Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Análise Numérica
(Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores)

15 de Julho de 2005 Duração: 3h

---

1. Pretende-se calcular o valor da área, A, da região definida por
$$y \geq (x-1)^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0.$$
   (a) Escreva a expressão do integral que lhe permite calcular A. (utilize a letra α para indicar o limite superior do intervalo de integração).
   (b) Determine uma função g e um intervalo que garantam a convergência do método do ponto fixo ($x_{n+1} = g(x_n)$, com $n \in \mathbb{N}_0$) para α. Justifique a resposta.
   (c) Aproxime α, aplicando o método do ponto fixo duas vezes, e determine um majorante para o erro cometido.
   (d) Aplique a regra de Simpsons com 4 subintervalos para obter um valor aproximado de A.
   (e) Calcule um majorante para o erro da aproximação obtida na alínea anterior.

2. Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [20.25,\ 30.25]$.
   (a) Utilize o polinómio de Taylor para deduzir a fórmula $\sqrt{x} \approx 5 + \frac{x-25}{10} - \frac{(x-25)^2}{1000}$.
   (b) Determine o erro máximo cometido na fórmula anterior quando $x \in [20.25, 30.25]$ (indique o número de casas decimais de precisão).
   (c) Calcule o polinómio interpolador de Hermite de grau menor ou igual a 3 para $f(x)$ no intervalo $[20.25,\ 30.25]$.
   (d) Indique o erro máximo cometido pelo polinómio interpolador de Hermite quando $x \in [20.25,\ 30.25]$.
   (e) Sem efectuar cálculos, encontre o polinómio interpolador de Hermite quando se considera apenas o ponto $x_i = 25$. Justifique.

3. Considere o sistema $Ax = b$ com $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$.
   (a) A solução exacta deste sistema pode ser aproximada usando o método de Gauss-Seidel. Que pode afirmar sobre a convergência deste método.
   (b) Independentemente do resultado da alínea anterior, determine um valor aproximado para a solução exacta de $Ax = b$ usando o método de Gauss-Seidel duas vezes.
   (c) Calcule o número de condição da matriz A e indique se o sistema $Ax = b$ é bem ou mal condicionado.

4. Considere o polinómio $P(x) = x^3 - 3x^2 + k$, onde $k \in \mathbb{R}$.
   (a) Utilizando a regra de sinal de Descartes, diga o que pode afirmar sobre o número de raízes reais do polinómio em função do parâmetro k.
   (b) Estabeleça uma condição para k que garanta a existência de raízes complexas de $P(x) = 0$.
   (c) Faça a separação completa das raízes reais de $P(x) = 0$ para todos os valores de k.

v.s.f.f.

As perguntas **5** e **6** destinam-se a substuir os mini-testes realizados nas aulas práticas. Ao optar por responder a alguma destas questões, _anula_ a nota obtida nos 4 mini-testes (para este exame).

5. (a) Indique a ordem de convergência do método de Newton.
   (b) A fórmula de propagação dos erros permite resolver um problema denominado por *problema inverso*. Descreva-o.
   (c) Seja P um polinómio de grau n. Relacione as raízes de $Q(x) = 0$, onde $Q(x) = x^n P(\frac{1}{x})$, com as raízes de $P(x) = 0$.
   (d) Defina *polinómio interpolador segmentado de grau* m de uma função f nos pontos pontos $x_0, \dots, x_n$ (onde $n = km$).
6. Seja A uma matriz quadrada. Prove que $\rho(A) \leq ||A||$, onde $\rho(A)$ indica o raio espectral de A e $||A||$ uma norma matricial.

FORMULÁRIO

Método do Ponto Fixo $(x = g(x))$

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \; n = 0, 1, 2, \dots .$$

Fórmula do erro para o método do ponto fixo $(x = g(x))$

$$e_{n+1} = g'(\theta_n) e_n\,, \theta_n \in [a, b], \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Método de Gauss-Seidel $(Ax = b$**, com** $A = D - E - F)$

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F x^{(k)} + (D - E)^{-1} b\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})\,.$$

Fórmula do erro para a interpolação polinomial

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,, \qquad \xi_x \in [a, b].$$

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,.$$

Fórmula do erro para a regra de Simpson

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b - a) f^{(4)}(\xi)\,, \qquad \xi \in (a, b)\,.$$

---

cotação

1 - 5 valores, **2** - 5 valores, **3** - 3 valores
4 - 3 valores, **5** - 2 valor, **6** - 2 valores

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Análise Numérica
(Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores)

21 de Junho de 2005 Duração: 3h

---

1. Pretende-se calcular o mínimo da função $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}$. Para o efeito:
   (a) Localize, num intervalo de amplitude inferior ou igual a um, o minimizante de f.
   (b) Verifique se o método de Newton, para aproximar o valor localizado em 1.(a), é convergente.
   (c) Aplique o método de Newton duas vezes para aproximar o minimizante de f. Calcule também uma aproximação para o valor mínimo de f.
   (d) Indique um majorante para o erro cometido na aproximação do minimizante de f.
   (e) Indique um majorante para o erro cometido na aproximação do mínimo de f.

2. Considere o polinómio $P(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 40$
   (a) Determine os raios da coroa circular que contém <u>todas</u> as raízes de $P(x) = 0$.
   (b) Sem calcular $P(20\sqrt{3} - 15i)$, verifique se $20\sqrt{3} - 15i$ pode ser raíz de $P(x) = 0$.
   (c) Utilizando a regra de sinal de Descartes, diga o que pode afirmar sobre o número de raízes reais do polinómio.
   (d) Faça a separação completa das raízes reais de $P(x) = 0$.

3. Suponha que é possível reescrever o sistema $Ax = b$ na forma equivalente $x = Mx + c$, onde $M = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 1/5 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.
   (a) Verifique se o método iterativo $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$ é convergente.
   (b) Calcule a solução exacta α do sistema original $Ax = b$.
   (c) Aproxime a solução exacta α, usando duas vezes este método iterativo.
   (d) Calcule $||x^{(2)} - \alpha||_1$.

4. Os jactos de água dos novos repuxos da Avenida Sá da Bandeira descrevem uma trajectória parabólica. Para obter a expressão que descreve a trajectoria da água, foram realizadas as seguintes medições:

distância (eixo horizontal)	0	1/4	1/3	1	3/2	2
altura da água	0	21/16	5/3	3	9/4	0

   A expressão em causa pode ser obtida recorrendo ao polinómio interpolador nesse conjunto de pontos. calcule-o.

5. Pretende-se obter uma aproximação para o valor de π recorrendo à fórmula
$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$
   (a) Determine o menor número de pontos necessários para aproximar π com uma casa decimal de precisão, utilizando a regra dos trapézios.
   (b) Calcule um valor aproximado de π com a precisão referida na alínea anterior.

v.s.f.f.

As perguntas **6** e **7** destinam-se a substuir os mini-testes realizados nas aulas práticas. Ao optar por responder a alguma destas questões, <u>anula</u> a nota obtida nos 4 mini-testes (para este exame).

6. (a) Defina número de condição de uma matriz quadrada A.
   (b) Seja P um polinómio de grau n com coeficientes reais onde $a_0 \neq 0$ é o coeficiente do termo de maior grau. Indique o valor de $P^{(n)}(x)$.
   (c) Um processo para obter o polinómio interpolador de Hermite envolve o cálculo de $f[x_i, x_i]$. Indique o valor desta diferença dividida.
   (d) Sabendo que a fórmula iteradora do método de Newton para aproximar a raiz de uma equação não linear é $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0$, indique uma fórmula iteradora para o método de Newton quando se pretende aproximar a solução de um sistema de equações não lineares $F(X) = 0$.

7. Prove que o erro de integração na fórmula dos trapézios simples é
$$E_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b)\,.$$

FORMULÁRIO

Fórmula da propagação do erro

$$|\Delta \overline{f}| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta \overline{x}_i|\,.$$

Método de Newton-Raphson $(f(x) = 0)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Frmula do erro para o método de Newton-Raphson $(f(x) = 0)$

$$e_{n+1} = -\frac{f''(\theta_n)}{2f'(x_n)}(e_n)^2\,, \theta_n \in [a, b], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\,.$$

Regra dos Trapézios

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Fórmula do erro para a regra dos Trapézios

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b)\,.$$

<u>**cotação**</u>

1 - 5 valores, **2** - 4 valores, **3** - 4 valores
4 - 1 valores, **5** - 2 valores, **6** - 2 valores **7** - 2 valores