Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Licenciatura em Eng. Electrotcnica e de Computadores
Algumas perguntas de mini-testes

1. Para garantir duas casas decimais de precisão no valor de $f(\bar{x})$, a fórmula de propagação do erro indica que $|\Delta\bar{x}| \leq 5,78 \times 10^{-3}$. Quantas casas decimais de precisão deve garantir no valor de $\bar{x}$?

2. Seja $P_n(x; a)$ o polinómio de Taylor de ordem n para uma função f. O que pode afirmar sobre o grau de $P_n(x; a)$?

3. Suponha que são válidas as condições de convergência do método de Newton para a equação $f(x) = 0$, no intervalo $[1, 2]$. Diga se é possível obter a seguinte sequência de valores com este método:

$$x_0 = 1; x_1 = 1.5; x_2 = 1.41; x_3 = 1.45; x_4 = 1.4142; x_5 = 1.4143$$

   Justifique suscintamente.

4. Indique um conjunto de condições suficientes que garantam a convergência do método do ponto fixo.

5. Para garantir duas casas decimais de precisão no valor de $f(\bar{x})$, a fórmula de propagação do erro indica que $|\Delta\bar{x}| \leq 4,31 \times 10^{-5}$. Quantas casas decimais de precisão deve garantir no valor de $\bar{x}$?

6. Seja $R_n(x; a)$ o resto do polinómio de Taylor de ordem n para uma função f. O que pode afirmar sobre o grau de $R_n(x; a)$?

7. Suponha que são válidas as condições de convergência do método do ponto fixo para a equação $x = g(x)$ no intervalo $[1, 2]$. Diga se é possível obter a seguinte sequência de valores com este método:

$$x_0 = 1; x_1 = 2.5; x_2 = 1.5; x_3 = 1.75; x_4 = 1.65; x_5 = 1.7$$

Justifique suscintamente.

8. Indique uma condição suficiente para existência de ponto fixo de g em $[a, b]$.

9. Com uma determinada aproximação $\bar{x}$ foi possível garantir que $|\Delta f(\bar{x})| \leq 4,31 \times 10^{-5}$. Quantas casas decimais de precisão pode garantir no valor de $f(\bar{x})$?

10. Suponha que $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Complete a seguinte frase: "As raízes de $f(x) = 0$ correspondem ____ do gráfico de $y = f_1(x)$ com $y = f_2(x)$."

11. Indique a ordem de convergência do método de Newton.

12. Indique um conjunto de condições suficientes que garantam a convergência do método de Newton.

13. Com uma determinada aproximação $\bar{x}$ foi possível garantir que $|\Delta f(\bar{x})| \leq 5,78 \times 10^{-3}$. Quantas casas decimais de precisão pode garantir no valor de $f(\bar{x})$?

14. Suponha que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Complete a seguinte frase: "Os zeros de f correspondem ___________________________________ de g."

15. Indique, no caso geral, a ordem de convergência do método do ponto fixo.

16. Indique três critérios de paragem para os métodos iterativos que aproximem a solução de $f(x) = 0$.

17. Uma aproximação $\bar{x}$ tem n casas decimais de precisão se e só se ____________________.

18. A fórmula de propagação dos erros permite resolver um problema denominado por *problema directo*. Este consiste em majorar ______________ conhecendo o majorante de ______________.

19. Sabendo que f é contínua em $[a, b]$ e que $f(a) \times f(b) < 0$, o que pode afirmar sobre o número de raízes de $f(x) = 0$ em $[a, b]$?

20. Sabendo que $|g'(x)| \leq k < 1, \forall x \in \mathbb{R}$, estabeleça um majorante para $|e_n|$.

21. Uma aproximação $\bar{x}$ tem n algarismos significativos de precisão se e só se ______________.

22. A fórmula de propagação dos erros permite resolver um problema denominado por *problema inverso*. Este consiste em majorar ______________ conhecendo o majorante de ______________.

23. Seja $f(x)$ uma função derivável em $[a, b]$ e suponha que f' se anula em $[a, b]$. O que pode afirmar sobre os zeros de f em $[a, b]$? Justifique com um exemplo.

24. Admita que existe $c \in [a, b]$ tal que $g'(c) > 1$. O que pode afirmar sobre a convergência da sucessão de aproximações $x_{n+1} = g(x_n)$.

Seja P um polinómio de grau 3 com coeficientes reais e considere o seguinte quadro de Fourier:

x	0	1
$P(x)$	+	0
$P'(x)$	-	+
$P''(x)$	-	0
$P'''(x)$	+	+

(a) O que pode afirmar sobre $x = 1$?

(b) O que pode afirmar sobre o número de raízes de $P(x) = 0$ no intervalo $[0,\ 1]$? Justifique convenientemente.

(c) Quantas raízes negativas de $P(x) = 0$ existem?

(d) O que pode afirmar sobre o número de raízes complexas de $P(x) = 0$?

Seja P um polinómio de grau 3 com coeficientes reais e considere o seguinte quadro de Fourier:

x	0	1
$P(x)$	+	0
$P'(x)$	-	0
$P''(x)$	-	+
$P'''(x)$	+	+

(a) O que pode afirmar sobre $x = 1$?

(b) O que pode afirmar sobre o número de raízes de $P(x) = 0$ no intervalo $[0,\ 1]$? Justifique convenientemente.

(c) Quantas raízes negativas de $P(x) = 0$ existem?

(d) O que pode afirmar sobre o número de raízes complexas de $P(x) = 0$?

25. Seja P um polinómio de grau n com coeficientes reais onde $a_0 \neq 0$ é o coeficiente do termo de maior grau. Então, $P^{(n)}(x) =$ __________.

26. Seja $P(x) = x^n - x + 1$, $n \geq 2$ e n par. Utilizando a regra de sinal de Descartes, o que pode afirmar sobre:

   (a) o número de raízes positivas de $P(x) = 0$?

   (b) o número de raízes negativas de $P(x) = 0$?

   (c) o número de raízes complexas de $P(x) = 0$?

27. Seja P um polinómio de grau n com coeficientes reais onde $a_0 \neq 0$ é o coeficiente do termo de maior grau. Então, $P^{(n+1)}(x) =$ __________.

28. Seja $P(x) = x^n - x + 1$, $n \geq 3$ e n ímpar. Utilizando a regra de sinal de Descartes, o que pode afirmar sobre:

    (a) o número de raízes positivas de $P(x) = 0$?

    (b) o número de raízes negativas de $P(x) = 0$?

    (c) o número de raízes complexas de $P(x) = 0$?

29. Seja $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ e seja α uma raiz de $P(x) = 0$. Então:

    (a) $|\alpha| <$

    (b) $|\alpha| >$

30. Seja P um polinómio de grau n.

    (a) Relacione as raízes de $Q(x) = 0$, onde $Q(x) = P(-x)$, com as raízes de $P(x) = 0$.

    (b) Relacione as raízes de $Q(x) = 0$, onde $Q(x) = \frac{1}{x^n}P(x)$, com as raízes de $P(x) = 0$.

31. Seja $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 3$ e seja α uma raiz de $P(x) = 0$. Então:

    (a) $|\alpha| <$

    (b) $|\alpha| >$

32. Seja P um polinómio de grau n.

(a) Relacione as raízes de $Q(x) = 0$, onde $Q(x) = -P(x)$, com as raízes de $P(x) = 0$.

(b) Relacione as raízes de $Q(x) = 0$, onde $Q(x) = x^n P(\frac{1}{x^n})$, com as raízes de $P(x) = 0$.

33. Suponha que o sistema $Ax = b$ foi reescrito na forma $A'x' = b'$, onde A' obtém-se de A trocando a linha i com a linha j. Indique as restantes alterações que devem ser realizadas para assegurar a equivalência dos sistemas $Ax = b$ e $A'x' = b'$.

34. Suponha que é possível factorizar A na forma $A = Q\,Q^{\intercal}$ onde Q é uma matriz triangular inferior (factorização de Cholesky). Indique um par de sistemas obtido com a factorização anterior cuja resolução é equivalente à resolução de $Ax = b$.

35. Na matriz de iteração do método de Jacobi existem elementos que são sempre nulos. Em que posição se encontram?

36. Suponha que é possível reescrever o sistema $Ax = b$ na forma $x = Mx + c$ onde $M = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 2/3 & 1/2 \end{bmatrix}$. O que pode afirmar sobre a convergência deste método iterativo? Justifique convenientemente.

37. Indique condições suficientes para garantir a factorização $A = Q\,Q^{\intercal}$ onde Q é uma matriz triangular inferior com elementos reais (factorização de Cholesky).

38. Na matriz de iteração do método de Gauss-Seidel existem elementos que são sempre nulos. Em que posição se encontram?

39. Suponha que é possível reescrever o sistema $Ax = b$ na forma $x = Mx + c$ onde $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/5 & 0 \end{bmatrix}$. O que pode afirmar sobre a convergência deste método iterativo? Justifique convenientemente.

40. Considere o sistema $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$. O que pode afirmar sobre a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel, quando aplicados ao sistema $Ax = b$? Justifique convenientemente.

41. Suponha que o sistema $Ax = b$ foi reescrito na forma $A'x' = b'$, onde A' obtém-se de A trocando a coluna i com a coluna j. Indique as restantes alterações que devem ser realizadas para assegurar a equivalência dos sistemas $Ax = b$ e $A'x' = b'$.

42. Suponha que ao aplicar o método de eliminação de Gauss, consegue factorizar A na forma $A = LU$ (L matriz triangular inferior e U matriz triangular superior). Indique um par de sistemas obtido com a factorização anterior cuja resolução é equivalente à resolução de $Ax = b$.

43. Uma matriz A quadrada de ordem n diz-se definida positiva se:

44. Considere o sistema $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1000 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$. O que pode afirmar sobre a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel, quando aplicados ao sistema $Ax = b$? Justifique convenientemente.

45. Defina *polinómio interpolador segmentado de grau m de uma função f nos pontos pontos* $x_0, \ldots, x_n$ (onde $n = km$).

46. Verifique se $P(x) = x^3$ é o polinómio interpolador de uma função f nos pontos $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,8)$.

47. Um processo para obter o polinómio interpolador de Hermite envolve o cálculo de $f[x_i, x_i]$. Indique o valor desta diferença dividida.

48. Em que condições o polinómio interpolador de uma função f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$ coincide com f para todo o $x \in \mathbb{R}$?

49. Verifique se $P(x) = x^4$ é o polinómio interpolador de uma função f da qual se conhece a seguinte tabela:

x_i	0	1
$f(x_i)$	0	1
$f'(x_i)$	0	4

50. Defina *polinómio interpolador de uma função f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$*.

51. Indique condições que garantam a existência e unicidade do polinómio interpolador de uma função f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$.

52. Relativamente ao polinómio interpolador segmentado de grau m, $S(x)$, de uma função f nos pontos pontos $x_0, \ldots, x_n$ (onde $n = km$), o que pode dizer sobre a diferenciabilidade de S?

53. Verifique se $P(x) = 3x^2 - 2x$ é o polinómio interpolador de uma função f nos pontos $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,8)$.

54. Defina *polinómio interpolador de Hermite de uma função f nos pontos* $x_0, \ldots, x_n$.

55. Em que condições se pode aplicar a fórmula de Newton com diferenças progressivas?

56. Sabendo que o polinómio interpolador de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nos pontos $x_0, \ldots, x_n$ é dado por $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)$, com $\ell_i(x) = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, generalize esta fórmula para determinar o polinómio interpolador de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nos pontos $x_0, \ldots, x_n$ e $y_0, \ldots, y_m$.