Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Numérica

(Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores)

16 de Julho de 2004 Duração: 3h

---

1. Pretende-se calcular o valor da área, A, da região definida por $y \geq (x-1)^2 \wedge y \leq \ln(x)$.
   (a) Escreva a expressão do integral que lhe permite calcular A.
   (b) Localize, num intervalo de amplitude inferior a 1, a maior abcissa α dos pontos de intersecção das duas curvas.
   (c) Determine uma função g que garanta a convergência do método do ponto fixo ($x_{n+1} = g(x_n)$, com $n \in \mathbb{N}_0$). Justifique a resposta.
   (d) Aproxime α, aplicando o método do ponto fixo duas vezes, e determine um majorante para o erro cometido.
   (e) Indique o menor número de pontos necessários para aproximar o valor de A utilizando a regra de Simpsons com erro inferior a 0.001.
   (f) Calcule um valor aproximado de A com a precisão referida na alínea anterior.

2. Considere o sistema $Ax = b$ com $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$.
   (a) A solução exacta deste sistema pode ser aproximada usando o método de Jacobi. Que pode afirmar sobre a convergência deste método.
   (b) Independentemente do resultado da alínea anterior, determine um valor aproximado para a solução exacta de $Ax = b$ usando o método de Jacobi duas vezes.
   (c) Calcule o número de condição da matriz A e indique se o sistema $Ax = b$ é bem ou mal condicionado.

3. Pretende-se aproximar a função $f(x) = e^x, x \in [-1, 1]$ por um polinómio interpolador $P_n(x)$.
   (a) Determine o menor número de pontos interpoladores necessário para garantir que o erro cometido ao aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$, com $x \in [-1, 1]$, seja inferior a 0.5.
   (b) Calcule o polinómio $P_n(x)$ tendo em conta o número de pontos obtidos em 3.(a). **NOTA**: caso não tenho resolvido a alínea 3.(a), utilize 6 pontos.
   (c) Calcule uma aproximação para $\sqrt[10]{e}$ e compare-a com o valor obtido na máquina de calcular. Comente o resultado.

4. Considere o polinómio $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 1$.
   (a) Determine os raios da coroa circular que contém <u>todas</u> as raízes de $P(x) = 0$.
   (b) Utilizando a regra de sinal de Descartes, diga o que pode afirmar sobre o número de raízes reais (positivas e negativas) e complexas.
   (c) Faça a separação completa das raízes reais de $P(x) = 0$.

5. Caluce a área de um círculo, de raio $r = \ln(2)$ cm, com erro inferior a 0.0005, indicando quantas casas decimais de precisão devem ser utilizadas nos valores de π e r.

v.s.f.f.

As perguntas **6** e **7** destinam-se a substuir os mini-testes realizados nas aulas práticas. Ao optar por responder a alguma destas questões, _anula_ a nota obtida nos 4 mini-testes (para este exame).

6. (a) A fórmula de Simpsons composta pode ser obtida integrando um determinado polinómio. Indentifique-o.
   (b) Relacione os zeros de um polinómio $P(x)$ com os de $Q(x)$ onde:
   (i) $Q(x) = -2P(-x)$ (ii) $Q(x) = (P(x))^2$
   (c) Verifique se $P(x) = 1 - x^2$ é o polinómio interpolador de $\cos(\frac{x\pi}{2})$ nos pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

7. Prove que, se f é uma função com derivada de segunda ordem contínua em $[a, b]$, tal que:
   $$f(a) > 0, f(b) < 0, x_0 = b \text{ e } f^{(i)}(x) > 0, \forall x \in [a, b], i = 1, 2$$
   então a sucessaão de aproximações gerada pelo método $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge para a única solução de $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$.

FORMULÁRIO

Fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})\,.$$

Fórmula do erro para a interpolação polinomial

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,.$$

Método de Jacobi $(Ax = b)$

$$A = D - E - F$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,.$$

Fórmula do erro para a regra de Simpson

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b - a)f^{(4)}(\xi)\,, \qquad \xi \in (a, b)\,.$$

Fórmula da propagação do erro

$$|\Delta \overline{f}| \leq \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_i}||\Delta \overline{x}_i|\,.$$

---

cotação

1 - 6 valores, **2** - 3 valores, **3** - 3 valores
4 - 3 valores, **5** - 1 valor, **6** - 2 valores **7** - 2 valores

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Análise Numérica
(Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores)

22 de Junho de 2004 Duração: 3h

---

1. (a) Localize, num intervalo de amplitude 1, a maior abcissa dos pontos de intersecção da curva $y = e^x$ com a circuferência de centro na origem e raio 2.

   (b) Verifique se o método de Newton, para aproximar a abcissa localizada em 1.(a), é convergente.

   (c) Aproxime-a aplicando o método de Newton duas vezes.

   (d) Aproxime a área da região definida por:

   $$y \geq e^x \wedge x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0$$

   utilizando a regra dos trapézios com 4 sub-intervalos.

   (e) Calcule um majorante para o erro cometido na aproximação obtida em 1.(d) e indique o número de casas decimais de precisão.

2. Suponha que é possível reescrever o sistema $Ax = b$ na forma equivalente $x = Mx + c$, onde $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 1/5 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/10 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique se o método iterativo $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$ é convergente.

   (b) Calcule a solução exacta α do sistema original $Ax = b$.

   (c) Aproxime a solução exacta α, usando duas vezes este método iterativo.

   (d) Calcule $||x^{(2)} - \alpha||_\infty$.

3. Considere a função $f(x) = \sin(x) - \cos(x), x \in [0, \pi/4]$.

   (a) Determine o polinómio interpolador de Hermite para a função f utilizando os pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = \pi/4$.

   (b) Calcule uma aproximação para $f(\pi/8)$ e $f'(\pi/8)$.

   (c) Indique um majorante do erro cometido na aproximação de $f(\pi/8)$.

   (d) Tendo em conta os valores encontrados em 3.(b), calcule uma aproximação para $\sin(\pi/8)$ e $\cos(\pi/8)$. **NOTA**: caso não tenho resolvido a alínea 3.(b), faça $f(\pi/8) = \beta$ e $f'(\pi/8) = \gamma$ e deduza as aproximações pedidas em função de β e γ.

4. Considere o polinómio $P(x) = x^{2004} - 22x + 6$.

   (a) Determine os raios da coroa circular que contém <u>todas</u> as raízes de $P(x) = 0$.

   (b) Utilizando a regra de sinal de Descartes, indique o que pode dizer sobre o número de raízes reais positivas, raízes reais negativas e raízes complexas.

   (c) Faça a separação completa das raízes reais de $P(x) = 0$.

v.s.f.f.

As perguntas **5** e **6** destinam-se a substuir os mini-testes realizados nas aulas práticas. Ao optar por responder a alguma destas questões, <u>*anula*</u> a nota obtida nos 4 mini-testes (para este exame).

5. (a) A fórmula dos trapézios composta pode ser obtida integrando um determinado polinómio. Indentifique-o.

   (b) Qual a ordem de convergência do método de Newton para aproximar uma equação não linear $f(x) = 0$.

   (c) Relativamente ao polinómio interpolador segmentado de grau m, $S(x)$, de uma função f nos pontos pontos $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ (onde $n = km$), o que pode dizer sobre a diferenciabilidade de S em $[a, b]$?

   (d) Indique um conjunto de condições que garantam a convergência do método $x_{(n+1)} = g(x_{(n)}), n \geq 0$, utilizado para aproximar a raiz $\alpha \in [a, b]$ da equação $f(x) = 0$.

6. Suponha que é possível reescrever o sistema de equações lineares $Ax = b$ na forma equivalente $x = Mx+c$. Prove que, se $||M|| < 1$, então o método iterativo $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$ converge para a solução do sistema $Ax = b$.

FORMULÁRIO

Método de Newton-Raphson $(f(x) = 0)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0)+f[x_0, x_1](x-x_0)+f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0, \ldots, x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) .$$

Fórmula do erro para a interpolação polinomial

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\, \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n + 1)!} .$$

Regra dos Trapézios

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Fórmula do erro para a regra dos Trapézios

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b - a)f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b) .$$

<u>**cotação**</u>

1 - 5 valores,	**2** - 4 valores,	**3** - 4 valores
4 - 3 valores,	**5** - 2 valores,	**6** - 2 valores