Manuel António Facas Vicente

Métodos de Determinação do Azimute por Observações Astronómicas

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
1997

Métodos de Determinação do Azimute
por Observações Astronómicas

Módulo constituído por uma aula teórico-prática, a apresentar, com vista à realização de Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica.

Prefácio

A aplicação mais comum da Astronomia no campo da Topografia é, sem dúvida, a determinação do azimute, essencial à realização ou ao controlo da orientação de qualquer levantamento efectuado. Tal assume especial importância em locais onde é reduzida a densidade de pontos de referência, ou onde não existe confiança na precisão do seu posicionamento.

Na maioria das vezes, é mais do que suficiente uma precisão de um segundo de arco na determinação do azimute, precisão essa que é facilmente garantida quando são utilizados métodos da dita Astronomia de Campo. Existem ainda muitas partes da Terra onde é necessário efectuar determinações de azimute, por meio de métodos rápidos e de custo reduzido, sem recorrer a dispendiosos métodos baseados na utilização de equipamento de posicionamento por satélite. Embora este sistema de posicionamento proporcione precisões superiores àquelas obtidas com os métodos da Astronomia, convém referir que, para as obter, é necessário efectuar "observações" durante um longo intervalo de tempo, pela utilização de equipamento sofisticado e oneroso.

Neste módulo iremos descrever dois métodos de obtenção do azimute de uma dada direcção terrestre, baseados na determinação, por meios astronómicos, do azimute de um corpo celeste. Os seus destinatários serão os alunos da Cadeira de Astronomia, do 3º ano da Licenciatura em Engenharia Geográfica do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, aos quais poderá ser ministrado como aula teórico-prática.

Pretende-se que os alunos adquiram novas perspectivas para a aplicação dos métodos da Astronomia a outros campos, tais como a Topografia e a Geodesia.

Introdução

Entende-se por azimute[1] de uma dada direcção o ângulo que essa direcção faz com uma direcção de referência, que na Topografia é a direcção do Norte Cartográfico. O valor deste ângulo, essencial à orientação de qualquer trabalho topográfico, pode ser determinado de múltiplas maneiras. Iremos descrever como o poderemos obter pelo uso de métodos da Astronomia, dado que, uma vez conhecido um azimute da direcção de visada para um qualquer corpo celeste, é possível obter o azimute de uma qualquer direcção terrestre pela simples adição de ângulos horizontais.

Vamos expor dois métodos de determinação do azimute de um astro, por observação astronómica. Além disso, para cada um dos métodos, serão efectuadas considerações acerca da precisão dos resultados, sendo indicadas as condições mais favoráveis à sua implementação.

A - Método de determinação do azimute pela medição da distância zenital, suposta conhecida a latitude do lugar

A.1 Introdução

Determinado o azimute A de um astro, o que é equivalente a saber o azimute da direcção de visada para o astro, é possível definir no terreno uma direcção para a qual o azimute é conhecido. Essa direcção pode ser materializada no terreno pela projecção sobre ele da direcção de visada, pelo uso do instrumento universal. Posteriormente, por simples adição de ângulos, pode obter-se o valor do azimute de qualquer direcção do terreno.

A.2 Exposição do método

Pretende efectuar-se a determinação do azimute A de um dado corpo celeste M, conhecendo-se:

– latitude φ do lugar de observação,

[1] Na Topografia é também utilizado o termo "rumo".

- distância zenital z do corpo celeste (obtida por observação com o instrumento universal e posteriormente corrigida[2]),
- declinação δ do corpo celeste (conhecida por consulta nas efemérides astronómicas).

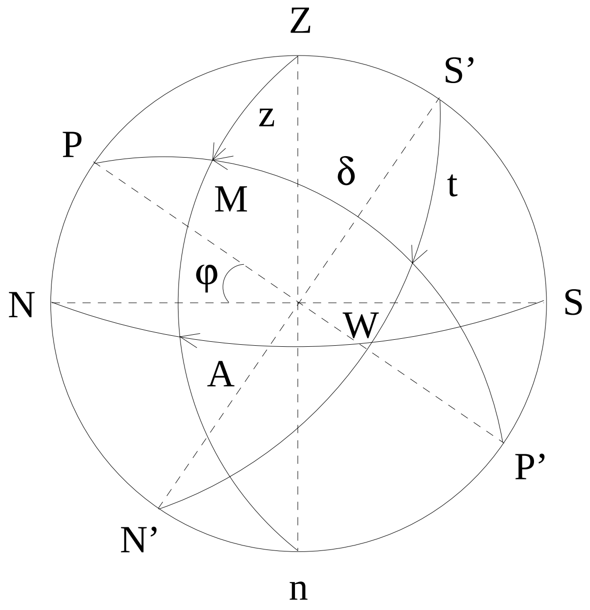

figura A-1 - Esfera celeste para um observador à latitude φ no hemisfério norte

Sem perda de generalidade, iremos determinar o azimute pretendido a partir do triângulo esférico de posição do corpo celeste, de vértices no Pólo Norte Celeste (P), no Zénite do lugar (Z) e no astro (M), construído para um observador situado no hemisfério norte, a uma latitude φ[3] (ver figuras A-1 e A-2).

Pretendendo relacionar as quantidades φ, δ, z e A, utilizamos a fórmula fundamental da Trigonometria Esférica, aplicada a partir do lado de amplitude $90-\delta$:

$$\cos(90-\delta) = \cos(90-\varphi)\cos z + \sin(90-\varphi)\,\sin z \cos(180-A) \tag{A-1}$$

vindo,

$$\cos A = \frac{\tan\varphi}{\tan z} - \frac{\sin\delta}{\sin z \cos\varphi}$$

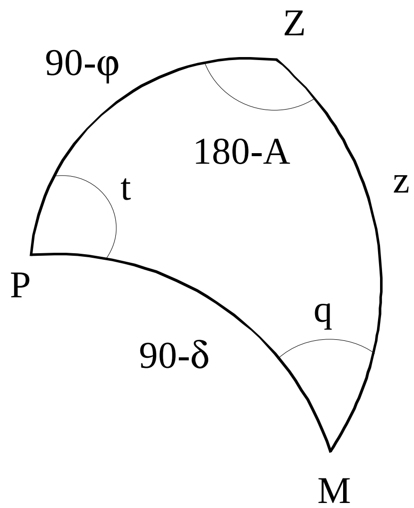

figura A-2 - Triângulo de posição do corpo celeste M

Não há lugar a ambiguidade na determinação do azimute A, uma vez que:

- se o corpo celeste se encontra a Ocidente o seu azimute varia entre 0 e 180 graus,
- se o corpo celeste se encontra a Oriente o seu azimute varia entre 180 e 360 graus.

[2] Devem efectuar-se correcções à distância zenital observada, entre as quais é de grande importância a correcção devida à refracção astronómica. Sendo ζ a distância zenital aparente (observada) e R o valor da refracção, a distância zenital verdadeira obtém-se por meio de $z = \zeta + R$. O valor da refracção, para uma dada distância zenital observada, calcula-se a partir do conhecimento das condições locais de pressão e temperatura ambiente.

A.3 Discussão do método

Pela utilização de fórmulas diferenciais da Trigonometria Esférica, iremos efectuar a avaliação da qualidade deste método de determinação do azimute, verificando de que forma é que as incertezas que possam existir nos dados do problema se reflectem no valor obtido para o azimute A. Baseados nesses resultados iremos tirar conclusões acerca das condições mais favoráveis à obtenção de uma boa precisão no valor do azimute.

Uma vez que as quatro coordenadas astronómicas envolvidas no nosso problema dizem respeito aos três lados e a um ângulo do triângulo esférico de posição do astro, vamos aplicar uma fórmula diferencial da Trigonometria Esférica denominada por "fórmula diferencial do primeiro tipo"[4]:

$$d\left(90-\delta\right)=\cos q\ dz+\cos t\ d\left(90-\varphi\right)+\sin t\sin\left(90-\varphi\right)\ d\left(180-A\right),$$

o que é equivalente a escrever

$$dA=\frac{1}{\sin t\cos\varphi}d\delta+\frac{\cos q}{\sin t\cos\varphi}dz-\frac{1}{\tan t\cos\varphi}d\varphi$$

Se identificarmos a diferencial de cada variável envolvida com o erro referente a essa variável e aplicando módulos, vem:

$$\left|dA\right|\leq\left|\frac{1}{\sin t\cos\varphi}\right|\left|d\delta\right|+\left|\frac{\cos q}{\sin t\cos\varphi}\right|\left|dz\right|+\left|\frac{1}{\tan t\cos\varphi}\right|\left|d\varphi\right|,$$

o que, no presente caso, é equivalente[5] a ter:

$$\left|dA\right|\leq\frac{1}{\left|\sin t\right|\cos\varphi}\left|d\delta\right|+\frac{\left|\cos q\right|}{\left|\sin t\right|\cos\varphi}\left|dz\right|+\frac{1}{\left|\tan t\right|\cos\varphi}\left|d\varphi\right| \qquad \text{(A-2)}$$

O segundo membro da relação (A-2) será um majorante do módulo do erro cometido no cálculo do azimute A do astro. Vamos procurar condições que tornem mínimo o valor desse majorante.

Em relação à primeira parcela,

$$\frac{1}{\left|\sin t\right|\cos\varphi}\left|d\delta\right|$$

sabemos que o erro $d\delta$ é muito reduzido, uma vez que a declinação δ é obtida a partir das efemérides e como tal é conhecida com bastante rigor. Além disso pretende-se que o valor de

$$\frac{1}{\left|\sin t\right|\cos\varphi}$$

---

[3] No triângulo de posição, representamos o ângulo horário e o ângulo paralático por t e q, respectivamente.
[4] As diferenciais podem-se exprimir quer em *radianos* quer em *segundos de arco*.

seja o menor possível, ou seja, que $|\sin t|\cos\varphi$ seja máximo. Uma vez que a latitude φ tem um valor fixo, vão procurar-se as condições que majorem o valor de $|\sin t|$. No caso ideal teremos $|\sin t| = 1$, o que acontece para $t = 6^h$ ou para $t = 18^h$.

Para a segunda parcela,

$$\frac{|\cos q|}{|\sin t|\cos\varphi}|dz| ,$$

as considerações a efectuar acerca do denominador são semelhantes às efectuadas para a primeira parcela. Por outro lado, a distância zenital z é uma quantidade observada, o que implica a existência de um erro $|dz|$ considerável. Convém então que o numerador $|\cos q|$ apresente um valor reduzido, para que não seja necessário observar a distância zenital com tanta precisão. Para minorar o valor de $|\cos q|$ vamos construir o triângulo polar[6] do triângulo de posição, e em seguida aplicar a fórmula fundamental do Trigonometria Esférica a partir do lado de amplitude $180 - q$:

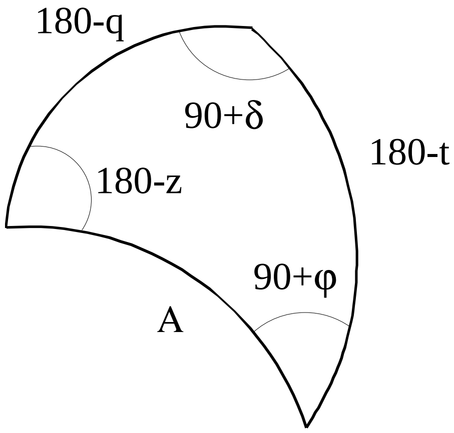

figura A-3 - Triângulo polar do triângulo de posição

$$\cos(180 - q) = \cos A \cos(180 - t) + \sin A \sin(180 - t)\cos(90 + \varphi)$$

Como vimos no estudo feito em relação à primeira parcela, em condições óptimas temos $t = 6^h$ ou $t = 18^h$, o que implica que $\cos t = 0$ e $\sin t = \pm 1$, vindo, neste caso,

$$\cos q = \pm \sin A \sin\varphi ,$$

ou seja,

$$|\cos q| = |\sin A||\sin\varphi|$$

Logo $|\cos q|$ é mínimo quando $|\sin A|$ também for mínimo, dado que a latitude φ tem um valor fixo. O valor mínimo de $|\sin A|$ ocorre quando $|\sin A| = 0$, ou seja, quando $A = 0^o$ ou $A = 180^o$. Considerando o círculo horário das 6^h, uma estrela com azimute próximo de 0^o teria que ser uma estrela situada no hemisfério sul e como tal não observável. Assim teremos que ter um azimute próximo de 180^o. Pela observação da figura A-4, verifica-se que apenas uma estrela circumpolar pode conjugar um ângulo horário próximo de 6^h com um azimute próximo de 180^o. Assim, o único modo de conjugar um valor do ângulo horário t próximo de 6^h ou de 18^h, com

---

[5] Uma vez que a latitude φ toma valores no intervalo $\left[-90^o, 90^o\right]$, $\cos\varphi$ é sempre não negativo e por conseguinte $|\cos\varphi| = \cos\varphi$.

[6] O triângulo polar de um triângulo esférico é o triângulo que se obtém substituindo cada lado pelo suplementar do ângulo que se lhe opõe e substituindo cada ângulo pelo suplementar do lado que se lhe opõe.

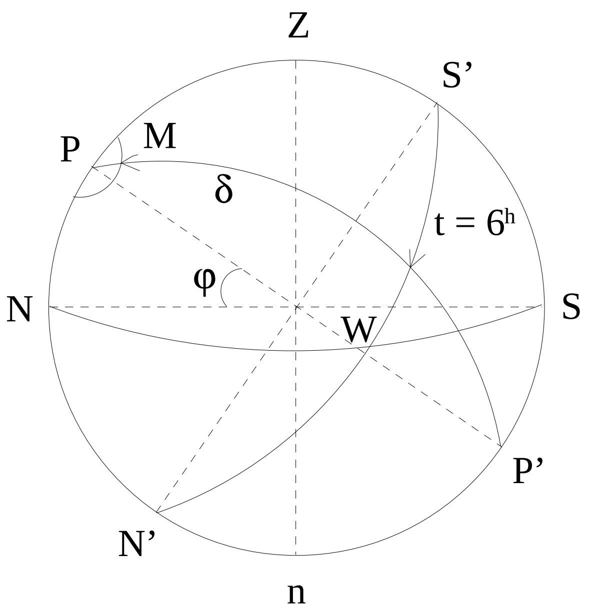

figura A-4 - Estrela circumpolar

um valor de azimute A próximo de 0^o ou de 180^o, será considerar uma estrela circumpolar, cujo círculo diurno se encontra próximo do Pólo, tal como, por exemplo, a estrela polar.

Finalmente, para a terceira parcela,

$$\frac{1}{|\tan t|\cos\varphi}|d\varphi|,$$

uma vez que o valor da latitude φ é fixo, deseja-se que o valor tomado por $|\tan t|$ seja máximo, o que ocorre quando $t = 6^h$ ou $t = 18^h$. Nesses casos $\frac{1}{|\tan t|} \approx 0$ o que significa que podemos ter um erro significativo $|d\varphi|$ na latitude, sem que isso afecte de forma significativa a precisão do resultado final do azimute A.

Em resumo:

– Deve observar-se no círculo horário das 6^h ou 18^h, uma estrela circumpolar (uma vez que nessas circunstâncias o valor de azimute é próximo de 180^o).

B - Método de determinação do azimute a partir do cálculo do ângulo horário de uma estrela, suposta conhecida a latitude do lugar

B.1 Introdução

Tal como no método descrito no ponto A, vamos determinar o azimute de qualquer direcção terrestre a partir do azimute de um corpo celeste. Neste caso não iremos observar nenhuma coordenada do astro. Apenas usamos o instrumento universal para baixar para o terreno a direcção de visada e registamos o tempo correspondente a esse instante.

B.2 Exposição do método

Por meio deste método pretende efectuar-se a determinação do azimute A de um dado corpo celeste M, sendo conhecidos:

– a latitude φ do lugar de observação,

– o ângulo horário t do astro (por cálculo[7]),

– a declinação δ (por consulta das efemérides do corpo celeste).

Considerando o triângulo de posição do corpo celeste para um observador situado à latitude φ, no hemisfério norte (ver figura A-2), calcula-se o valor do azimute A, relacionando as coordenadas A, φ, t e δ, por meio da dita “fórmula dos quatro elementos consecutivos” da Trigonometria Esférica:

$$\cos t \cos(90-\varphi) = \sin(90-\varphi)\cot(90-\delta) - \sin t \cot(180-A) \quad \text{(B-1)}$$

o que é equivalente a ter a relação

$$\cot A = \frac{\sin\varphi}{\tan t} - \frac{\cos\varphi \tan\delta}{\sin t},$$

a partir da qual se obtém, sem ambiguidade[8], o valor do azimute A.

B.3 Discussão do método

Novamente, pela utilização de fórmulas diferenciais da Trigonometria Esférica, vamos avaliar de que forma é que as incertezas presentes nos dados do problema afectam o resultado do azimute A e, posteriormente, com base nesses resultados, tirar conclusões acerca das condições mais favoráveis à implementação prática do método.

Pretendendo relacionar quatro elementos consecutivos do triângulo esférico de posição do corpo celeste, vamos utilizar uma fórmula diferencial da Trigonometria Esférica dita do “terceiro tipo”, vindo:

---

[7] O tempo sideral θ local que, por definição, é igual ao ângulo horário do ponto vernal γ, pode ser obtido através de

$$\theta = \alpha + t$$

onde α representa a ascensão recta do corpo celeste (obtida por consulta das suas efemérides).

Por outro lado, θ pode ser obtido a partir de

$$\theta = \mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}$$

onde T e $\Delta\mathrm{T}$ representam a indicação do relógio e o estado do relógio, respectivamente.

Representando por $\Delta\mathrm{T}_0$ o estado do relógio (conhecido) para um instante anterior T_0 e por $\delta\mathrm{T}$ a marcha do relógio, podemos escrever

$$\theta = \mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}_0 + (\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\delta\mathrm{T}$$

e vem

$$t = \mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}_0 + (\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\delta\mathrm{T} - \alpha$$

Para calcular o ângulo horário, observador tem que conhecer o estado do relógio num instante anterior, bem como a marcha do relógio (taxa de variação do estado do relógio), e registar a indicação do relógio no momento em que efectua a observação.

[8] Se o corpo celeste se encontra a Ocidente o seu azimute varia entre 0 e 180 graus e se se encontra a Oriente o seu azimute varia entre 180 e 360 graus.

$$\sin q \; d(90-\delta) - \sin z \; d(180-A) = \cos q \; \sin(90-\delta)\; dt + \cos z \; \sin(180-A)\; d(90-\varphi)\,,$$

o que equivale a ter

$$dA = \frac{\sin q}{\sin z} d\delta + \frac{\cos q \cos \delta}{\sin z} dt - \frac{\sin A}{\tan z} d\varphi$$

Identificando novamente a diferencial de cada variável com o erro e aplicando módulos, vem:

$$|dA| \le \frac{|\sin q|}{|\sin z|}|d\delta| + \frac{|\cos q||\cos \delta|}{|\sin z|}|dt| + \frac{|\sin A|}{|\tan z|}|d\varphi| \qquad \text{(B-2)}$$

Mais uma vez, o segundo membro da relação (B-2) será um majorante do módulo do erro cometido no cálculo do azimute A do astro. Vejamos como minorar o valor desse majorante.

Em primeiro lugar, pretendemos que sejam máximos os valores dos denominadores das três parcelas. Tal acontece quando a distância zenital toma o valor de 90^o, ou seja, quando o astro é observado sobre o horizonte. No entanto, sabemos que, devido à refracção atmosférica[9], são de evitar as observações próximas do horizonte. Por outro lado, também não se deve efectuar observações perto do zénite, pois nesse caso os valores de $\sin z$ e $\tan z$ seriam próximos de zero, fazendo com que os valores dos quocientes das três parcelas do majorante do erro cometido no azimute, tomassem valores muito elevados. Assim, iremos escolher um corpo celeste que, no instante da observação, apresente uma distância zenital intermédia, ou seja, que nem se apresente próximo do horizonte nem próximo do zénite.

Avaliemos os valores tomados pelos diversos numeradores das parcelas do majorante do erro:

- $|d\delta|$, que surge na primeira parcela, apresenta um valor muito reduzido, uma vez que o valor da declinação δ é obtido por consulta nas efemérides do astro e como tal é bastante preciso.
- O erro no ângulo horário, $|dt|$, pode ser bastante elevado, dado que é resultado (indirecto) de uma leitura de tempo. Sendo assim, o valor do produto $|\cos q||\cos\delta|$ deve ser o menor possível. Uma vez que $|\cos q|$ aparece a multiplicar, vamos, para já, apenas preocupar-nos em minimizar $|\cos\delta|$. O valor mínimo ocorre quando $\cos\delta = 0$, o que se verifica para $\delta = -90^o$ ou para $\delta = 90^o$. Uma vez que pretendemos utilizar um corpo celeste que seja observável, vamos escolher uma estrela que seja circumpolar, de forma que a declinação δ seja próxima de 90^o.

Vejamos como conjugar as condições que referimos a respeito dos valores a tomar pela distância zenital z e pela declinação δ. Para a latitude de Coimbra, que é próxima de 40^o, considerando a estrela polar, que se encontra a uma distância do Pólo sempre inferior a 1^o (ou seja, $\delta > 89^o$), tem-se:

[9] Pela teoria referente à refracção astronómica sabemos que nunca se deve observar uma estrela próxima do horizonte, uma vez que aí a influência da refracção é muito forte. Além disso, próximo do horizonte, a refracção não altera só o valor da altura do astro, mas também afecta o azimute segundo o qual ele é visto. Por outro lado, para distâncias zenitais assim tão elevadas, não existe nenhum modelo que descreva a refracção. Na prática, nunca são de efectuar observações com distância zenital superior a 75^o.

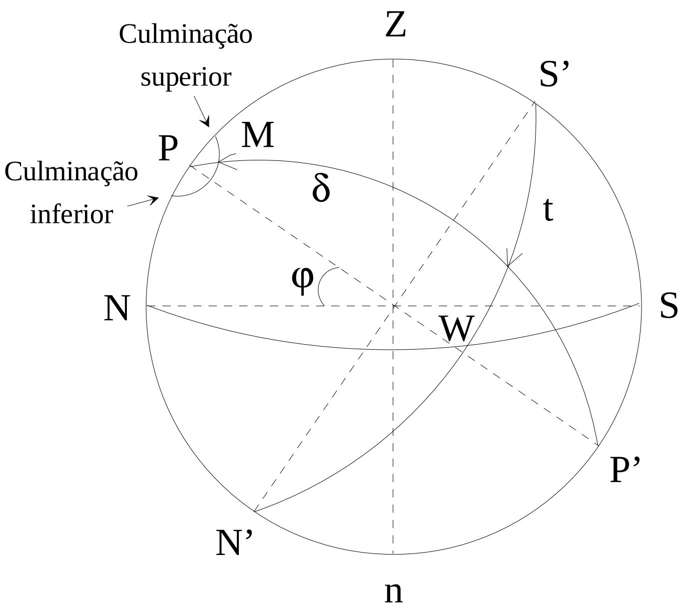

figura B-1 - Culminações superior e inferior de uma estrela circumpolar

– na culminação superior z é próximo de 49º,
– na culminação inferior z é próximo de 51º.

Tal como verificámos para a latitude de Coimbra, escolhendo-se uma estrela circumpolar, o valor da distância zenital z irá sempre ser um valor da ordem de $90 - \varphi$. Notamos assim que este método é aplicável para uma grande gama de latitudes (desde que a latitude seja tal que se salvaguarde a condição de z não ser próximo de 0º nem próximo de 90º).

Tendo em conta as considerações anteriores, vamos estudar três casos distintos:

– 1º CASO: Em primeiro lugar vamos supor que se tem pouca confiança no valor da latitude, ou seja, que $|d\varphi|$ apresenta um valor elevado. Uma vez que a distância zenital z foi escolhida a tomar um valor intermédio, o valor de $|\tan z|$, denominador de $\frac{|\sin A|}{|\tan z|}|d\varphi|$, não irá afectar o resultado de forma significativa. Vamos então procurar minimizar o valor de $|\sin A|$. O mínimo ocorre quando $|\sin A| = 0$, o que se verifica para $A = 0^o$ ou $A = 180^o$, isto é, quando se observa uma estrela circumpolar na proximidade do meridiano, ou seja, junto à sua culminação superior, ou junto à sua culminação inferior, respectivamente.
– 2º CASO: Não receando o erro na latitude, mas sim no valor da declinação δ, será necessário minimizar o valor da parcela $\frac{|\sin q|}{|\sin z|}|d\delta|$. Uma vez que, tendo em conta as considerações feitas atrás, o valor de $\sin z$ não tem grande influência, pretendemos que $|\sin q|$ seja mínimo. Tal verifica-se quando $|\sin q| = 0$, ou seja, quando $q = 0^o$ ou $q = 180^o$, isto é, quando a estrela se encontra na sua culminação inferior ou na sua culminação superior, respectivamente.

Verificamos assim que, quer considerando o primeiro caso, quer considerando o segundo caso, é da maior conveniência observar uma estrela circumpolar (como, por exemplo, a estrela polar) junto às suas culminações.

- 3º CASO: Supondo que temos pouca confiança no valor do ângulo horário utilizado, ou seja, que é de recear um erro bastante elevado no valor de t, vamos procurar minorar ainda mais a parcela $\frac{|\cos q||\cos \delta|}{|\sin z|}|dt|$, pela minimização do factor $|\cos q|$ do numerador. De facto, $|\cos q|$ é mínimo quando $|\cos q| = 0$, ou seja, quando $q = 90^o$ ou $q = 270^o$, o que ocorre quando a estrela está na sua maior digressão, a Ocidente ou a Oriente, respectivamente. Sendo uma estrela circumpolar, as maiores digressões da estrela polar ocorrem também na proximidade do meridiano.

Em resumo:

- Na implementação prática deste método, para que o resultado obtido para o azimute A apresente uma boa precisão, existe vantagem em observar-se a estrela polar, em qualquer posição. Em casos especiais (quando temos menor confiança nalgum dos dados que dispomos), a estrela polar deve ser observada perto do meridiano (nas proximidades da culminação superior ou inferior) ou junto a uma das suas maiores digressões (a Ocidente ou a Oriente).

BIBLIOGRAFIA

[1] H. KARTTUNEN, P. KRÖGER, H. OJA, M. POUTANEN & K. J: DONNER - *Fundamental Astronomy*, Springer-Verlag, 1993;

[2] J. B. MACKIE - *The Elements of Astronomy for Surveyors*, Charles Griffin & Company Limited, 1985;

[3] Alberto Simões da SILVA - *Apontamentos teóricos da cadeira de Astronomia Geodésica da Licenciatura em Engenharia Geográfica*, Ano Lectivo de 1990/91.