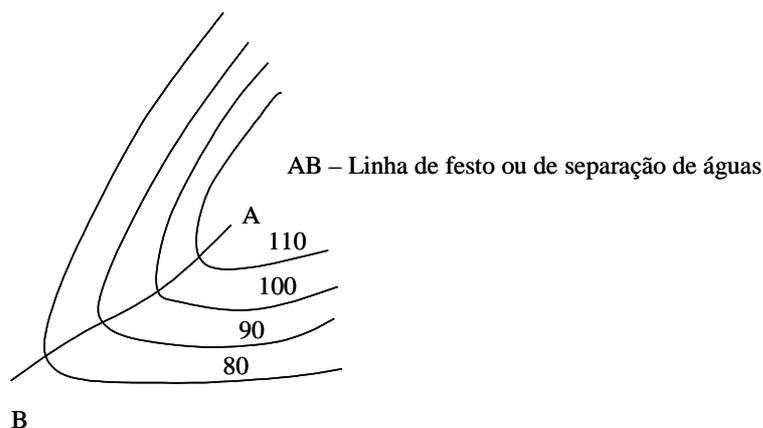


Figura 5.3 - Representação de um tergo com curvas de nível.

Vale – A representação de um vale é constituída pela intersecção de duas superfícies com a concavidade voltada para cima. Na representação de um vale as curvas de nível aparecem com a concavidade voltada para a base do terreno.

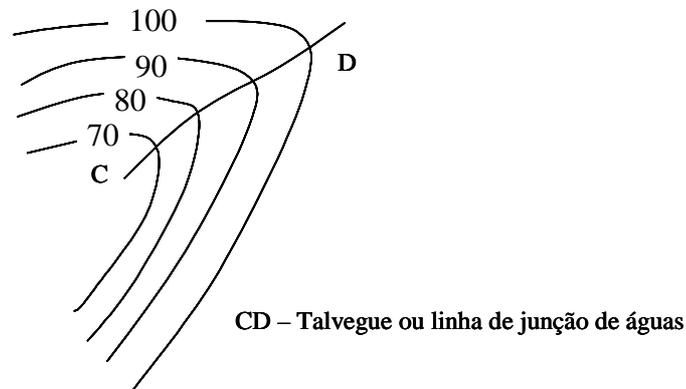


Figura 5.4 - Representação de um vale com curvas de nível

Todas as outras formas de relevo aparecem como uma associação de tergos e vales. Assim:

Colina, outeiro ou monte é uma associação de dois tergos.

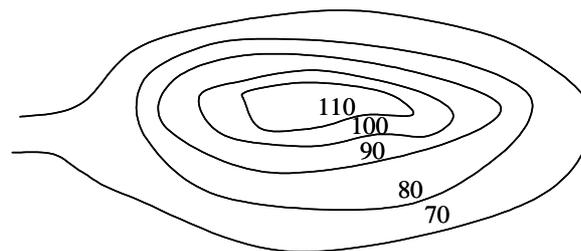


Figura 5.5 - Representação de uma colina com curvas de nível.

Bacia ou covão é uma associação de dois vales.

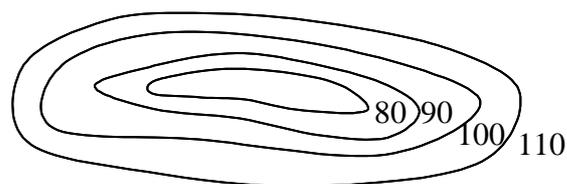


Figura 5.6 - Representação de uma bacia ou covão com curvas de nível.

Colo, portela ou garganta é uma combinação adequada de dois tergos e dois vales.

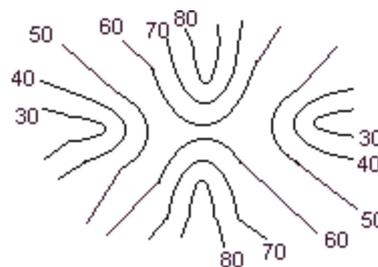


Figura 5.7 - Representação de um colo, portela ou garganta com curvas de nível.

5.3. Pontos cotados

A representação do relevo com pontos cotados consiste em representar a posição planimétrica e altimétrica de um conjunto de pontos do terreno. Estes pontos são assinalados na carta, sendo a sua cota impressa junto ao ponto.

Os pontos escolhidos para representar o relevo devem defini-lo perfeitamente. Assim, os pontos devem ser escolhidos de modo que entre cada ponto e os pontos mais próximos se possa considerar constante a inclinação do terreno, dentro da precisão exigida. Tais pontos chamam-se *pontos notáveis do terreno*. Assim, a *inclinação do terreno* entre dois pontos notáveis A e B é a inclinação da recta que passa por eles.

5.3.1. Casos em que se utilizam pontos cotados

Como a representação do relevo com pontos cotados é pouco sugestiva não é muito usada, embora, em certas situações, se torne útil. São a seguir expostos alguns casos em que isso acontece.

5.3.1.1. Representação de zonas urbanas

Nos arruamento escolhem-se para pontos cotados os pontos de mudança de declive e os pontos dos cruzamentos dos eixos das vias (ver Figura 5.8).

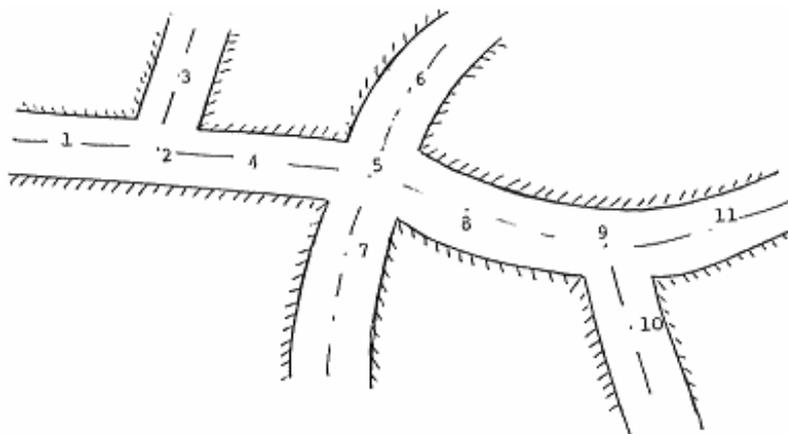


Figura 5.8 - Representação do relevo de uma região urbana com pontos cotados.

5.3.1.2. Representação de regiões pouco acidentadas

No caso de o terreno ser quase plano pode fazer-se a representação do relevo com pontos cotados. A densidade dos pontos a representar é função da precisão exigida.

5.3.1.3. Completagem do traçado das curvas de nível

Quando o relevo é representado por curvas de nível, os pontos com maior e menor altitude são sempre pontos notáveis do terreno e são representados como pontos cotados (ver Figura 5.9). Podem ainda representar-se outros pontos de interesse especial para o trabalho em questão.

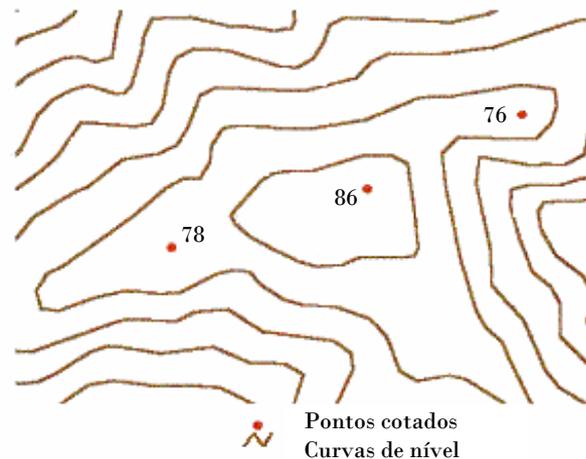


Figura 5.9 – Representação do relevo com curvas de nível e pontos cotados.

5.4. Modelos digitais de terreno

Um modelo digital de terreno (MDT) é uma representação numérica e matemática do relevo do terreno. A partir de um conjunto discreto de pontos, com coordenadas planimétricas (x, y) e cota z conhecidas, é possível construir, utilizando métodos de interpolação, uma superfície $z = f(x, y)$. Esta superfície é uma modelação digital do terreno e permite estimar o valor da altitude em qualquer ponto. Note-se que, sendo os valores de z obtidos através de uma função, a cada ponto do terreno (x, y) apenas pode ser atribuído um valor de z , não sendo portanto possível representar, por exemplo, cavernas ou paredes verticais.

A aquisição de informação para a construção de um MDT pode ser feita por processos fotogramétricos, curvas de nível de mapas já existentes, trabalhos taqueométricos, dados obtidos através de detecção remota ou varrimento laser, ou qualquer outro tipo de métodos ou sistemas que permitam a obtenção de coordenadas planimétricas e altitude de pontos do terreno.

5.4.1. Construção de um MDT

O processo de recolha de dados dá origem a um conjunto de pontos de cota conhecida. Para a construção de um modelo digital de terreno coerente é necessário estabelecer relações topológicas entre estes pontos e escolher um método de interpolação que origine uma superfície que se aproxime da forma do terreno.

As estruturas de dados utilizados para a modelação do terreno são as grelhas rectangulares de pontos (GRID), ver Figura 5.10a), e as redes irregulares de triângulos (Triangulated Irregular Network - TIN), ver Figura 5.10b). As vantagens e desvantagens de ambas as estruturas de dados são expostas na Tabela 5.1.

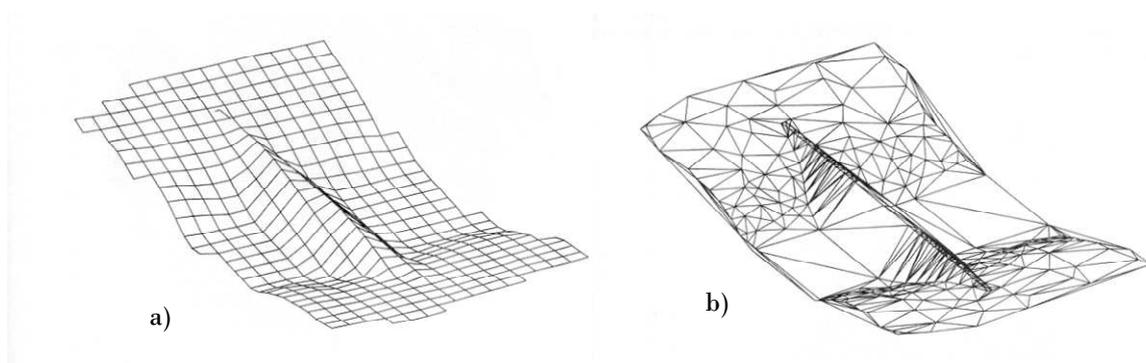


Figura 5.10 - a) Grelha rectangular (GRID). b) Rede irregular de triângulos (TIN).

Tabela 5.1 Vantagens e desvantagens das grelhas regulares e das redes irregulares de triângulos.

	Vantagens	Desvantagens
Grelhas rectangular (GRID)	<ul style="list-style-type: none"> • O seu manuseamento em computador é simples; • É mais simples construir modelos de interpolação para grelhas rectangulares. 	<ul style="list-style-type: none"> • A densidade de pontos não pode ser aumentada para se adaptar à complexidade do relevo; • É necessário um grande número de pontos para ser possível fazer a representação do relevo com determinada precisão; • Não conseguem descrever características estruturais do terreno como características topográficas .
Rede Irregular de Triângulos (TIN)	<ul style="list-style-type: none"> • Permitem representar o terreno com maior fiabilidade. • São necessários menos pontos para se construir um MDT com determinada precisão. 	<ul style="list-style-type: none"> • São mais complexos e mais difíceis de manusear; • É mais difícil construir o modelo de interpolação.

5.4.2. Exemplos de aplicação dos MDT

Os modelos digitais de terreno permitem, por exemplo, visualizar o terreno a três dimensões, representá-lo recorrendo a diagramas de blocos, mapas de sombreados ou com as tradicionais curvas de nível, calcular volumes de aterro e escavação, regiões de visibilidade, declives ou orientação de encostas, sendo portanto de muita utilidade em muitas áreas de Engenharia Civil.

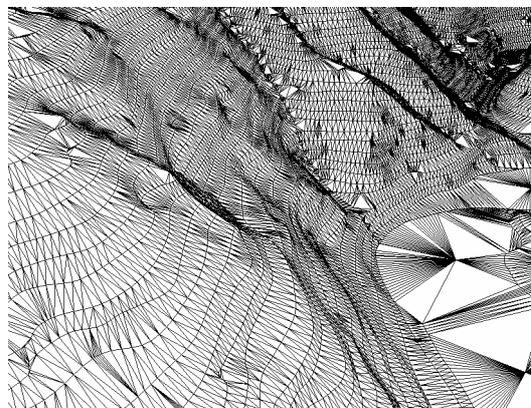


Figura 5.11 – Representação tridimensional do relevo utilizando uma rede irregular de triângulos (TIN).

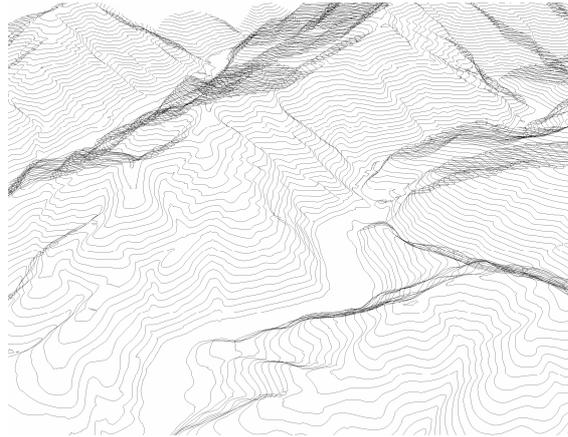


Figura 5.12 – Representação tridimensional do terreno com curvas de nível obtidas a partir de um MDT.

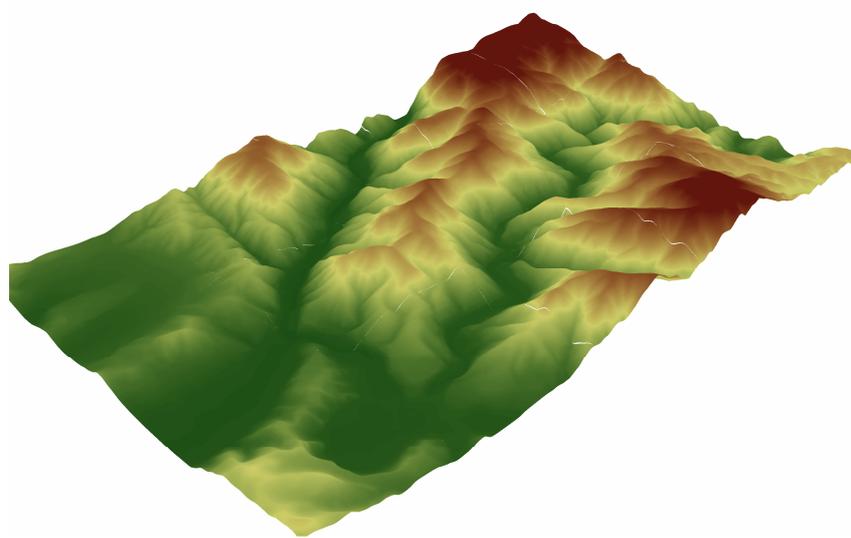


Figura 5.13 - Modelo tridimensional do terreno obtido a partir de um MDT.

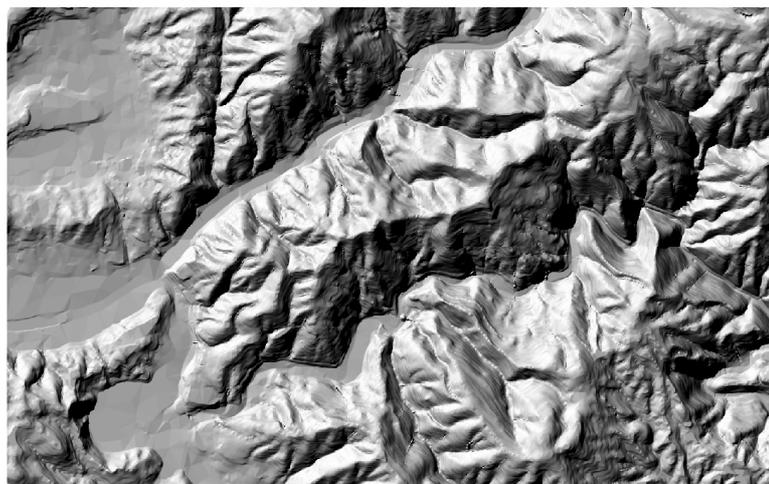


Figura 5.14 – Mapa de relevo sombreado construído a partir de um MDT.

6. Aplicações

A Informação Geográfica é cada vez mais utilizada em muitas áreas, como, por exemplo, ambiente, engenharias, arquitectura, arqueologia, etc. No âmbito da Engenharia Civil este tipo de informação é importante, por exemplo, em hidráulica, no planeamento e ordenamento do território e na área da construção de infra-estruturas, onde:

- a implantação de obras consiste na transferência para o terreno do projecto de uma obra, sendo utilizados métodos análogos aos utilizados nos levantamentos topográficos.
- a construção de obras de grande dimensão tem de ser acompanhada com operações topográficas, que têm como objectivo verificar se a obra está a ser executada de acordo com o projecto.
- em obras de grande responsabilidade e após a sua conclusão, torna-se necessário, como medida de segurança, estudar periodicamente o seu comportamento.

Referências

- [1] Antunes, A. Peixoto (1991) "*Topografia - Curso Geral*". Departamento de Matemática da FCTUC.
- [2] Burrough, P.A; McDonnell R. (1998) "*Principles of Geographical Information Systems*", Oxford University Press.
- [3] Casaca, João, Matos, J, Baio, M. (2005) "*Topografia Geral*". Lidel.
- [4] Davis, R.; Francis, F.; Mikhail, E.(1981) "*Surveying - Theory and Practice*". Library of Congress Cataloging in Publication Data.
- [5] Fonseca, A., Fernandes, J. (2004) "*Detecção Remota*". Lidel.
- [6] Gaspar, J. A. (2000) "*Cartas e Projecções Cartográficas*". Lidel.
- [7] Instituto Geográfico do Exército (1998) "Sistemas de Referenciação". Publicação do Instituto Geográfico do Exército.
- [8] Instituto Geográfico do Exército (2004) "Manual de leitura de cartas". Publicação do Instituto Geográfico do Exército.
- [9] Laurila, S. (1983) "*Electronic Surveying in Practice*", John Wiley & Sons.
- [10] Lillesand, T., Kiefer, R., Chipman, J. (2004) "*Remote Sensing and Image Interpretation*". John Wiley & Sons, Inc.
- [11] Moffit, F.; Mikhail, E. (1980) "*Photogrammetry*". Harper & Row. Publishers, New York.
- [12] Robinson, Arthur H. (1985) "*Elements of Cartography*", John Wiley & Sons.
- [13] Segante, Paulo C. (2005) "GPS - Sistema de Posicionamento Global", EESC/USP.
- [14] Weibel, R; Heller, M. (1991) "*Digital Terrain Modeling*". In: *Geographical information Systems: principals and applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [15] Wells, David (1987) "*Guide to GPS Positioning*". Canadian GPS Associates.
- [16] Xerez, A. (1978) "*Topografia Geral*". Técnica - Revista de Engenharia, Associação dos estudantes do I.S.T. - Lisboa.

Anexo1 - Formulário

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \hat{A}} = \frac{\overline{CA}}{\sin \hat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\sin \hat{C}}$$

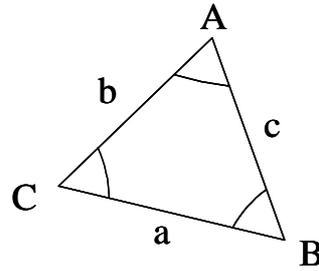
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC} \cos \hat{C}$$

$$M_B = M_A + \overline{AB} \sin(AB)$$

$$P_B = P_A + \overline{AB} \cos(AB)$$

$$\operatorname{tg}(AB) = \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2}$$



R zero de uma estação

$$R_0^E = (EA) - \ell_{EA}$$

Fórmula taqueométrica da distância para mira vertical

$$D = G \sin^2 z$$

Nivelamento

$$dN_{AB} = N_B - N_A$$

Nivelamento trigonométrico

$$dN_{AB} = h + i - Av \qquad h = D \cotg z$$

$$H = D(\cotg z_T - \cotg z_B)$$

Nivelamento geométrico

$$dN_{AB} = \ell_A - \ell_B$$

$$\ell_A = \ell'_A - D_A \operatorname{tg} \beta$$

Intersecção directa e lateral

$$P_Q - P_A = \frac{(M_B - M_A) - (P_B - P_A) \operatorname{tg}(BQ)}{\operatorname{tg}(AQ) - \operatorname{tg}(BQ)}$$

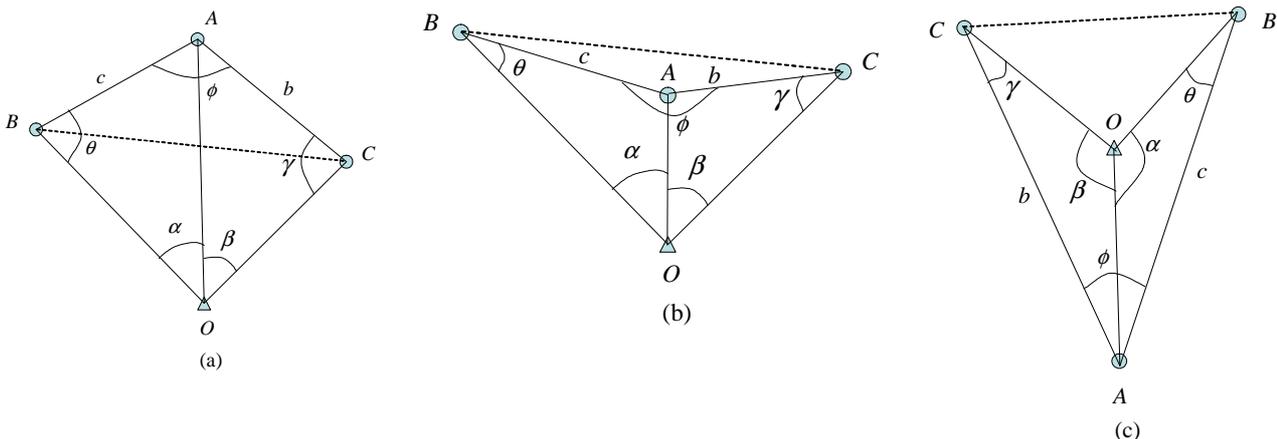
$$M_Q - M_A = (P_Q - P_A) \operatorname{tg}(AQ)$$

$$M_Q - M_A = \frac{(P_B - P_A) - (M_B - M_A) \operatorname{cotg}(BQ)}{\operatorname{cotg}(AQ) - \operatorname{cotg}(BQ)}$$

$$P_Q - P_A = (M_Q - M_A) \operatorname{cotg}(AQ)$$

Intersecção Inversa

Neste tipo de intersecção estaciona-se o vértice de coordenadas a determinar, O , o qual aponta para três vértices de coordenadas conhecidas, que designamos por A , B e C , sendo medidos dois ângulos azimutais α e β .



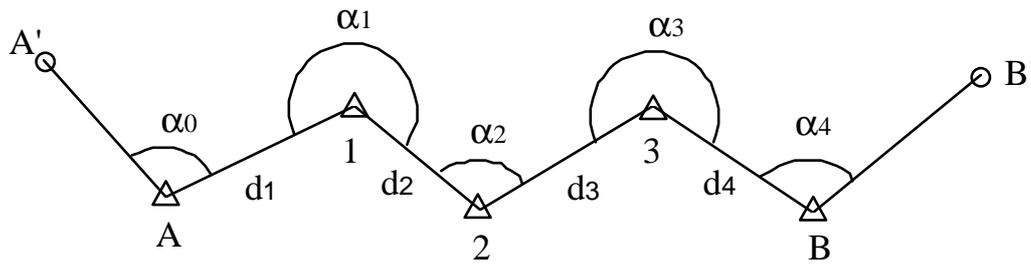
Três casos possíveis para a intersecção inversa.

Algoritmo

O processo de cálculo segue os seguintes passos:

1. Calcular os ângulos α e β a partir das leituras azimutais: $\alpha = \ell_{OA} - \ell_{OB}$ e $\beta = \ell_{OC} - \ell_{OA}$.
2. Calcular as distâncias $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$.
3. Determinar o ângulo ϕ , utilizando, por exemplo, a diferença entre rumos: $\phi = (AB) - (AC)$.
4. Determinar R por meio de $R = 400^g - (\phi + \alpha + \beta)$.

5. Tendo em atenção que $0 < \gamma < 200^\circ$, determinar γ utilizando $\cot \gamma = \cot R + \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta \sin R}$.
6. Calcular $\theta = R - \gamma$.
7. Determinar a distância \overline{AO} utilizando $\overline{AO} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$ (e, se pretendido, confirmar o cálculo por meio de $\overline{AO} = \frac{c \sin \theta}{\sin \alpha}$).
8. Calcular o rumo (AO) , por intermédio $(AO) = (AC) + \hat{CAO}$, sendo $\hat{CAO} = 200^\circ - \gamma - \beta$.
9. Calcular o rumo inverso (OA) por intermédio de $(OA) = (AO) \pm 200^\circ$.
10. Determinar (OC) através de $(OC) = (OA) + \beta$.
11. Calcular o rumo inverso (CO) através de $(CO) = (OC) \pm 200^\circ$.
12. Se pretendido, confirmar os cálculos por meio de $(CA) = (CO) + \gamma$.
13. Determinar \overline{CO} pela analogia dos senos: $\overline{CO} = \frac{b \sin \hat{CAO}}{\sin \beta}$.
14. Calcular as coordenadas planimétricas de O por meio de $M_o = M_c + \overline{CO} \sin(CO)$ e de $P_o = P_c + \overline{CO} \cos(CO)$.
15. Se pretendido, confirmar cálculos a partir de $M_o = M_a + \overline{AO} \sin(AO)$ e de $P_o = P_a + \overline{AO} \cos(AO)$, sendo \overline{AO} obtido por meio da analogia dos senos: $\overline{AO} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$.

Poligonação**1ª FASE: CÁLCULO DOS RUMOS**

1) Cálculo dos rumos (AA') e (BB'):

$$\text{tg}(AA') = \frac{M_{A'} - M_A}{P_{A'} - P_A}$$

$$\text{tg}(BB') = \frac{M_{B'} - M_B}{P_{B'} - P_B}$$

2) Cálculo de (BB')* :

$$(A1) = (AA') + \alpha_0$$

$$(12) = (A1) + \alpha_1 \pm 200^g$$

$$(23) = (12) + \alpha_2 \pm 200^g$$

$$(3B) = (23) + \alpha_3 \pm 200^g$$

$$(BB') = (3B) + \alpha_4 \pm 200^g$$

$$(BB')^* = (AA') + \sum_{i=0}^4 \alpha_i - 200k \quad (k \text{ inteiro})$$

3) Determinação do erro de fecho angular e verificação da tolerância:

$$\varepsilon_a = (BB') - (BB')^*$$

Tolerância angular:

Alta precisão: $T_a = (\sqrt{n})'$ $n \rightarrow$ número de ângulos

Média precisão: $T_a = (2\sqrt{n})'$

Baixa precisão: $T_a = (4\sqrt{n})'$

4) Cálculo dos ângulos corrigidos

$$\overline{\alpha_0} = \alpha_0 + c_0$$

$$\overline{\alpha_1} = \alpha_1 + c_1$$

$$\overline{\alpha_2} = \alpha_2 + c_2$$

$$c_0 \approx c_1 \approx c_2 \approx c_3 \approx c_4 \approx \frac{\varepsilon_a}{5}$$

$$\overline{\alpha_3} = \alpha_3 + c_3$$

$$\overline{\alpha_4} = \alpha_4 + c_4$$

5) Cálculo dos rumos definitivos

$$(A1) = (AA') + \alpha_0$$

$$(12) = (A1) + \alpha_1 \pm 200^g$$

$$(23) = (12) + \alpha_2 \pm 200^g$$

$$(3B) = (23) + \alpha_3 \pm 200^g$$

$$(BB') = (3B) + \alpha_4 \pm 200^g$$

2ª FASE: CÁLCULO DAS COORDENADAS

1) Cálculo das coordenadas relativas provisórias:

$$\Delta M_1 = M_1 - M_A = d_1 \sin(A1)$$

$$\Delta P_1 = P_1 - P_A = d_1 \cos(A1)$$

$$\Delta M_2 = M_2 - M_1 = d_2 \sin(12)$$

$$\Delta P_2 = P_2 - P_1 = d_2 \cos(12)$$

$$\Delta M_3 = M_3 - M_2 = d_3 \sin(23)$$

$$\Delta P_3 = P_3 - P_2 = d_3 \cos(23)$$

$$\Delta M_4 = M_B^* - M_3 = d_4 \sin(3B)$$

$$\Delta P_4 = P_B^* - P_3 = d_4 \cos(3B)$$

$$M_B^* = M_A + \sum \Delta M_i$$

$$P_B^* = P_A + \sum \Delta P_i$$

$$\varepsilon_M = M_B - M_B^*$$

$$\varepsilon_P = P_B - P_B^*$$

2) Cálculo do erro de fecho linear e verificação da tolerância:

$$\varepsilon_l = \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_P^2}$$

Tolerância linear: Alta precisão: $T_l = 0,005\sqrt{L} + 0,05$

Média precisão: $T_l = 0,01\sqrt{L} + 0,1$

Baixa precisão: $T_l = 0,06\sqrt{L}$

$$L = \sum d_i \text{ (comprimento da linha poligonal)}$$

3) Cálculo das coordenadas relativas corrigidas:

$$\overline{\Delta M_1} = \Delta M_1 + m_1$$

$$\overline{\Delta M_2} = \Delta M_2 + m_2$$

$$\overline{\Delta M_3} = \Delta M_3 + m_3$$

$$\overline{\Delta M_4} = \Delta M_4 + m_4$$

$$\overline{\Delta P_1} = \Delta P_1 + p_1$$

$$\overline{\Delta P_2} = \Delta P_2 + p_2$$

$$\overline{\Delta P_3} = \Delta P_3 + p_3$$

$$\overline{\Delta P_4} = \Delta P_4 + p_4$$

$$\frac{m_1}{|\Delta M_1|} = \frac{m_2}{|\Delta M_2|} = \frac{m_3}{|\Delta M_3|} = \frac{m_4}{|\Delta M_4|} = \frac{\varepsilon_m}{\sum |\Delta M_i|}$$

$$m_j = |\Delta M_j| \frac{\varepsilon_m}{\sum |\Delta M_i|}$$

$$\frac{p_1}{|\Delta P_1|} = \frac{p_2}{|\Delta P_2|} = \frac{p_3}{|\Delta P_3|} = \frac{p_4}{|\Delta P_4|} = \frac{\varepsilon_p}{\sum |\Delta P_i|}$$

$$p_j = |\Delta P_j| \frac{\varepsilon_p}{\sum |\Delta P_i|}$$

4) Cálculo das coordenadas definitivas:

$$M_1 = M_A + \overline{\Delta M_1}$$

$$M_2 = M_1 + \overline{\Delta M_2}$$

$$M_3 = M_2 + \overline{\Delta M_3}$$

$$M_B = M_3 + \overline{\Delta M_4}$$

$$P_1 = P_A + \overline{\Delta P_1}$$

$$P_2 = P_1 + \overline{\Delta P_2}$$

$$P_3 = P_2 + \overline{\Delta P_3}$$

$$P_B = P_3 + \overline{\Delta P_4}$$

Anexo 2 – Exercícios

1. Efectuar as seguintes conversões:

- Converter o ângulo do sistema centesimal $125,3475^g$ para o sistema sexagesimal.
- Converter o ângulo dado no sistema sexagesimal $265^\circ 15' 32''$ para o sistema centesimal.

2. Num círculo de raio $276,260\text{ m}$ determine qual o comprimento dos arcos correspondentes aos seguintes ângulos ao centro:

- $146^\circ 25' 40''$
- $146^g 25' 40''$

3. Calcule a altura de um poste vertical, sabendo que a sua sombra projectada num terreno horizontal mede $2,94\text{ m}$, quando a inclinação dos raios solares é de $40,35^g$.

4. No triângulo $[ABC]$ conhecem-se os seguintes elementos:

$$\hat{A} = 35,8315^g$$

$$\hat{B} = 53,0407^g$$

$$\overline{AB} = c = 275,154\text{ m}$$

Calcular os restantes lados do triângulo.

5. Resolva o triângulo $[ABC]$ de que se conhecem:

$$\overline{BC} = 31,77\text{ m}$$

$$\hat{B} = 41,70^g$$

$$\overline{AB} = 18,95\text{ m}$$

6. Os lados de um triângulo medem $1046,20\text{ m}$, $1797,54\text{ m}$ e $1318,45\text{ m}$.

- Calcular os ângulos do triângulo ao segundo.
- Calcular a área do referido triângulo.

7. No triângulo $[ABC]$ conhecem-se os elementos:

$$\overline{CA} = 27,20\text{ m}$$

$$\overline{BC} = 56,12\text{ m}$$

$$\hat{B} = 32,16^g$$

Determine os valores possíveis para a medida do lado \overline{AB} .

8. No triângulo $[ABC]$ sabe-se que $a = 543,90\text{ m}$; $b = 597,60\text{ m}$ e $c = 625,90\text{ m}$.

- Determinar a projecção de b sobre a .
- Determinar a área do triângulo.

9. Determine a distância de um ponto E ao alinhamento definido pelos pontos A e B , sabendo que:

$$\overline{AB} = 200,41\text{ m}$$

$$\overline{AE} = 111,30\text{ m}$$

$$\hat{B} = 30,443^g$$

Nota: Ter em atenção que \overline{AB} é o maior lado do triângulo $[ABE]$.

10. Para a execução de um determinado projecto mediu-se o comprimento do segmento \overline{AC} tendo-se obtido 1210,46 m. Foram depois estacionados dois teodolitos nos pontos B e D do terreno, situados em lados opostos de \overline{AC} , tendo-se observado os seguintes ângulos:

$$D\hat{B}A = 49,6478^{\circ}$$

$$C\hat{B}D = 75,2577^{\circ}$$

$$A\hat{D}B = 70,3605^{\circ}$$

$$B\hat{D}C = 32,9414^{\circ}$$

Calcular o comprimento \overline{BD} , sabendo que os quatro pontos definem o quadrilátero $[ABCD]$.

11. Sabendo que:

$$\text{rumo}(AB) = 346,421^{\circ}$$

$$B\hat{A}C = 42,421^{\circ}$$

$$\overline{AB} = 40,00 \text{ m} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = 35,00 \text{ m}$$

determine os rumos (BA) , (AC) , (CA) e (BC) .

12. Determine as coordenadas do ponto B , sabendo que:

$$(AB) = 247,625^{\circ}$$

$$\overline{AB} = 2041,26 \text{ m}$$

$$M_A = 12604,13 \text{ m} \quad P_A = -9063,75 \text{ m}$$

13. Sabendo que:

$$M_C = -2416,53 \text{ m} \quad P_C = 4082,27 \text{ m}$$

$$M_D = 3243,27 \text{ m} \quad P_D = 1625,14 \text{ m}$$

determine (CD) e \overline{CD} .

14. Calcule as distâncias \overline{AB} e \overline{AC} , sabendo que:

$$\overline{BC} = 468,36 \text{ m}$$

$$(BA) = 379,01^{\circ}$$

$$(AC) = 139,20^{\circ}$$

$$(CB) = 257,46^{\circ}$$

15. No triângulo equilátero $[ABC]$ sabem-se as coordenadas de A :

$$M_A = 572,85 \text{ m} \quad P_A = -1085,27 \text{ m}$$

e ainda:

$$(AB) = 257,25^{\circ} \quad \overline{AB} = 72,50 \text{ m}$$

Sabendo que (AC) é um rumo do 4º quadrante, determine as coordenadas de B e C .

16. Sabendo que:

$$M_C = -3804,72 \text{ m} \quad P_C = -4696,08 \text{ m}$$

$$M_D = -4607,16 \text{ m} \quad P_D = -3942,54 \text{ m}$$

$$C\hat{D}A = 32,125^{\circ} \quad \overline{AC} = 574,08 \text{ m}$$

e que $[CD]$ é o maior lado do triângulo $[ADC]$, determine as coordenadas de A .

17. No terreno encontram-se definidos os seguintes pontos: E_1 , A , E_2 e B . Sabendo que:

$$(E_1A) = 64,27^\circ$$

$$E_1\hat{A}B = 256,82^\circ$$

$$E_2\hat{B}A = 76,44^\circ$$

determine (E_2B) .

18. Calcular (BC) , sabendo que $(AA') = 200,00^\circ$, $A'\hat{A}B = 17,93^\circ$, $B\hat{A}C = 99,18^\circ$ e $A\hat{C}B = 55,59^\circ$.

19. No triângulo $[ABC]$ são conhecidos os seguintes elementos:

Vértices	M (m)	P (m)
A	8420,50	-6538,70
C	7648,30	-7642,10

$(AB) = 130,420^\circ$ e $(CB) = 100,000^\circ$. Calcular as coordenadas do ponto B .

20. As coordenadas de dois pontos B e C relativamente a um referencial com origem no ponto A são:

Vértices	M (m)	P (m)
B	449,95	536,23
C	1336,28	692,34

Calcular o raio da curva circular passando pelos três pontos.

21. Estacionou-se um teodolito num ponto E do terreno e fizeram-se as seguintes observações:

Vértices Visados	A	B	C	D	F
Leituras Azimutais	85,246 g	54,136 g	150,001 g	320,970 g	220,750 g

a) Determine os ângulos $A\hat{E}B$, $F\hat{E}D$, $B\hat{E}F$ e $D\hat{E}B$.

b) Sabendo que $(CE) = 124,683^\circ$, determine os rumos (EF) e (AE) .

22. Resolva o triângulo $[ABC]$ sabendo que $\overline{BC} = 31,77\text{ m}$, $\overline{AB} = 18,95\text{ m}$ e que no vértice B se fizeram as seguintes observações:

Estação	Vértices Visados	
	Vértices Visados	Leituras Azimutais
B	A	163,12 g
	C	121,42 g

23. No campo foi efectuado o seguinte registo de observações:

Estações	Vértices Visados		
	E_1	E_2	E_3
E_1	---	113,950 g	175,177 g
E_2	66,505 g	---	13,004 g

Sabendo que $\overline{E_1E_2} = 539,61\text{ m}$, determine $\overline{E_2E_3}$ e $\overline{E_3E_1}$.

24. A e B são dois pontos inacessíveis do terreno, cuja distância se pretende determinar. Para isso mediu-se um troço $\overline{PQ} = 108,32 \text{ m}$ e efectuou-se o seguinte registo de observações:

Estações	Vértices Visados (leituras azimutais)			
	A	B	P	Q
P	94,17 g	157,35 g	---	198,21 g
Q	18,91 g	86,95 g	398,48 g	---

Efectue o cálculo da referida distância, sabendo que os quatro pontos definem o quadrilátero $[ABQP]$.

25. Com um teodolito estacionado em E fizeram-se as seguintes observações:

Estação	Pontos Visados	Leituras azimutais
E	A	148,64 g
	B	226,25 g
	C	364,83 g

São ainda conhecidos:

$$M_A = -2850,60 \text{ m} \quad P_A = 5346,20 \text{ m} \quad \overline{AE} = 640,30 \text{ m} \quad \overline{EB} = 860,62 \text{ m} \quad (CE) = 240,23^\circ$$

- Determine as coordenadas do ponto B .
- Sabendo que $(BC) = 60,70^\circ$, determine \overline{CE} .

26. A e B são dois pontos do terreno numa das margens de um curso de água; C e D são outros dois pontos na margem oposta. Estacionaram-se dois teodolitos em C e D e obteve-se o seguinte registo de observações:

Estações	Pontos visados	Leituras azimutais
C	A	36,427g
	B	68,369g
	D	142,758g
D	C	326,140g
	A	2,394 g
	B	41,652 g

Sabendo que

	M (m)	P (m)
C	500,00	800,00
D	426,37	328,45

determine \overline{AB} .

27. No campo fizeram-se as seguintes observações azimutais:

Estação	Vértices Visados			
	A	B	C	D
E	207,96 g	329,75 g	96,47 g	151,71 g

Sabendo que $(EC) = 284,24^\circ$, determine:

- R_0^E .
- (EA) , (EB) e (ED) .

28. Sabe-se que $(BC) = 154,26$ g e que $\overline{EC} = \frac{3}{2}\overline{EB}$. Sabendo que, com observações feitas no campo, se obtiveram as seguintes leituras azimutais:

Estação	Vértices Visados			
	A	B	C	D
E	282,18 g	346,54 g	90,32 g	154,25 g

calcule R_0^E , (EA) e (ED) .

29. Para orientar aproximadamente um levantamento de pormenor, num dos pontos estacionados uniu-se o teodolito de uma declinatória e efectuou-se a seguinte leitura para o norte magnético: $204^s,235$. Admitindo que o norte magnético faz um ângulo de $7^{\circ}W$ com o norte cartográfico, determine o R_0^E .

30. Duma estação E visaram-se os pontos A, B, C e D, obtendo-se o seguinte registo de observações azimutais:

Estação	Pontos visados			
	A	B	C	D
E	32,287	64,969	302,283	11,462

Sabendo que as coordenadas de E e A são:

	E	A
M	500,00m	204,62m
P	500,00m	922,70m

determinar:

- a) (EB) , (EC) e (ED) a partir de R_0^E .
- b) A leitura azimutal a efectuar para definir a pontaria para o ponto X tal que $(EX) = 240,287^s$.
31. A e B são dois pontos do terreno referenciados por estacas. Com dois teodolitos estacionados nesses pontos, pretende implantar-se, por intersecção de visadas, um ponto C. Sabendo que o teodolito estacionado em B visa A com uma leitura de $100,000^g$, que $R_0^A = 232,452^s$ e que as coordenadas de A, B e C são:

	M	P
A	-6480,20 m	8494,30 m
B	-6836,80 m	8842,50 m
C	-6524,40 m	8366,70 m

determine as leituras azimutais a fazer nos dois teodolitos.

32. A parte da frente de um terreno rectangular, virada a Norte, que se destina a ser dividido em 5 lotes quadrados iguais, é definida por duas estacas A e B que têm as seguintes coordenadas locais:

$$M_A = 100,00 \text{ m} \quad P_A = 188,21 \text{ m}$$

$$M_B = 241,00 \text{ m} \quad P_B = 100,00 \text{ m}$$

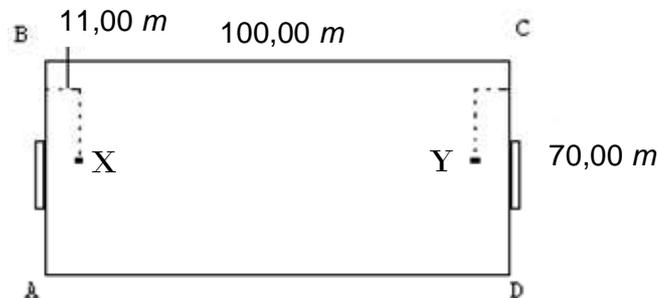
- a) Determinar as coordenadas de duas estacas C e D, que definem o alinhamento posterior dos referidos lotes, alinhamento que é paralelo a \overline{AB} .
- b) Considerando um teodolito estacionado no ponto médio de \overline{AB} , visando B a zeros, determina as quantidades necessárias para implantar no terreno os pontos A, C e D, utilizando um ângulo e uma distância.

33. Por intersecção de visadas, vai colocar-se uma estaca no ponto médio do alinhamento \overline{BC} , sendo C um ponto inacessível. No campo estacionaram-se dois teodolitos em A e B e fez-se o seguinte registo:

Estações	Vértices Visados	Leituras azimutais
A	B	300,000g
	C	8,542 g
B	C	46,325 g
	A	100,000 g

Determine a leitura a fazer em cada um dos teodolitos, sabendo que: $M_A = 100,00 m$; $P_A = -100,00 m$; $M_B = -300,00 m$ e $P_B = -100,00 m$.

34. Para a demarcação das extremidades C e D e das marcas de grande penalidade X e Y de um campo de futebol, estacionaram-se dois teodolitos em A e em B . Indique quais as leituras azimutais a fazer em cada um dos instrumentos, admitindo que se visam mutuamente a zeros, para se definirem por intersecção de visadas os citados pontos.

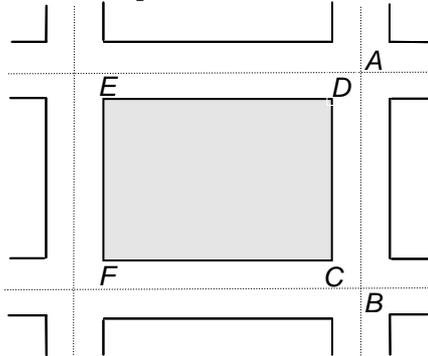


35. A e C são dois pontos do terreno. Com um teodolito estacionado em A visando C com $100,00 g$ e outro estacionado em C visando A com $0g,00$, pretende definir-se, por intersecção de visadas, dois outros pontos B e D , situados para lados opostos em relação ao alinhamento \overline{AC} . Sabendo que: $\overline{AC} = 50,00 m$; $\overline{AD} = 20,00 m$; $\overline{AB} = \overline{BC}$; $\widehat{ADC} = 100,00^\circ$ e que a distância de B a $[AC]$ é $16,50 m$, determine quais as leituras azimutais a efectuar nos dois teodolitos quando visam B e D .
36. A e B são os pontos extremos de um alinhamento recto, sendo $\overline{AB} = 200,00 m$. No alinhamento definido por estes dois pontos está um ponto E , que se encontra fora do segmento $[AB]$, de tal modo que $\overline{AE} = 80,00 m$. Com um teodolito estacionado em A e outro em B pretende definir-se, por intersecção de visadas, dois pontos C e D situados na mediatriz de $[AB]$ e tais que $\overline{CE} = \overline{DE} = 300,00 m$. Determine as leituras a fazer em cada um dos teodolitos, sabendo que se visam mutuamente a $100,00 g$.
37. O eixo de um túnel recto, em projecto, tem origem num ponto A definido no terreno por uma estaca, e o seu ponto de saída vai ser o ponto S situado no segmento definido pelos pontos B e C do terreno, tal que $\overline{BS} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. São conhecidas as coordenadas de A , B e C :

	M	P
A	-6480,20 m	8494,30 m
B	-6836,80 m	8842,50 m
C	-6524,40 m	8366,70 m

Determine as quantidades necessárias para implantar no terreno o ponto S , utilizando um teodolito estacionado em A e que visa B a zeros.

38. Na urbanização de um terreno pretende definir-se o lote rectangular [*CFED*], representado na figura, com uma frente $\overline{CF} = 70,00\text{ m}$. Estacionando dois teodolitos, que se visam mutuamente a zeros, nos cruzamentos *A* e *B* dos eixos dos arruamentos, pretende implantar-se, por intersecção de visadas, os pontos *E* e *F*, atendendo a que a largura dos arruamentos é $10,00\text{ m}$ e que



$$M_A = 50,00\text{ m} \quad P_A = 0,00\text{ m}$$

$$M_B = 0,00\text{ m} \quad P_B = 0,00\text{ m}$$

- Calcule as coordenadas de *E* e de *F*.
- Determine as leituras a efectuar nos dois teodolitos.

39. Determine as coordenadas de *B*, atendendo ao seguinte registo:

Estações	Vértices Visados (leituras azimutais)		
	<i>R</i>	<i>B</i>	<i>V</i>
<i>R</i>	---	230,078 g	311,567 g
<i>B</i>	93,687 g	---	24,132 g
<i>V</i>	398,173 g	47,113 g	---

e sabendo que:

	<i>M</i>	<i>P</i>
<i>R</i>	-24328,72 m	56490,29 m
<i>V</i>	-23643,18 m	56112,30 m

40. Para se determinarem as coordenadas do vértice *MATO* fez-se o seguinte registo:

Estações	Vértices Visados (leituras azimutais)		
	<i>S. SIMÃO</i>	<i>EIRAS</i>	<i>MATO</i>
<i>S. SIMÃO</i>	---	49,3836 g	0,0074 g
<i>EIRAS</i>	117,4172 g	---	200,0493 g
<i>MATO</i>	50,0662 g	382,0725 g	---

Calcule as coordenadas planimétricas do referido vértice, sabendo que:

	<i>M</i>	<i>P</i>
<i>EIRAS</i>	-24426,86 m	64292,51 m
<i>S. SIMÃO</i>	-26637,92 m	63403,26 m

41. *C* e *D* são dois pontos do terreno que distam entre si $200,00\text{ m}$. Observações de campo conduziram ao seguinte registo:

Estações	V. Visados	L. azimutais
<i>A</i>	<i>B</i>	352,950 g
	<i>C</i>	0,000 g
<i>B</i>	<i>C</i>	174,026 g
	<i>A</i>	223,254 g
<i>C</i>	<i>A</i>	368,725 g
	<i>B</i>	72,471 g
	<i>D</i>	120,932 g

Determinar as coordenadas de C e D sabendo que:

	M	P
A	1596,53 m	1000,00 m
B	608,47 m	1000,00 m

42. A costa de uma baía é limitada por dois promontórios, onde se localizam dois sinais luminosos nos pontos S_1 e S_2 , de coordenadas:

	M	P
S_1	-10605,30 m	20785,40 m
S_2	-9546,80 m	20408,80 m

Para construir um novo sinal luminoso num ponto S_3 da costa da referida baía, que facilite a entrada das embarcações, fizeram-se as seguintes observações:

Estações	Vértices Visados (l. azimutais)		
	S_1	S_2	S_3
S_1	---	125,231 g	190,572 g
S_2	59,626 g	---	384,308 g
S_3	205,762 g	265,124 g	---

- Determine as coordenadas planimétricas ajustadas do ponto S_3 .
- Sabendo que o ponto E , situado a uma distância de S_1 igual a $1/3$ da distância $\overline{S_1S_2}$ e sobre o alinhamento definido pelos pontos S_1 e S_2 , é o ponto mais favorável para a entrada das embarcações na baía, determine (ES_3) .
- Determine as coordenadas planimétricas de um ponto O (de orientação), situado sobre o alinhamento definido pelos pontos S_3 e E , a uma distância de E de 5000,00 m no sentido de $S_3 \rightarrow E$.

43. Monte, Castro e Rosa são três vértices de uma triangulação topográfica independente. Observações de campo conduziram ao seguinte registo de leituras azimutais.

Estações	Vértices Visados (leituras azimutais)		
	Rosa	Castro	Monte
Rosa	---	368,725 g	72,471 g
Castro	223,254 g	---	174,026 g
Monte	352,950 g	0,000 g	---

Sabendo que:

	M	P
Castro	608,47 m	1596,53 m
Monte	1000,00 m	1000,00 m

determine $(Monte, X)$, sendo X o ponto médio do lado *Castro-Rosa*.

44. Pretende determinar-se as coordenadas dum ponto X do terreno. Para isso, utilizando os vértices de uma triangulação local, fizeram-se as seguintes observações:

Estações	Vértices Visados	Leituras azimutais
Moinho	Pico	47,904 ^g
	X	373,648 ^g
Pico	X	254,317 ^g
	Moinho	203,873 ^g

Efectue a referida determinação sabendo que:

	M	P
Moinho	-12604,20 m	24783,30 m
Pico	-11547,80 m	24406,60 m

45. Determine as coordenadas do vértice A, sabendo que foi estacionado um teodolito nos pontos E e D, tendo-se efectuado o seguinte registo de observações

Estações	Vértices Visados	Leituras azimutais (g)
E	R	80,125
	A	346,411
D	R	12,145
	A	179,959

e que os vértices E, D e R têm as coordenadas planimétricas indicadas.

	M (m)	P (m)
E	100,00	100,00
D	150,00	50,00
R	125,00	-50,00

46. Atendendo ao seguinte registo de observações:

Estações	Vértices Visados	Leituras azimutais
A	Moinho	104,626 ^g
	Pico	29,308 ^g
Moinho	Pico	47,904 ^g
	A	373,648 ^g

e sabendo que:

	M (m)	P (m)
Moinho	-12604,20	24783,30
Pico	-11547,80	24406,60

determine as coordenadas de A.

47. Atendendo às seguintes observações azimutais:

Estações	Vértices visados			
	Vala	Rocha	Cova	Barco
Cova	30,608 ^g			312,906 ^g
Vala		140,874 ^g	208,112 ^g	

e às coordenadas planimétricas:

	Cova	Barco	Rocha
M	-27504,16 m	-25808,74 m	-28209,04 m
P	66722,08 m	64918,52 m	68404,92 m

determine as coordenadas planimétricas de Vala.

48. Pretendem determinar-se as coordenadas de um ponto P situado no topo de um edifício. Atendendo a que não era possível estacionar nesse ponto, estacionou-se um teodolito nos pontos C e D, tendo-se obtido o seguinte registo de observações:

Estações	Pontos Visados	Leituras Azimutais (g)
C	P	138.036
	B	60.528
D	B	250.374
	P	363.260

Determine as coordenadas do ponto P sabendo que as coordenadas dos pontos B, C e D são:

	M (m)	P (m)
B	-2 380.84	5 428.06
C	-2 417.92	5 690.92
D	-2 329.17	5 543.18

49. Para coordenar o ponto A, um operador utilizou um teodolito por meio do qual obteve o seguinte registo de observações:

Estação	V. visados	L. azimutais
A	S. Bernardo	140,7814 g
	Azenha	368,8710 g
	Moinho	65,4842 g

Determinar as coordenadas planimétricas de A sabendo que:

	S. Bernardo	Azenha	Moinho
M	5259,45 m	6218,89 m	6169,41 m
P	8984,46 m	9931,36 m	9189,94 m

50. Para se efectuar a ligação de uma triangulação local à rede topográfica da cidade de Coimbra, estacionou-se no vértice T_0 dessa triangulação e fizeram-se as seguintes observações azimutais:

Estação	V. visados	L. azimutais
T_0	Morouços	0,0915 g
	T_1	42,2868 g
	S. Simão	183,4654 g
	Olivais	250,9466 g

Sabendo que:

	S. Simão	Olivais	Mouroços
M	-26637,92 m	-23218,33 m	-27090,65 m
P	63403,26 m	61047,71 m	56933,60 m

- Determinar as coordenadas planimétricas de T_0 .
- Calcular o rumo (T_0T_1).

51. Entre os pontos A e B de uma triangulação estabeleceu-se uma poligonal expedita. Conhecem-se as coordenadas:

	M	P
A	-18662,13 m	64132,46 m
A'	-18268,28 m	63752,15 m
B	-18906,72 m	63986,75 m
B'	-18803,67 m	63494,98 m

Determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos vértices 1 , 2 e 3 , sabendo que observações de campo conduziram ao seguinte registo:

Vértices	P. Visados	L. azimutais	Distâncias
A	A'	247,73 g	
	1	349,88 g	90,24 m
1	A	146,25 g	90,18 m
	2	16,60 g	52,40 m
2	1	369,72 g	52,46 m
	3	100,12 g	64,84 m
3	2	15,94 g	64,80 m
	B	226,62 g	100,08 m
B	3	386,35 g	99,96 m
	B'	110,79 g	

52. E e S são os pontos de encontro com o terreno de uma conduta aérea a construir numa dada região. Uma poligonal de precisão apoiada nos vértices A e B conduziu ao seguinte registo de observações:

Estações	V. Visados	L. azimutais	Distâncias
A	B	236,3280 g	
	E	176,8618 g	153,30 m
E	A	314,1802 g	153,34 m
	S	181,3486 g	147,64 m
S	E	112,9323 g	147,66 m
	B	397,2090 g	106,39 m
B	S	149,2736 g	106,45 m
	A	57,2969 g	

Atendendo a que:

	M	P
A	7282,08 m	-3642,32 m
B	7188,68 m	-3875,39 m

determine as coordenadas ajustadas de E e de S .

53. Para o levantamento de um terreno estabeleceu-se a seguinte poligonal de média precisão:

Estações	V. Visados	Leituras Azimutais (g)	Distâncias (m)
A	B	338,7782	
	1	120,1915	98,58
	4	188,4578	108,90
1	A	257,2511	98,62
	2	11,3964	81,04
2	1	150,9257	81,06
	3	109,3350	92,60
3	2	167,6393	92,56
	4	18,2596	106,79
4	3	25,1979	106,81
	A	330,3162	108,92

Determinar as coordenadas planimétricas ajustadas dos vértices 1 , 2 , 3 e 4 , sabendo que $M_A = -10240,18 m$; $P_A = 6408,93 m$ e que $M_B = -9816,46 m$; $P_B = 5792,07 m$.

54. Na observação de uma poligonal de média precisão obteve-se o seguinte registo de campo:

Estações	V. Visados	L. azimutais	Distância
A_1	A_5	168,823 g	117,18 m
	A_2	36,289 g	
A_2	A_1	124,181 g	150,04 m
	A_3	56,376 g	
A_3	A_2	279,582 g	109,26 m
	A_4	194,033 g	
A_4	A_3	226,787 g	34,32 m
	A_5	119,382 g	
A_5	A_4	22,584 g	34,88 m
	A_1	215,900 g	

Sabendo que na estação A_1 o instrumento apontou a zeros para o Norte Cartográfico, e que $M_{A_1} = 600,00m$ e $P_{A_1} = 600,00m$, determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos vértices A_2 , A_3 , A_4 e A_5 .

55. Mediu-se a distância entre dois pontos situados numa encosta de declive constante. A distância foi medida ao longo da encosta, tendo-se obtido o valor de 440,82 m. Determine o comprimento da projecção horizontal da referida distância, sabendo que a diferença de cotas entre os pontos que a definem é de 17,45 m.
56. Qual a distância inclinada a que corresponde, numa encosta de declive 6%, uma distância horizontal de 228,60 m?
57. A e B são pontos de cotas conhecidas: $N_A = 74,18m$ e $N_B = 115,62m$. Sabendo que $dN_{AC} = 12,67m$, determine dN_{BC} .
58. No triângulo $[ABC]$ do terreno sabe-se que o declive de A para B é de 18%, $dN_{AB} = 5,40m$, o declive de B para C é de -5%, $dN_{BC} = -2,00m$ e a distância de B ao ponto médio de $[AC]$ é metade do comprimento deste lado. Determinar o declive de A para C .
59. Para se determinar a altura de uma igreja estacionou-se um teodolito a 46,28m de uma empena vertical e fizeram-se observações zenitais ao topo e à base dessa empena

Ponto visado		Leituras zenitais
Empena	Base	102,40 g
	Topo	85,23 g

Efectue a referida determinação.

60. Num ponto A do terreno estacionou-se um teodolito à altura de $i = 1,42 m$ e fizeram-se as seguintes observações zenitais para uma vara vertical, colocada em B , com 3,00 m de altura:

Estação	V. visados	Leituras zenitais	
A	B	Topo	96,85 g
		Base	104,62 g

Determine a diferença de nível entre A e B .

61. Para se determinarem as cotas dos pontos B e C , fizeram-se as seguintes observações:

Estação	P. Visados	L. zenitais	Distâncias
E	A	102,43 g	122,42 m
	B	96,64 g	104,71 m
	C	100,58 g	94,29 m

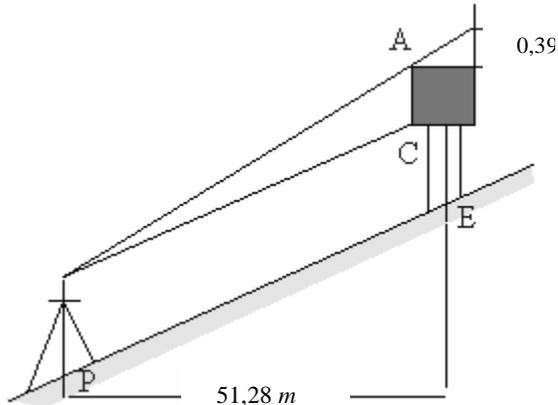
Efectue a referida determinação, sabendo que a cota de A é $N_A = 220,00 m$.

62. Para determinar a altura de um pára-raios situado no telhado de uma casa, estacionaram-se dois teodolitos nos pontos E_1 e E_2 do terreno, alinhados com o objecto a medir e distanciados de 15,00 m. As estações E_1 e E_2 encontram-se ambas localizadas do mesmo lado da casa, estando a estação E_2 mais próxima desta. Com os teodolitos fizeram-se as seguintes observações zenitais:

Estações	Pontos Visados	Leituras zenitais
E_1 $i = 1,46 m$	Topo	87,82 g
	Base	92,15 g
E_2 $i = 1,58 m$	Topo	90,31 g
	Base	96,24 g

- Efectue o cálculo pedido.
- Determine dN_{E_1, E_2} .

63. A figura representa, em corte, um depósito cilíndrico suspenso e centrado no ponto E do terreno e um teodolito estacionado num ponto P à altura 1,64m.



Observações zenitais para os pontos A e C conduziram aos seguintes valores $z_A = 87,74^\circ$, $z_C = 93,81^\circ$.

- Determine a capacidade do depósito (em litros).
- Sabendo que $N_P = 208,70 m$, determine a cota da base do depósito.

64. E e S são, respectivamente, o ponto de entrada e de saída de um túnel e encontram-se referenciados no terreno por estacas. De um ponto A , de onde são simultaneamente visíveis os pontos E e S , fizeram-se as seguintes observações:

Estação	Pontos Visados	Leituras	
		azimutais	zenitais
A	E	304,16 g	94,68 g
	S	47,26 g	102,25 g

Sabendo que $\overline{AE} = 40,24 m$ e $\overline{AS} = 52,18 m$, determine o comprimento real do túnel.

65. Pretende determinar-se a distância real entre os pontos A e B , situados em margens opostas de um rio. Para tal, estacionou-se um teodolito num ponto E do terreno e, utilizando uma vara de $2,00\text{ m}$ de altura, obteve-se o seguinte registo de observações:

Estação	Vértices Visados	Leituras	
		azimutais	zenitais
E	A	368,154 g	98,276 g
	Topo da vara em A	368,154 g	94,104 g
	B	86g908 g	98,430 g
	Topo da vara em B	86g908 g	96,510 g

Efectue a referida determinação.

66. Em dois pontos A e B do terreno, distanciados de $80,00\text{ m}$, encontram-se duas colunas verticais onde assenta uma plataforma horizontal. Com um teodolito estacionado num ponto C fizeram-se as seguintes observações:

Pontos visados		Leituras	
		azimutais	zenitais
Coluna em A	Topo	---	95,44 g
	Fundo	346,28 g	107,01 g
Coluna em B	Topo	---	97,85 g
	Fundo	52,19 g	101,49 g

Determinar a altura de cada coluna e a diferença de nível entre A e B .

67. A , B e C são três pontos de uma plataforma horizontal com $\overline{AB} = 30,00\text{ m}$. Com um teodolito estacionado num ponto E fez-se o seguinte registo de observações:

Estações	leituras azimutais (g)	Leituras zenitais (g)
A	0,000	98,364
B	15,832	98,240
C	18,850	98,852

Determine o comprimento \overline{BC} .

68. A , B e C são três pontos de um alinhamento recto definido no terreno. Com um teodolito estacionado em C obteve-se o seguinte registo de observações

Estação	V. visados	Leituras zenitais (g)	Leituras azimutais (g)
C $i=1,48$	A	98,53	100,00
	B	95,28	300,00

Sabendo que:

	M (m)	P (m)	Cotas (m)
A	528,72	647,15	36,18
B	872,04	725,32	44,32

determine as coordenadas planimétricas e a cota de C .

69. Nos pontos A e B do terreno estão situadas duas colunas verticais de betão cujos topos se encontram ao mesmo nível. Com um teodolito estacionado em E , fizeram-se as seguintes observações:

	Leituras		
	azimutais	zenitais	
Coluna A	346,18 ^g	Topo	98,04 ^g
		Base	103,97 ^g
Coluna B	146,18 ^g	Topo	99,05 ^g
		Base	100,68 ^g

Sabendo que $dN_{AB} = 1,30$ m, determine a distância entre A e B .

70. Para medir a altura da Torre da Universidade de Coimbra, desde o terreno até ao topo do pau da bandeira, estacionaram-se dois teodolitos nos pontos A e B , distanciados exactamente de 10,00 m, tendo-se obtido o seguinte registo de observações:

Estações	Pontos Visados	L. azimutais (g)	L. zenitais (g)
A $i = 1,55$ m	Topo do pau da bandeira	38,051	61,120
	Estação B	38,051	---
B $i = 1,42$ m	Topo do pau da bandeira	---	54,121

Efectue o referido cálculo, sabendo que o terreno é plano na referida zona.

71. A e B são dois pontos do eixo dum troço recto de uma estrada com declive constante. Pretende-se prolongar a estrada até ao ponto C do terreno, alinhado com A e B , mas de forma a manter o declive. Com um teodolito estacionado em E , fez-se o seguinte registo de observações:

Estação	P. Visados	Leituras	
		azimutais	zenitais
E	A	305,934 ^g	98,372 ^g
	B	20,520 ^g	100,402 ^g
	C	51,226 ^g	101,260 ^g

Sabendo que $\overline{EA} = 92,74$ m e $\overline{EB} = 98,85$ m, determine:

- o declive de A para B .
 - qual será a escavação, ou o aterro, a efectuar em C .
72. Numa zona plana passa uma linha de postes de alta tensão, todos com a mesma altura e intervalados de 40,00 m. De um destes postes (poste n.º 17) pretende derivar-se uma nova linha, tendo já sido colocada no terreno uma estaca num ponto E , também a 40,00 m do referido poste. Estacionando-se um teodolito em E , com $i = 1,50$ m, fizeram-se pontarias aos topos dos postes n.º 16 e n.º 18, obtendo-se as seguintes leituras zenitais: $z_{16} = 91,39^g$ e $z_{18} = 89,28^g$. Determinar a altura dos postes.

73. Considere o seguinte registo extraído de uma caderneta taqueométrica:

Estação	Pontos Visados	Leituras		
		azimutais	zenitais	na mira
E $i = 1,48m$	1	78,034 ^g	87,499 ^g	2,720

	2	96,282 ^g	99,273 ^g	1,900
				3,920
	3	109,128 ^g	104,268 ^g	----
				2,000

			1,991	
			1,100	

Sabendo que $N_E = 33,28 m$ determine:

- as cotas dos pontos 1, 2 e 3;
- o declive entre 1 e 2 e o declive entre 2 e 3.

74. Para a construção de uma estrada fez-se o seguinte registo de observações:

Estação	Pontos Visados	Leituras		
		azimutais	zenitais	na mira
E	P_1	68,60 ^g	103,28 ^g	1,222

	P_2	206,00 ^g	92,64 ^g	0,300

				2,136
				1,400

Determinar o declive do troço $[P_1P_2]$.

75. A e B são pontos do eixo duma conduta e C é um ponto do terreno onde se pretende construir um depósito de distribuição de água que vai ser abastecido pela conduta, por gravidade. Para isso, a conduta deverá ser prolongada até ao depósito mantendo o mesmo declive. Sabendo que no campo se fizeram as seguintes observações:

Estação	Pontos Visados	Leit. Azimutais (g)	Leit. Zenitais (g)	mira
E	A	298,706	96,500	2,930

	B	369,962	97,489	2,400
				1,886
	C	52,326	102,698	-----
				1,500

			1,162	
			0,800	

e que a altura do depósito vai ser $7,75m$, determine a altura da escavação a fazer em C .

76. Pretende estabelecer-se uma conduta aérea, cujo eixo em planta é a linha poligonal $[ABCD]$, assente em três pilares verticais a construir nos pontos A , B e C do terreno, que se destina a transportar água para um reservatório situado em D . A conduta necessita de ter um declive constante de -2% no sentido de A para D . Com um taqueómetro estacionado em C fizeram-se as seguintes observações:

Estação	P. Visados	L. azimutais	L. zenitais	L. na mira
C $i = 1,56m$	A	160,48 g	96,32 g	2,912

	B	132,34 g	100,15 g	2,000

	D	---	104,18 g	1,230

				1,758

				1,000

- a) Determine o comprimento da conduta, em planta.
 b) Calcule a altura dos pilares a construir em A , B e C , sabendo que a conduta entra no reservatório num ponto de cota $248,26 m$ e que o ponto A tem cota $248,40 m$.
77. Uma linha de alta tensão e uma linha de telecomunicações cruzam-se a alturas diferentes. Na vertical do ponto de cruzamento colocou-se uma mira vertical e com um taqueómetro estacionado nas proximidades fizeram-se as seguintes observações:

P. Visados	L. azimutais	L. zenitais	L. na mira
mira	125,12 g	102,12 g	1,740

			1,200
linha A.T.	125,12 g	92,23 g	
linha C.T.T.	125,12 g	97,44 g	

- a) Determine a distância entre as duas linhas.
 b) Calcule a distância da linha de alta tensão ao terreno.
78. Para se efectuar o estudo de uma rede de saneamento fizeram-se as seguintes observações taqueométricas:

Estação	P. Visados	L. azimutais	L. zenitais	L. na mira
C $i = 1,56m$	1	325,42 g	102,43 g	1,426

	2	153,78 g	96,64 g	0,200

	3	202,64 g	100,58 g	2,025

				1,500

				1,943

				1,000

- a) Sabendo que $N_3 = 254,25 m$ determinar N_1 .
 b) Determinar o comprimento real da linha poligonal que passa nos vértices 1 , 2 e 3 .

79. Num terreno com forma triangular foram definidos os vértices A , B e C . Um taqueómetro estacionado em B , à altura de $1,54\text{ m}$, originou o seguinte registo de observações:

Estação	Pontos Visados	Leituras		
		azimutais	zenitais	na mira
B	A	163,25 g	105,26 g	1,842

	C			1,000
		286,73 g	96,84 g	0,644

			0,200	

- a) Determinar a área do terreno.
 b) Sabendo que $N_A = 204,53\text{ m}$ determinar as cotas de B e C .
80. Para cotar três estacas X , Y e Z numa linha de nivelamento fez-se o seguinte nivelamento geométrico apoiado nas marcas 1 e 2:

Posições da mira	Niveladas (m)	
	Atrás	Adiante
1	1,457	---
X	1,932	1,785
Y	1,505	1,321
Z	0,065	1,510
2	---	2,878

Sabendo que a cota $N_1 = 100,000\text{ m}$ e a cota $N_2 = 97,470\text{ m}$, determinar as cotas ajustadas de X , Y e Z .

81. Para determinar a cota dos vértices A , B e C do terreno, estabeleceu-se uma linha de nivelamento fechada, apoiada na marca M com cota $202,268\text{ m}$, tendo-se obtido o registo:

Pontos visados	Niveladas	
	atrás	à frente
M	1,289	-----
A	1,173	1,852
B	1,459	1,632
C	1,048	0,806
M	-----	0,688

Determine as cotas ajustadas dos referidos vértices.

82. Procedeu-se a um nivelamento para determinar as cotas de duas marcas X e Y , necessárias para determinar a altura de uma ponte. Utilizando o registo de observações presentes na seguinte tabela e sabendo que as cotas dos pontos A e B são respectivamente $N_A = 60,276\text{ m}$ e $N_B = 59,960\text{ m}$, determine as cotas ajustadas dos referidos pontos.

Pontos	Niveladas		
	atrás	intermédias	à frente
A	1,275		
P_1	0,655		2,812
P_2	2,954		1,138
X		2,706	
Y		2,172	
B			1,240

83. Com dois níveis estadiados, um bloco e outro de horizontalização automática, visaram-se miras situadas em vários pontos do terreno, obtendo-se o seguinte registo:

	Mira em A	Mira em B	Mira em C
Nível bloco	1,694	2,293	
	1,493	2,092	
	1,292	1,891	
Nível de horizontalização automática	1,923	2,372	1,455
	1,626	2,199	1,184
	1,329	2,026	0,913

Sabendo que $N_A = 246,548 \text{ m}$; determine N_C .

84. Com um nível de horizontalização automática obteve-se o seguinte registo de campo:

Estações do nível	mira em A	mira em B	mira em C	mira em D
1	1,548 m	1,987 m	1,854 m	
	1,140 m	1,845 m	1,536 m	-----
	0,732 m	1,703 m	1,218 m	
2	1,056 m	1,779 m		1,454 m
	0,844 m	1,567 m	-----	1,048 m
	0,632 m	1,355 m		0,642 m

- a) Mostre que este nível tem erro de inclinação.
 b) Sabendo que a cota de D é 248,645 m, determine N_C .
85. Os pontos A, B, C e D definem um rectângulo com $\overline{AB} = \overline{DC} = 20,00 \text{ m}$ e $\overline{AD} = \overline{BC} = 48,00 \text{ m}$. O ponto E pertence a \overline{AD} e $\overline{AE} = 15,00 \text{ m}$. Estacionando um nível em E e apontando para uma mira colocada em A e B, obtiveram-se as leituras 1,735 e 0,688, respectivamente. Em seguida, passou-se o nível para o ponto D e registaram-se as leituras 2,307; 1,248 e 1,546 para A, B e C, respectivamente. Admitindo que a cota de A é 100,000 m, determine as cotas de B e de C.
86. A e B são duas marcas de nivelamento de precisão de cotas respectivamente $N_A = 145,336 \text{ m}$ e $N_B = 143,612 \text{ m}$. Com um nível bloco estadiado fizeram-se as seguintes observações sobre uma mira vertical colocada nos pontos A, B, e P:

Mira em	Leituras (m)
A	1,096
	0,872
	0,648
B	2,962
	2,616
	2,270
P	1,542
	1,184
	0,826

Determinar N_P a partir de A e verificar o resultado obtido, a partir de B.

Soluções

1. a) $112^{\circ} 48' 45,9''$; b) $294^{\circ} 73' 21''$
2. a) $706,023 \text{ m}$; b) $634,667 \text{ m}$
3. $2,16 \text{ m}$
4. $\overline{AC} = 206,782 \text{ m}$; $\overline{BC} = 149,091 \text{ m}$
5. $\overline{AC} = 20,34 \text{ m}$; $\hat{A} = 119,87^{\circ}$; $\hat{C} = 38,43^{\circ}$
6. a) $\hat{A} = 39,0712^{\circ}$; $\hat{B} = 109,2238^{\circ}$; $\hat{C} = 51,7050^{\circ}$; b) Área = $682 455 \text{ m}^2$
7. $\overline{AB} = 50,59 \text{ m}$ ou $\overline{AB} = 47,63 \text{ m}$
8. a) $\text{proj}_a b = 240,12 \text{ m}$; b) Área = $148 821 \text{ m}^2$
9. $53,207 \text{ m}$
10. $\overline{BD} = 991,97 \text{ m}$
11. $(BA) = 146,421^{\circ}$; $(AC) = 388,842^{\circ}$; $(CA) = 188,842^{\circ}$; $(BC) = 79,747^{\circ}$
12. $M_B = 11215,58 \text{ m}$ $P_B = -10559,97 \text{ m}$
13. $(CD) = 126,075 \text{ g}$; $\overline{CD} = 6170,16 \text{ m}$
14. $\overline{AB} = 767,42 \text{ m}$; $\overline{AC} = 754,71 \text{ m}$
15. $M_B = 516,09 \text{ m}$ $P_B = -1130,38 \text{ m}$ e $M_C = 505,41 \text{ m}$ $P_C = -1058,67 \text{ m}$
16. $M_A = -4377,31 \text{ m}$ $P_A = -4654,71 \text{ m}$
17. $(E_2B) = 44,65^{\circ}$
18. $(BC) = 372,70^{\circ}$
19. $M_B = 10551,17 \text{ m}$ $P_B = -7642,10 \text{ m}$
20. Raio = $1170,40 \text{ m}$
21. a) $\hat{AEB} = 368,890^{\circ}$; $\hat{FED} = 100,220^{\circ}$; $\hat{BEF} = 166,614^{\circ}$; $\hat{DEB} = 133,166^{\circ}$; b) $(EF) = 395,432^{\circ}$; $(AE) = 59,928^{\circ}$
22. $\overline{AC} = 20,34 \text{ m}$; $\hat{A} = 119,87^{\circ}$; $\hat{B} = 41,70^{\circ}$; $\hat{C} = 38,43^{\circ}$
23. $\overline{E_1E_3} = 412,96 \text{ m}$; $\overline{E_2E_3} = 454,70 \text{ m}$
24. $\overline{AB} = 103,51 \text{ m}$
25. a) $M_B = -3474,85 \text{ m}$ $P_B = 5963,69 \text{ m}$; b) $\overline{CE} = 1633,37 \text{ m}$
26. $\overline{AB} = 1686,70 \text{ m}$
27. a) $R_0^E = 187,77^{\circ}$; b) $(EA) = 395,73^{\circ}$; $(EB) = 117,52^{\circ}$ e $(ED) = 339,48^{\circ}$
28. $R_0^E = 41,83^{\circ}$; $(EA) = 324,01^{\circ}$ e $(ED) = 196,08^{\circ}$
29. $R_0^E = 187,987^{\circ}$
30. a) $R_0^E = 328,885^{\circ}$; $(EB) = 393,854^{\circ}$; $(EC) = 231,168^{\circ}$; $(ED) = 340,347^{\circ}$; b) $\ell_{EX} = 311,402^{\circ}$

31. $l_{AC} = 388,777^g$; $l_{BC} = 113,772^g$
32. a) $M_C = 223,36 m$ $P_C = 71,80 m$; $M_D = 82,36 m$ $P_D = 160,01 m$ b) $l_{MA} = 200,00^g$ e $\overline{MA} = 83,16m$; $l_{MC} = 24,22^g$ e $\overline{MC} = 89,56m$; $l_{MD} = 175,78^g$ e $\overline{MD} = 89,56m$
33. $l_{AM} = 364,633^g$; $l_{BM} = 46,325^g$
34. $l_{AC} = 61,12^g$; $l_{BC} = 300,00^g$; $l_{AD} = 100,00^g$; $l_{BD} = 338,88^g$; $l_{AX} = 19,39^g$; $l_{BX} = 380,61^g$; $l_{AY} = 76,15^g$; $l_{BY} = 323,85^g$
35. $l_{AB} = 62,86^g$; $l_{CB} = 37,14^g$; $l_{AD} = 173,80^g$; $l_{CD} = 373,80^g$
36. $l_{AC} = 25,13^g$; $l_{BC} = 174,87^g$; $l_{AD} = 174,87^g$; $l_{BD} = 25,13^g$
37. $l_{AS} = 391,77^g$ e $\overline{AS} = 315,73m$
38. a) $M_E = 45,00 m$; $P_E = 75,00m$; $M_F = 5,00 m$; $P_F = 75,00m$; b) $l_{AE} = 95,76^g$; $l_{BE} = 334,40^g$; $l_{AF} = 65,60^g$; $l_{BF} = 304,24^g$
39. $M_B = -23891,26 m$ $P_B = 56919,79 m$
40. $M_{MATO} = -25587,14 m$ $P_{MATO} = 65802,38 m$
41. $M_C = 1085,57 m$ $P_C = 1465,55 m$; $M_D = 885,58 m$ $P_D = 1463,17 m$
42. a) $M_{S_3} = -10344,54 m$ $P_{S_3} = 19516,73 m$; b) $(ES_3) = 205,116^g$; c) $M_O = -9851,09 m$; $P_O = 25643,73 m$
43. $(Monte, X) = 343,857^g$
44. $M_X = -12018,11 m$ $P_X = 25416,33m$
45. $M_A = 130,00 m$ $P_A = 125,00m$
46. $M_A = -12018,34 m$ $P_A = 25416,08m$
47. $M_{VALA} = -28288,80 m$ $P_{VALA} = 66317,13m$
48. $M_P = -2484,52 m$ $P_P = 5655,10m$
49. $M_A = 5850,28 m$; $P_A = 9744,64m$;
50. a) $M_{T_0} = -26556,78 m$; $P_{T_0} = 59093,32m$; b) $(T_0T_1) = 257,6230^g$
51. $M_1 = -18726,97 m$; $P_1 = 64069,72m$; $M_2 = -18776,50 m$; $P_2 = 64086,98m$; $M_3 = -18823,60 m$; $P_3 = 64042,42m$
52. $M_E = 7362,64 m$; $P_E = -3772,81m$; $M_S = 7291,61 m$; $P_S = -3902,25m$
53. $M_1 = -10317,06 m$; $P_1 = 6470,69m$; $M_2 = -10398,06 m$; $P_2 = 6467,17m$; $M_3 = -10327,08 m$; $P_3 = 6526,59m$; $M_4 = -10220,83 m$; $P_4 = 6516,12m$
54. $M_{A_2} = 663,25 m$; $P_{A_2} = 698,58m$; $M_{A_3} = 734,58 m$; $P_{A_3} = 566,46m$; $M_{A_4} = 629,27 m$; $P_{A_4} = 537,47m$; $M_{A_5} = 616,40 m$; $P_{A_5} = 569,25m$
55. 440,47 m
56. 229,01 m

57. $dN_{BC} = -28,77m$
58. $\partial_{AC} = 7\%$
59. $H = 12,68 m$
60. $dN_{AB} = -0,36m$
61. $N_B = 230,21m$; $N_C = 223,82m$
62. a) $4,02 m$; b) $dN_{E_1E_2} = 4,50m$
63. a) $15\,394\ell$ b) $N_C = 215,24m$
64. $83,67 m$
65. $80,48 m$
66. $H_A = 6,00m$; $H_B = 4,00m$; $dN_{AB} = 2,00m$
67. $\overline{BC} = 60,01m$
68. $M_C = 709,10 m$; $P_C = 688,22 m$; $N_C = 30,43m$
69. $\overline{AB} = 98,59m$
70. $36,55 m$
71. a) $\partial_{AB} = -2\%$; b) Aterro de $0,99 m$
72. $10,00 m$
73. a) $N_1 = 48,14m$, $N_2 = 33,99m$, $N_3 = 20,86m$; b) $\partial_{12} = -12\%$; $\partial_{23} = -33\%$
74. $\partial_{P_1P_2} = 9,6\%$
75. $4,29 m$
76. a) $174,57 m$; b) $H_A = 3,35m$; $H_B = 6,43m$; $H_C = 5,73m$
77. a) $4,45 m$; b) $9,88 m$
78. a) $N_1 = 251,09m$; b) $297,15 m$
79. a) $1727 m^2$; b) $N_B = 211,34m$; $N_C = 214,66m$
80. $N_X = 99,673m$, $N_Y = 100,285m$, $N_Z = 100,281m$
81. $N_A = 201,707m$, $N_B = 201,250m$, $N_C = 201,905m$
82. $N_X = 58,496m$, $N_Y = 59,030m$
83. $N_C = 246,985m$
84. a) $-0,705m = dN_{AB}^{Nível1} \neq dN_{AB}^{Nível2} = -0,723m$; b) $N_C = 248,435m$
85. $N_B = 101,067m$; $N_C = 100,705m$
86. $N_P = 145,046m$