Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano lectivo 2004/2005 — Resumo dos miniTestes

Teoría de erros e Raízes de equações não lineares

1. Uma aproximação $\bar{x}$ tem n casas decimais de precisão se e só se ___________________.

2. Para garantir duas casas decimais de precisão no valor de $f(\bar{x})$, a fórmula de propagação do erro indica que $|\Delta\bar{x}| \leq 3,14 \times 10^{-2}$. Quantas casas decimais de precisão deve garantir no valor de $\bar{x}$?

3. Suponha que são válidas as condições de convergência do método de Newton para a equação $f(x) = 0$, no intervalo $[1, 2]$. Diga se é possível obter a seguinte sequência de valores com este método:

$$x_0 = 1; x_1 = 2.5; x_2 = 1.41; x_3 = 1.45; x_4 = 1.4142; x_5 = 1.4143$$

   Justifique suscintamente.

4. Defina ordem de convergência de um método iterativo $x_{n+1} = g(x_n), n \geq 0$.

5. Uma aproximação $\bar{x}$ tem n algarismos significativos de precisão se e só se ______________.

6. Para garantir duas casas decimais de precisão no valor de $f(\bar{x})$, a fórmula de propagação do erro indica que $|\Delta\bar{x}| \leq 1,59 \times 10^{-4}$. Quantas casas decimais de precisão deve garantir no valor de $\bar{x}$?

7. Defina ponto fixo de uma função g em $[a, b]$.

8. Suponha que são válidas as condições de convergência do método do ponto fixo para a equação $x = g(x)$ no intervalo $[1, 2]$. Diga se é possível obter a seguinte sequência de valores com este método:

$$x_0 = 1; x_1 = 2.0; x_2 = 1.5; x_3 = 1.75; x_4 = 1.65; x_5 = 1.7$$

   Justifique suscintamente.
   (**NOTA**: Em caso afirmativo, indique que condição tem de ser verificada para que tal aconteça. Em caso negativo, indique a razão pela qual não é possível obter esta sequência de valores pelo método do ponto fixo).

9. Seja $\bar{x} = 0.031$ uma aproximação obtida por truncatura do valor exacto x (desconhecido). Indique um majorante para o erro relativo dessa aproximação.

10. Seja $R_n(x; a)$ o resto do polinómio de Taylor de ordem n para uma função f. O que pode afirmar sobre o grau de $R_n(x; a)$?

11. Seja α a única raiz de $f(x) = 0$ em $[a, b]$. Admita-se que se verificam as condições de convergência para o método de Newton e que $\frac{\max\{|f''(x)|:x\in[a,b]\}}{2\min\{|f'(x)|:x\in[a,b]\}} = 1$. Se for possível garantir k casas decimais de precisão na aproximação x_n, quantas casas decimais de precisão poderão ser garantidas na aproximação x_{n+1}?

12. Suponha que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Complete a seguinte frase:
"Os zeros de f correspondem ________________________________ de g."

13. Seja $\bar{y}$ e $\bar{z}$ aproximações do valor exacto x obtidas por arredondamento e truncatura, respectivamente, com o mesmo número de casas decimais. Pode garantir que $|\Delta\bar{y}| < |\Delta\bar{z}|$. Justifique suscintamente.

14. Seja $P_n(x; a)$ o polinómio de Taylor de ordem n para uma função f. O que pode afirmar sobre o grau de $P_n(x; a)$?

15. Seja α a única raiz de $f(x) = 0$ e admita-se que se verificam as condições de convergência para o método da bissecção. Se for possível garantir k casas decimais de precisão na aproximação x_n, quantas casas decimais de precisão poderão ser garantidas na aproximação x_{n+1}?

16. Suponha que $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Complete a seguinte frase:
"As raízes de $f(x) = 0$ correspondem ____________________________________ do gráfico de $y = f_1(x)$ com $y = f_2(x)$."

17. Seja $\bar{x} = 0.0031$ uma aproximação obtida por arredondamento do valor exacto x (desconhecido). Indique um majorante para o erro absoluto dessa aproximação.

18. A fórmula de propagação dos erros permite resolver um problema denominado por *problema directo*. Este consiste em majorar ______________ conhecendo o majorante de ______________.

19. Justifique suscintamente se é possível obter a seguinte sequência de valores com o método do ponto fixo:

$$x_0 = 12; x_1 = 11; x_2 = 11.5; x_3 = 11; x_4 = 11.25; x_5 = 11; x_6 = 11.125$$

20. Interprete graficamente a aproximação x_{n+1} obtida pelo método de Newton a partir de uma aproximação x_n.

21. Seja $\bar{x} = 0.031$ uma aproximação obtida por arredondamento do valor exacto x (desconhecido). Indique um majorante para o erro relativo dessa aproximação.

22. A fórmula de propagação dos erros permite resolver um problema denominado por *problema inverso*. Este consiste em majorar ______________ conhecendo o majorante de ______________.

23. Justifique suscintamente se é possível obter a seguinte sequência de valores com o método do ponto fixo:

$$x_0 = 12; x_1 = 11; x_2 = 11; x_3 = 11.5; x_4 = 11.25; x_5 = 11.125$$

24. Descreva resumidamente em que consiste o método da bissecção.

25. Seja $\bar{x} = 0.31$ uma aproximação obtida por truncatura do valor exacto x (desconhecido). Indique um majorante para o erro absoluto dessa aproximação.

26. Com uma determinada aproximação $\bar{x}$ foi possível garantir que $|\Delta f(\bar{x})| \leq 2,17 \times 10^{-6}$. Quantas casas decimais de precisão pode garantir no valor de $f(\bar{x})$?

27. Indique três critérios de paragem para os métodos iterativos que aproximem a solução de $f(x) = 0$.

28. Suponha que, para o método iterativo $x_{n+1} = g_1(x_n), n \geq 0$, verifica-se $e_{n+1} \leq 10e_n^4$ e que para o método iterativo $x_{n+1} = g_2(x_n), n \geq 0$, verifica-se $e_{n+1} \leq e_n^2$. Qual dos dois método converge mais rápidamente para a raiz? Justifique suscintamente.

Zeros de polinómios

1. Seja P um polinómio de grau 5 com coeficientes reais e considere o seguinte quadro de Fourier:

x	0	1	2
$P(x)$	+	0	+
$P'(x)$	-	0	0
$P''(x)$	+	+	0
$P'''(x)$	+	-	+
$P^{iv}(x)$	-	0	+
$P^{v}(x)$	+	+	+

Justificando suscintamente, diga o que pode afirmar sobre:

(a) $x = 1$ e $x = 2$?

(b) o número de raízes positivas de $P(x) = 0$?

(c) o número de raízes negativas de $P(x) = 0$?

(d) o número de raízes complexas de $P(x) = 0$?

2. Seja P um polinómio de grau 5 com coeficientes reais e considere o seguinte quadro de Fourier:

x	0	1	2
$P(x)$	+	0	+
$P'(x)$	-	+	0
$P''(x)$	+	0	0
$P'''(x)$	+	-	+
$P^{iv}(x)$	-	0	+
$P^{v}(x)$	+	+	+

Justificando suscintamente, diga o que pode afirmar sobre:

(a) $x = 1$ e $x = 2$?

(b) o número de raízes positivas de $P(x) = 0$?

(c) o número de raízes negativas de $P(x) = 0$?

(d) o número de raízes complexas de $P(x) = 0$?

3. Seja P um polinómio de grau 5 com coeficientes reais e considere o seguinte quadro de Fourier:

x	0	1	2
$P(x)$	+	+	0
$P'(x)$	-	0	0
$P''(x)$	+	0	+
$P'''(x)$	+	-	+
$P^{iv}(x)$	-	0	+
$P^{v}(x)$	+	+	+

Justificando suscintamente, diga o que pode afirmar sobre:

(a) $x = 1$ e $x = 2$?

(b) o número de raízes positivas de $P(x) = 0$?

(c) o número de raízes negativas de $P(x) = 0$?

(d) o número de raízes complexas de $P(x) = 0$?

4. Seja $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.

(a) Determine os raios da coroa circular que contém todas as raízes da equação $P(x) = 0$.

(b) Utilizando a regra de sinal de Descartes, o que pode afirmar sobre o número de raízes reais de $P(x) = 0$?

(c) Utilizando o teorema de Hunt, o que pode afirmar sobre o número de raízes reais complexas de $P(x) = 0$?

(d) Com base nas alíneas anteriores, localize as raízes reais de $P(x) = 0$.

5. Seja $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 3$.

(a) Determine os raios da coroa circular que contém todas as raízes da equação $P(x) = 0$.

(b) Utilizando a regra de sinal de Descartes, o que pode afirmar sobre o número de raízes reais de $P(x) = 0$?

(c) Utilizando o teorema de Hunt, o que pode afirmar sobre o número de raízes reais complexas de $P(x) = 0$?

(d) Com base nas alíneas anteriores, localize as raízes reais de $P(x) = 0$.

6. Seja P um polinómio de grau n e $Q(x) = 2P(-x)$. Qual a relação que existe entre as raízes de $Q(x) = 0$ e de $P(x) = 0$.

7. Seja $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k, k \in \mathbb{R}$.

(a) Utilizando a regra de sinal de Descartes, estabeleça uma condição para k que garanta a existência de raízes reais positivas.

(b) Utilizando a regra de sinal de Descartes, estabeleça uma condição para k que garanta a existência de raízes reais negativas.

(c) Utilizando o teorema de Hunt, estabeleça uma condição para k que garanta a existência de raízes complexas.

8. Seja $P(x) = x^3 - 2x^2 - kx - 3, k \in \mathbb{R}$.

   (a) Utilizando a regra de sinal de Descartes, estabeleça uma condição para k que garanta a existência de raízes reais positivas.

   (b) Utilizando a regra de sinal de Descartes, estabeleça uma condição para k que garanta a existência de raízes reais negativas.

   (c) Utilizando o teorema de Hunt, estabeleça uma condição para k que garanta a existência de raízes complexas.

Sistemas de equações lineares

1. Suponha que ao aplicar o método de eliminação de Gauss, consegue factorizar A na forma $A = LU$ (L matriz triangular inferior e U matriz triangular superior). Indique um par de sistemas obtido com a factorização anterior cuja resolução é equivalente à resolução de $Ax = b$.

2. Indique uma condição necessária e suficiente para que o sistema $Ax = b$ tenha uma única solução.

3. Seja $||.||$ uma norma de matrizes induzida por uma norma vectorial. Relacione $||AB||$ com $||A||$ e $||B||$.

4. Suponha que é possível reescrever o sistema $Ax = b$ na forma $x = Mx + c$ onde
$$M = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} e \\ \ln(2) \\ -5 \end{bmatrix}.$$
O que pode afirmar sobre a convergência deste método iterativo?

5. Indique dois métodos directos para a resolução de sistemas de equações lineares.

6. Indique dois critérios de paragem para os métodos iterativos que aproximem a solução de um sistema de equações lineares $Ax = b$.

7. Seja $||.||$ uma norma de matrizes induzida por uma norma vectorial. Relacione $||Ax||$ com $||A||$ e $||x||$.

8. Considere o sistema $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix}$. O que pode afirmar sobre a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel, quando aplicados ao sistema $Ax = b$?

9. Suponha que o sistema $Ax = b$ foi reescrito na forma $A'x' = b'$, onde A' obtém-se de A trocando a linha i com a linha j. Indique as restantes alterações que devem ser realizadas para assegurar a equivalência dos sistemas $Ax = b$ e $A'x' = b'$.

10. Na matriz de iteração do método de Jacobi existem elementos que são sempre nulos. Em que posição se encontram?

11. Seja $||.||$ uma norma de matrizes. Relacione $||A + B||$ com $||A||$ e $||B||$.

12. Suponha que é possível reescrever o sistema $Ax = b$ na forma $x = Mx + c$ onde $M = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \pi \end{bmatrix}$. O que pode afirmar sobre a convergência deste método iterativo?

13. Suponha que o sistema $Ax = b$ foi reescrito na forma $A'x' = b'$, onde A' obtém-se de A trocando a coluna i com a coluna j. Indique as restantes alterações que devem ser realizadas para assegurar a equivalência dos sistemas $Ax = b$ e $A'x' = b'$.

14. Na matriz de iteração do método de Gauss-Seidel existem elementos que são sempre nulos. Em que posição se encontram?

15. Seja $||.||$ uma norma de vectores. Relacione $||x + y||$ com $||x||$ e $||y||$.

16. Suponha que é possível reescrever o sistema $Ax = b$ na forma $x = Mx + c$ onde $M = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. O que pode afirmar sobre a convergência deste método iterativo?

Interpolação polinomial

1. Considere a seguinte tabela $\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 4 & 9 \\ \hline f(x_i) & 1 & 2 & 3 \end{array}$. Verifique se $P(x) = x^{0.5}$ é o polinómio interpolador de f nos pontos indicados nessa tabela.

2. Determine o polinómio interpolador de f nos pontos indicados na seguinte tabela:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0	0	1	0	0

3. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos no intervalo $[a, b]$. Indique em que condições o polinómio obtido pela fórmula interpoladora de Lagrange é diferente do polinómio obtido pela fórmula interpoladora de Newton.

4. Admita-se que f é uma função real de variável real, com derivada de ordem $n+1$ contínua em $[a, b]$ e seja $P_n(x)$ o polinómio interpolador de f em $n+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$. Indique dois majorantes para o erro de interpolação $|f(x) - P_n(x)|$.

5. Considere a seguinte tabela $\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x_i) & 1 & 2 & 4 \end{array}$. Verifique se $P(x) = 2^x$ é o polinómio interpolador de f nos pontos indicados nessa tabela.

6. Determine o polinómio interpolador de f nos pontos indicados na seguinte tabela:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0	0	1	0	0

7. Indique um conjunto de pontos $(x_i, f(x_i))$ por forma a que o polinómio interpolador de f nesses pontos seja $P(x) = x^3$.

8. Admita-se que f é uma função real de variável real infinitamente derivável, e que existe $M > 0$ tal que $|f^{(k)}(x)| < M, \forall x \in [a, b], \forall k \in \mathbb{N}_0$. Suponha que pretende determinar um polinómio interpolador $P_n(x)$ de f que garanta $|f(x) - P_n(x)| \leq 0.5 \times 10^{-2}, \forall x \in [a, b]$. Indique que fórmula utilizaria para calcular o número mínimo de pontos de interpolação para que a condição sobre o erro de interpolação seja verificada.

9. Considere a seguinte tabela

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	1	1/4	1/9

. Verifique se $P(x) = \frac{1}{x^2}$ é o polinómio interpolador de f nos pontos indicados nessa tabela.

10. Determine o polinómio interpolador de f nos pontos indicados na seguinte tabela:

x_i	-4	-2	0	2	4
$f(x_i)$	0	0	0	0	1

11. Sejam $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$, $k+1$ pontos distintos no intervalo $[a, b]$ verificando $x_{\ell+1} - x_\ell = h, \forall \ell \in \{i, \ldots, i+k-1\}$. Indique uma relação entre a diferença dividida de ordem k e a diferença progressiva de ordem k nesses pontos.

12. Admita-se que f é um polinómio de grau n e considerem-se $k+1$ pontos distintos $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$. Indique o valor de $f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ para todo o $k > n$.

13. Considere a seguinte tabela

x_i	0	1	8
$f(x_i)$	0	1	2

. Verifique se $P(x) = x^{1/3}$ é o polinómio interpolador de f nos pontos indicados nessa tabela.

14. Determine o polinómio interpolador de f nos pontos indicados na seguinte tabela:

x_i	-4	-2	0	2	4
$f(x_i)$	0	0	0	0	1

15. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos no intervalo $[a, b]$. Denote-se por $P_{n-1}(x)$ e $P_n(x)$, respectivamente, os polinómios interpoladores de f nos conjuntos de pontos $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ e $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Escreva uma relação entre os polinómios $P_{n-1}(x)$ e $P_n(x)$.

16. Admita-se que f é um polinómio de grau n e que os pontos $x_i, \ldots, x_{i+k}$ verificam $x_{\ell+1} - x_\ell = h, \forall \ell \in \{i, \ldots, i+k-1\}$, com $h > 0$. Indique o valor de $\Delta^k f(x_i)$ para todo o $k > n$.