Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2004/2005 Folha 1

1. Os valores $\bar{x} = 2.72$, $\bar{y} = 2.71$ e $\bar{z} = \frac{65}{24} = 2.708(3)$ são aproximações de $e = 2.718281828...$ obtidas por arredondamento, truncatura e pelo polinómio de Taylor de ordem 4, respectivamente.

   (a) Conte o número de casas decimais de precisão nas aproximações e calcule limites superiores para o erro absoluto em cada uma delas. Compare os resultados e comente.

   (b) Conte o número de algarismos significativos de precisão nas aproximações e calcule limites superiores para o erro relativo em cada uma delas. Compare os resultados e comente.

   (c) Repita o exercício com as aproximações $\bar{x} = 0.36$, $\bar{y} = 0.37$ e $\bar{z} = \frac{3}{8}$ de e^{-1}.

2. Usando o polinómio de Taylor de ordem 2 para a função $f(x) = \sin x$, em torno de $x_0 = \frac{\pi}{4}$, calcule o valor de $\sin 50^o$. Indique o grau de precisão do resultado obtido. Repita o exercício com o polinómio de Taylor de ordem 7 em torno de $x_0 = 0$. Compare os resultados e comente.

3. Considere a função $f(x) = e^x$.

   (a) Mostre que, quando se consideram os n primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor, o erro de truncatura é inferior a $\frac{x^n}{n!}\, e^x$, para $x > 0$.

   (b) Calcule uma aproximação de e^2 com um 3 casas decimais de precisão.

   (c) Dê uma estimativa para o erro que se comete quando se considera $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$.

4. Estabeleça a fórmula $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$, $a > 0$, e a partir dela obtenha aproximações de $\sqrt{27}$ considerando vários valores de a. Compare os resultados e comente.

5. Pretende-se obter uma aproximação A do valor real de $\frac{8}{\pi}\sin(\frac{\pi}{8})$ com 3 casas decimais de precisão.

   (a) Determine o menor número de termos a tomar naquele desenvolvimento de modo a obter a precisão referida.

   (b) Calcule A de acordo com a alínea anterior.

6. Calcule um limite superior do erro absoluto que se obtém para $N = \frac{\pi\sqrt{3}}{\pi^2+\sqrt{2}}$, usando os valores aproximados $\overline{\pi} = 3.1$, $\overline{\sqrt{2}} = 1.4$ e $\overline{\sqrt{3}} = 1.7$ arredondados na última casa decimal.

7. Seja $\bar{x} = 0.937$ um valor aproximado de x com 3 algarismos significativos de precisão.

   (a) Determine uma estimativa para o limite superior do seu erro relativo.

(b) Para a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, obtenha um limite superior do erro relativo de $f(\bar{x})$.

8. Dado o sistema
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$
suponha que os coeficientes $a_{1,j}$ $(j = 1, 2)$ foram calculados com um erro inferior ou igual a ϵ e que os valores b_i $(i = 1, 2)$ estão afectados de um erro inferior ou igual a η. Obtenha um limite superior para o erro absoluto que daí resulta para a solução do sistema.

9. (a) Dada uma matriz real A quadrada de segunda ordem, cujos elementos foram calculados com um erro inferior ou igual a ε, obtenha um limite superior para o erro relativo do seu determinante, $\det(A)$.

   (b) Obtenha um limite superior para o erro relativo de $\det(A)$, com $A = \begin{bmatrix} 2.1 & 4.2 \\ 7.3 & 5.4 \end{bmatrix}$, cujos elementos foram obtidos por arredondamento.

10. A reactância de um condensador é dada pela expressão $X_c = \dfrac{1}{2\pi f c}$ onde X_c é a reactância capacitiva (Ω), f é a frequência (Hz) e c é a capacidade. Determine o erro absoluto máximo para X_c se $f = 100 \pm 1\ Hz$, $c = 10^{-7}$ um valor obtido com uma precisão de 10% e $\pi \approx 3.14$.

11. Seja P a força resultante da passagem da corrente I, num circuito de resistência variável R, dada por $P = I^2R$. Determine um limite superior para o erro relativo de R sabendo unicamente que P e I estão afectados de erros não superiores a 1%.

12. Para determinar a resistência de uma bobina utilizou-se a expressão $R = \rho\dfrac{l}{s}$. Sabendo que $\rho \approx 10\Omega.cm$, $l \approx 50.3\ cm$ e $s \approx 49.7cm^2$ diga com que rigor se devem ler os valores de ρ, l e s para garantir que o erro na medição de R não exceda $5 \times 10^{-2}\Omega$.

13. Pretende-se calcular o valor da expressão $T = \frac{x+z}{y}$ com um erro que não exceda 5×10^{-3}. Sabendo que $\bar{x} = 25.0$, $\bar{y} = 10.0$ e $z = \sqrt{2}$, diga com que precisão se devem tomar x e y e qual o menor número de casas decimais que deve considerar para $\sqrt{2}$.

14. A área de um círculo é $A = \pi r^2$. Sabendo que o valor aproximado de r é 30 cm, indique com que precisão deve ser medido o raio e quantas casas decimais de precisão devem ser utilizadas em π, para obter uma aproximação do valor de A com 4 casas decimais de precisão.

15. Determine um limite superior para os erros relativos de
$$a(x_1,\ldots,x_n) = e^{x_1\cdots x_n}, \qquad b(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{x_1\cdots x_n},$$
$$c(x_1,\ldots,x_n) = e^{x_1+\cdots+x_n}, \qquad d(x_1,\ldots,x_n) = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} = \|\mathbf{x}\|,$$
$$e(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = \frac{x_1}{y_1}\cdots\frac{x_n}{y_n},$$
supondo que $x_1,\ldots,x_n$ são grandezas aproximadas cujo erro não excede 1%.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2004/2005 Folha 2

1. Localize graficamente as raízes das seguintes equações num intervalo de amplitude 0.25:
(a) $\ln(x-1) - \dfrac{1}{x-1} = 0$; (b) $|x| - e^x = 0$; (c) $\dfrac{e^x}{2} - x^3 = 0$.

2. Determine uma aproximação para a menor raiz positiva de $x^3 - 9x + 3 = 0$, iterando o método de Newton 5 vezes. Indique um majorante para o erro cometido.

3. Use o método de Newton para aproximar a solução, com erro inferior a 10^{-2}, da equação $x + 0.5 + 2\cos(\pi x) = 0$ no intervalo $[0, 1]$.

4. Pretende-se construir um tanque cúbico com capacidade de 25000 litros. Calcule uma aproximação para o lado do tanque, com uma casa decimal de precisão, usando o método de Newton.

5. A componente forçada de uma tensão transitória de um dado circuito pode ser traduzida pela expressão
$$\mathcal{E}(t) = e^{-0.06\pi t}\sin(2t - \pi), t > 0.$$
Usando o método de Newton duas vezes determine o valor mínimo para a tensão deste circuito.

6. Considere a função $f(x) = \ln(4 - x^2) - x$.
   (a) Faça a localização gráfica das raízes reais de $f(x) = 0$.
   (b) Utilizando o método de Newton aproxime, verificando as condições de convergência, o valor da maior raiz real da equação real $f(x) = 0$, com um erro não superior a 10^{-2}.

7. Derive um processo iterativo para aproximar a raiz positiva de índice p ($p \geq 2$) de um número $c > 1$, aplicando o método de Newton à equação $x^p - c = 0$.

8. Use o método de Newton para aproximar, com duas casas decimais de precisão, o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2$ mais próximo de $(1, 0)$.

9. Num escoamento com superfície livre pode definir-se uma camada junto ao fundo (designada por camada limite) onde as características do escoamento são significativamente diferentes das que se verificam acima dessa camada. Pode provar-se que a espessura da camada limite é $\delta = 5z$, sendo z, para um escoamento com determinadas características, dado por
$$|z|\log_{10}|75z| = 2.$$
   (a) Localize graficamente as raízes reais desta equação.
   (b) Determine a segunda aproximação dada pelo método de Newton para a espessura da camada limite, δ.
   (c) Indique um limite superior para o erro cometido na aproximação obtida na alínea anterior.

10. Mostre que $x = \frac{1}{2}\cos x$ tem uma solução α. Obtenha em seguida um intervalo $[a, b]$ que contenha a referida raiz e tal que para todo o x_0 nesse intervalo a sucessão $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, convirja para α. Justifique.

11. Considere as seguintes funções iteradoras:

(i) $g_1(x) = x - (x^2 - 2)$; (ii) $g_2(x) = x - \dfrac{x^2-2}{2}$; (iii) $g_3(x) = \dfrac{2}{x}$; (iv) $g_4(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$.

   (a) Prove que todas elas têm um ponto fixo α comum e indique o seu valor.

   (b) Calcule 5 aproximações com cada uma das funções partindo de diferentes aproximações iniciais.

   (c) Indique em que casos se tem garantia que a sucessão de aproximações gerada pelo método do ponto fixo é convergente para α.

   (d) Qual das funções indicadas é mais conveninete para aproximar α? Justifique.

12. Pretende-se utilizar o método do ponto fixo para aproximar a raiz da equação $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$. Para o efeito, considerou-se as seguintes funções iteradoras:

(i) $g_1(x) = x^3 - 1$; (ii) $g_2(x) = \frac{x+1}{x^2}$; (iii) $g_3(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

   (a) Indique quais das funções iteradoras garantem a convergência do método do ponto fixo.

   (b) Aproxime a raiz indicada com 2 casas decimais de precisão.

13. Aproxime todos os zeros de $f(x) = x^2 + 10\cos x$, com 2 casas decimais de precisão, usando o método iterativo do ponto fixo.

14. Determine uma aproximação para a maior raiz de $e^x - 4x^2 = 0$, usando o método do ponto fixo. Indique um majorante do erro da aproximação obtida.

15. Mostre que o método iterativo $x_{r+1} = \frac{c}{x_r^{p-1}}$ não é "útil" para aproximar a raiz de índice p ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) de um número positivo c.

16. Um objecto de massa $m = 1Kg$ é largado de uma altura 30m. O espaço por ele percorrido, após t segundos, é traduzido por

$$s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}),$$

onde $k = 0.5Kg/seg$ representa a resistência do ar e $g = 9.8m/seg^2$. Use o método do ponto fixo para aproximar o tempo necessário para que o objecto atinja o solo.

17. Pretende-se calcular a área limitada superiormente pela recta que passa pelos pontos de coordenadas $(e, 1)$ e $(0, 2)$ e inferiormente pela curva $y = |\ln x|$.

   (a) Determine um intervalo de amplitude não superior a 1, que contenha a menor abcissa dos pontos de intersecção das referidas curvas.

   (b) Calcule o valor da área com 2 casas decimais de precisão.

18. Pretende-se aproximar as raízes da equação $x^4 - 3x^2 + 2x = 0$, utilizando como função de iteração $g(x) = \dfrac{3x^2 - x^4}{2}$.

   (a) Mostre que não existe nenhum intervalo para o qual possa ser garantida a convergência para a raiz $x = 1$.

   (b) Usando o Método de Newton poderá garantir a sua convergência, com a aproximação inicial em $[0.85, 1.5]$? Justifique.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2004/2005 Folha 3

1. O sistema $\begin{cases} x^2-2x+y^2-3 &= 0 \\ x(6-x)+y-9 &= 0 \end{cases}$ tem duas soluções, uma das quais é $[x\ y]^t = [3\ 0]^t$. Determine a outra solução do sistema usando o método de Newton em duas aproximações.

2. Considere o sistema não linear $\begin{cases} x^2+y^2 &= 4 \\ e^x+y &= 1 \end{cases}$. Utilize o método de Newton para determinar a sua solução (x, y) com abcissa positiva em duas iterações.

3. Pretende-se construir uma ponte entre as duas margens de um rio que, por razões económicas, seja o mais curta possível. Sabendo que, na região onde se pretende construir a ponte, as margens do rio têm a forma das curvas $y = e^x$ e $y = x$, determine o comprimento da ponte.

4. Determine uma solução complexa da equação $e^z = z$.

5. Considere a equação $x^2 + cx - 2 = 0$, com $c > 0$.
   (a) Determine, aplicando o método de Fourier, entre que valores pode variar c para que a equação tenha uma única raiz no intervalo $[1, 2]$.
   (b) Aproxime essa raiz pelo método de Newton.

6. Determine k de modo que a equação $z^4 + 2z^2 + kz + 3 = 0$ não admita raízes positivas, admita uma raiz negativa em $[-1, 0]$ e admita uma raiz em $[-2, -1]$.

7. A equação polinomial $x^5 - \dfrac{5}{2}x^4 - x^3 + 7x^2 - 6x + \dfrac{3}{2} = 0$ tem quatro raízes positivas e o seu limite excedente é $L = 2$.
   (a) Determine os sinais da sucessão de Fourier para $x = 1$ e conclua daí o grau de multiplicidade desta raiz.
   (b) Usando essa raiz, baixe de grau a equação dada e separe as raízes positivas da equação resultante.

8. Faça a contagem e a separação das raízes dos polinómios:
   (a) $P_a(x) = ax^2 - 10x + 100$, com $a \in \{0.2, 0.25, 0.3\}$;
   (b) $Q_a(x) = ax^3 - 9.72x^2 + 86x + 140$, com $a \in \{0.2, 0.3\}$.

9. Considere as equações polinomiais:

$$P_1(x) = 20x^3 - 64x^2 + 29x + 33 = 0; \qquad P_2(x) = 27x^3 - 72x^2 + 60x - 16 = 0;$$

$$P_3(x) = 2x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x - 1 = 0; \qquad P_4(x) = x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

   (a) O que pode dizer sobre o número de raízes positivas e negativas de cada polinómio?
   (b) Localize, se possível, as raízes reais destas equações.

10. Considere a equação polinomial $x^3 + kx^2 + 2x - 1 = 0$, com $k \geq 0$.

    (a) Determine o conjunto de todos os valores de k para os quais a equação tem uma única raiz no intervalo $[0, 1]$.

    (b) Tome para k o menor valor inteiro positivo do conjunto obtido na alínea anterior e faça a separação completa das raízes da equação dada.

    (c) Aproxime a menor raiz real daquela equação pelo método de Newton.

11. Localize as raízes das equações:

    (a) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$;

    (b) $2x^3 - 64x^2 + 29x + 35 = 0$.

12. Considere o polinómio $P(x) = -x^3 + 4x - k$, com $k \in \mathbb{R}$. Discuta o número e a localização das raízes reais de $P(x)$ em função dos valores que o parâmetro k pode tomar.

13. Faça a separação, em intervalos de amplitude não superior a uma unidade, das raízes reais dos seguintes polinómios:

    (a) $P(x) = x^3 - 9x - 12$;

    (b) $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$;

    (c) $R(x) = x^4 - 4x^2 - 5$.

14. Seja x^* a solução de $x^6 = x^4 + x^3 + 1$ mais próxima de 1.

    (a) Determine um intervalo de amplitude não superior a um que contenha x^*, justificando o procedimento.

    (b) Aproxime x^* pelo método de Newton efectuando duas iterações.

15. Localize e determine aproximações para as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de:

$$P(x) = 1 - x^3 \quad \text{e} \quad Q(x) = x^2 + 2.$$

16. Localize e separe os valores próprios reais da matriz $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$, sabendo que a sua equação característica é $\lambda^3 - 1.4\lambda^2 + 0.9\lambda - 0.2 = 0$.

17. Pretende-se construir um depósito semi-esférico, de raio r, para armazenar um líquido até uma altura h. Sabendo que o volume do referido líquido é dado pela expressão

$$V = \frac{\pi(2r^3 - 3r^2h + h^3)}{3},$$

    qual o raio com que deve construir o depósito se pretender guardar no máximo 250 litros de líquido a uma altura de 2 metros?

18. Aplicando o método de Bairstow procure determinar os zeros dos seguintes polinómios:

    (a) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;

    (b) $P(x) = x^3 + x - 3$;

    (c) $P(x) = x^3 - x - 1$.

19. Dado o polinómio $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 9$ decomponha-o em dois factores quadráticos usando o método de Bairstow e tomando $s = 3$ e $t = -5$ para valores iniciais.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2004/2005 Folha 4

1. Seja A uma matriz $n \times n$ e x um vector $n \times 1$. Defina-se $||A||_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|, 1 \leq j \leq n\}$, $||A||_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|, 1 \leq i \leq n\}$, $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ e $||x||_\infty = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$.

   (a) Prove que $||x||_1$ e $||x||_\infty$ são normas de vectores.

   (b) Prove que $||A||_1$ e $||A||_\infty$ são normas de matrizes.

   (c) Prove que $||AB|| \leq ||A||\,||B||$ e $||Ax|| \leq ||A||\,||x||$.

   (d) Calcule as normas de matrizes e vectores para $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Aplique o método de Jacobi para determinar uma aproximação da solução do sistema
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -8x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 5y & + & z & = & 16 \\ x & + & y & - & 4z & = & 7 \end{array}\right.$ e o vector inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Utilizando o critério de paragem $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||_\infty < 0.5$, obtenha uma aproximação para a solução exacta:

   (a) usando o método iterativo de Jacobi.

   (b) usando o método iterativo de Gauss-Seidel.

   (c) Compare os resultados obtidos com a solução do sistema.

4. Considere o sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$.

   (a) Determine os valores do parâmetro k para os quais o sistema tem uma só solução.

   (b) Para $k = 0$ poderá aplicar o método de Gauss-Seidel ao sistema? Justifique resposta.

   (c) Determine valores de k para os quais seja garantida a convergência do método de Jacobi.

   (d) Calcule duas aproximações para a solução do sistema, utilizando o método de Jacobi, com $k = 0$.

5. (a) Determine o raio espectral de $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   (b) Pretende-se resolver o sistema $Ax = b$ pelo método de Jacobi. Que conclusões pode tirar, do resultado de (a), acerca da convergência do método?

   (c) Suponha que ao resolver um sistema do tipo $Cx = f$, pelo método de Gauss-Seidel, resulta, para matriz de iteração, a matriz A. Que pode afirmar sobre a convergência deste método?

6. Considere o sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -1 \\ & & 2y & + & az & = & 0 \\ -x & & & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$, com $a < 0$.

   (a) Determine <u>todos</u> os valores do parâmetro a que garantam a convergência do método de Gauss-Seidel quando aplicado à resolução deste sistema.

   (b) Para $a = -1$ efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

7. Considere o sistema $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Prove que o polinómio característico associado à matriz de iteração do método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior, é $P(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{46}{75}\lambda^2 - \frac{2}{25}\lambda$.

   (b) Localize e separe as raízes de $P(\lambda) = 0$.

   (c) O método de Gauss-Seidel, aplicado ao sistema anterior, é convergente? Justifique.

   (d) Determine a segunda aproximação gerada pelo método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior.

8. Considere o método iterativo $x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 5 & 1/4 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que é convergente.

   (b) Determine a terceira aproximação por este método.

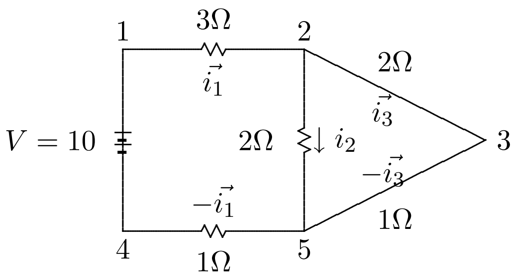
   (c) Calcule o vector para o qual a sucessão de aproximações geradas por este método converge.

9. São precisos três materiais para a produção de três tipos de automóveis, sendo na tabela que segue indicadas as quantidades necessárias, em kilogramas por carro, de cada um desses materiais:

Carro	Plástico	Borracha	Metal
1	40	100	1500
2	33	120	1700
3	42	100	2000

   Considerando que em cada dia há, respectivamente, 2.32, 6.4 e 109 toneladas de plástico, borracha e metal disponíveis, quantos automóveis podem ser produzidos?

10. Considere o seguinte circuito eléctrico



   Por aplicação da lei de Kirchhoff, as intensidades em cada um dos ramos do circuito podem ser determinadas resolvendo o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2i_1 & + & i_2 & & & = & 5 \\ & & 2i_2 & - & 3i_3 & = & 0 \\ i_1 & - & i_2 & - & i_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

   Obtenha uma solução aproximada deste sistema utilizando o método de Gauss-Seidel duas vezes.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2004/2005 Folha 5

1. Determinar o polinómio interpolador $P(x)$, pela fórmula de Lagrange, que passa pelos pontos $(-3,1)$, $(-2,2)$, $(1,-1)$ e $(3,10)$. Calcule depois $P(0)$.

2. Prove que $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$ em que $l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

3. Determine uma aproximação de $\sin(\frac{\pi}{8})$ usando a fórmula interpoladora de Lagrange de grau 2 e 4 no intervalo $[0,\pi]$. Compare os resultados obtidos e indique majorantes do erro.

4. Considere a função $f(x) = 2^x$, $x \in [0,2]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5. Calcule uma aproximação para $\sqrt[3]{2}$ e compare com o valor exacto.

5. Seja $f(x)$ dada pela seguinte tabela

x_i	-2	0	2	4	6
$f(x_i)$	1	2	-1	2	3

   Determine uma aproximação para o valor de $f(-1.5)$ usando:

   (a) o polinómio de Newton das diferenças divididas;

   (b) o polinómio de Newton das diferenças progressivas.

6. Considere a tabela

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$P(x_i)$	3	3.008	3.164	3.216	3.512	4

   Sabendo que é referente a um polinómio de grau 3 e que o valor de $P(0.4)$ vem afectado de um determinado erro:

   (a) determine esse erro;

   (b) corrija a tabela apresentada.

7. Determine uma aproximação de $\sin(\frac{\pi}{8})$ usando o polinómio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo $[0,\pi]$. Indique um estimativa para o erro e compare o resultado com os obtidos no exercicío 3.

8. Determine polinómios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função $f(x) = x^3$ no intervalo [-1, 1].

9. De uma função $f(x)$ conhece-se a tabela

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-12.5	1.5	-1

.

Determine x^* tal que $f(x^*) = 0$.

10. Mostre que o polinómio $P_3(x)$ que toma os valores $P_3(0) = f_0$, $P_3(1) = f_1$, $P_3'(0) = f_0'$ e $P_3'(1) = f_1'$, é dado por

$$P_3(x) = (1-x)^2(1+2x)f_0 + x(1-x)^2 f_0' + x^2(3-2x)f_1 + x^2(x-1)f_1'\,.$$

11. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ em $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. Calcule, posteriormente, uma aproximação para $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4})$ e para $\cos(\frac{\pi}{4})$. Compare com o valor exacto.

12. Determine os polinómios interpoladores de Hermite de grau 3 e 5 para a função $f(x) = \sin(x)$ em $[0, \pi]$. Compare os resultados com os obtidos nos exercícios 3 e 7.

13. Encontre o polinmio interpolador de grau menor ou igual a 3 e <u>derivável</u> em $[0, \pi]$ para a função $f(x) = \sin(x)$, dividindo o intervalo $[0, \pi]$ em 4 subintervalos. Compare os resultados com o exercício anterior.

14. Considere a seguinte tabela referente a uma certa função $f(x)$:

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	1	2.5	25	104.5	289	638.5

(a) Construa o polinómio interpolador de maior grau de $f(x)$ no intervalo $[0\,, 5]$.

(b) Sabendo que $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 3$, construa o polinómio interpolador de Hermite de grau 3 usando os dados da tabela que necessite.

(c) Recorrendo aos três primeiros valores da tabela, obtenha o valor de x^* tal que $f(x^*) = 10$.

15. Construa o polinómio interpolador de uma função $f(x)$ para o suporte $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 10$, $f''(1) = 40$.

16. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [1, 6]$ e calcule:

(a) O polinómio interpolador de grau 5 em $[1, 6]$ utilizando pontos igualmente distanciados.

(b) O polinómio interpolador segmentado de grau 2 em $[1, 5]$ (com dois subintervalos e pontos igualmente distanciados) e o polinómio interpolador de grau 1 no intervalo $[5, 6]$.

(c) O polinómio interpolador segmentado de grau 1 dividindo $[1, 6]$ em 5 subintervalos.

(d) O polinómio interpolador de Hermite em $[1, 6]$ nos pontos $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 6$.

(e) O polinómio interpolador segmentado de Hermite de grau 3 em $[1, 6]$, considerando dois subintervalos.

(f) O polinómio de Taylor de ordem 5 desenvolvido em torno de $a = 1$.

(g) Esboçe os gráficos das funções calculadas e comente os resultados obtidos.

17. Construa o polinómio interpolador bi-quadrático de $f(x, y) = y\cos(x^2)$ em $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2004/2005 Folha 6

1. É dada a seguinte tabela de valores de uma certa função v

t_i	0	60	120	180	240	300
$v(t_i)$	0.0000	0.0824	0.2747	0.6502	1.3851	3.229

   (a) Determine uma aproximação para $v'(180)$ usando:

      i. Diferenças progressivas; ii. Diferenças regressivas; iii. Diferenças centradas.

   (b) Como poderia proceder para determinar uma aproximação para $v'(300)$? Justifique.

2. É dada a seguinte tabela de valores de uma certa função f

x_i	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
$f(x_i)$	0.0	0.6	1.0	1.2	1.3

   (a) Determine aproximações para $f'(3.3)$ usando interpolação linear e interpolação quadrática.

   (b) Determine aproximações para $f'(3.1)$ e $f'(3.5)$ usando interpolação linear.

   (c) Determine o polinómio interpolador de Hermite de f no suporte $\{3.1, 3.5\}$.

3. A distância percorrrida em metros por um foguete em cada segundo apresenta os seguites valores

t	0	1	2	3	4	5
y	0	2.5	7.8	18.2	51.9	50.3

   Use diferenciação numérica para aproximar a velocidade e a aceleração do foguete em cada momento.

4. A taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante, respectivamente, (em graus Celsius), e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Se uma esfera de metal aquecida a 90^oC é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 20^o$C, a temperatura da esfera toma os seguintes valores

Tempo (min.)	0	5	10	15	20	25
Temperatura (C)	90	62.5	45.8	35.6	29.5	25.8

   Use diferenciação numérica para aproximar $\frac{dT}{dt}$ em cada momento.

5. Determine valores aproximados para $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$, usando a regra dos trapézios e a regra de Simpson. Indique um limite superior para o erro cometido em cada um dos casos.

6. Seja $I = \int_{-2}^{-1} xe^{2x}\, dx$.

   (a) Qual o menor número de pontos que deve considerar em $[-2,-1]$ por forma a que o erro cometido no cálculo aproximado do integral dado não exceda 0.5×10^{-3}, quando se utiliza a regra dos trapézios?

   (b) Calcule o valor aproximado de I de acordo com a alínea anterior.

   (c) Repita as alíneas anteriores usando, agora, a regra de Simpson.

7. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.00	0.83	0.71	0.62	0.36	0.30

.

   (a) Será possível calcular um valor aproximado para o integral $I = \int_0^1 f(x)\, dx$, usando a regra de Simpson ou a regra dos trapézios, através da tabela, com um erro que não exceda 10^{-3}? Justifique a sua resposta.

   (b) Calcule um valor aproximado de I e indique uma estimativa para o erro cometido.

8. Pretende-se calcular um valor aproximado para o integral $I = \int_1^2 \ln \frac{1}{x}\, dx$.

   (a) Use a regra de Simpson para obter I com 3 casas decimais de precisão.

   (b) Sem calcular o valor exacto de I diga, justificando, se a aproximação calculada é por defeito ou por excesso.

9. Determine o comprimento aproximado do arco do gráfico da função $f(x) = x^3 - x$, entre os pontos $(-1, 0)$ e $(2, 6)$, usando a regra dos trapézios composta, com quatro subintervalos.

10. Considere a função $f(x) = e^x + 2x$.

   (a) Calcule uma aproximação para a raiz de $f(x)$ aplicando o método de Newton-Raphson duas vezes.

   (b) Utilizando a regra de Simpson aproxime, com um erro não superior a 10^{-6}, a área da região limitada por $y \leq e^x$, $y \geq -2x$ e $x \leq 0$.

11. A quantidade de massa que entra ou é libertada por um reactor num dado período de tempo é dada por $M = \int_{t_1}^{t_2} Qc\, dt$ onde t_1 e t_2 são os momentos inicial e terminal, respectivamente. Usando integração numérica determine M para $Q = 5\text{m}^3/\text{min}$ e os dados da tabela:

t (min.)	0	10	20	30	40	50
c (mg/m^3)	10.00	35.00	54.73	52.16	37.07	34.06