Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Optimização Discreta

(Licenciatura em Matemática)

19 de Julho de 2005 Duração: 2h30m

---

1. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ um grafo não dirigido onde $\mathcal{N}$ é o conjunto de nós e $\mathcal{A}$ é o conjunto de arestas. Admita-se ainda que $\mathcal{M}$ é um emparelhamento.

   (a) Defina vértice $\mathcal{M}$-exposto, caminho $\mathcal{M}$-incremental e *blossom*.

   (b) Prove que $\mathcal{M}$ é um emparelhamento máximo se e só se não existem caminhos $\mathcal{M}$-incrementais.

   (c) Seja $i \in \mathcal{N}$ um vértice do grafo. Admita-se que o custo $c_{i,j}$ de todos os arcos incidentes em i é modificado para $c_{i,j} + \alpha$. Prove que a solução óptima do problema do emparelhamento perfeito de peso máximo não se altera.

   (d) O resultado anterior ainda é válido se o emparelhamento não for perfeito? Justifique.

   (e) A prova de natação 3×100m envolve três nadadores, que sucessivamente devem nadar 100 metros de costas, bruços e mariposa. Um treinador dispoẽ de três nadadores cujos tempos (em segundos), em cada um dos estilos, são dados no quadro seguinte:

	Estilo		
Nadador	costas	bruços	mariposa
1	65	73	63
2	67	70	65
3	68	72	69

   Utilize o método Húngaro para determinar a afectação que minimiza o tempo total.

2. Considere o problema da mochila (de capacidade 7), descrcita pela seguinte tabela:

Objecto	1	2	3
valor (c_i)	2	4	5
volume (w_i)	3	3	5

   (a) Formule-o como um problema de programação inteira.

   (b) Resolva a relaxação linear do problema anterior utilizando o método *Simplex*.

   (c) Descreva uma heurística para este problema e indique uma solução obtida por esse processo.

   (d) Resolva o problema pelo método de *Branch & Bound*.

3. Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ um poliedro.

   (a) Defina sistema de desigualdades totalmente dual inteiro.

   (b) Prove que se "$Ax \leq b$" é um sistema de desigualdades totalmente dual inteiro, com A racional e b inteiro, então P é um poliedro inteiro.

v.s.f.f.

4. Seja P um poliedro em $\mathbb{R}^n$ e X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Defina involucro convexo de X, desigualdade válida para P, face de P e poliedro inteiro.

   (b) Considere o poliedro $Q = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$. Determine o conjunto $polar(Q)$.

   (c) Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ um poliedro e admita-se que $F \subseteq P$ é não vazio. Prove que se F é uma face de P, existe um subsistema $A'x \leq b'$ de $Ax \leq b$ tal que $F = \{x \in P : A'x = b'\}$.

   (d) Verifique, utilizando o método de eliminação de Fourier-Motzin, se o seguinte sistema de desigualdades tem solução: $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2x_3 \\ x_1 \geq x_2 + x_3 \\ 2x_3 \geq 3 \end{cases}$

5. Considere o problema da mochila descrito no exercício 2.

   (a) Indique uma relaxação Lagrangeana do problema, justificando a sua escolha para a "restrição difícil".

   (b) Determine a solução óptima da relaxação Lagrangeana para a penalização $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$.

   (c) Seja S o conjunto das duas soluções obtidas na alínea anterior. Determine a solução óptima do sub-problema dos multiplicadores de Lagrange $\min\{Z_{LR}^S(\lambda) : \lambda \geq 0\}$, onde $Z_{LR}^S(\lambda) = \max\{cx + \lambda(b' - A'x) : x \in S\}$ onde $A'x \leq b'$ é a restrição difícil indicada em 5.(a).

   (d) Resolva o problema dos multiplicadores de Lagrange $\min\{Z_{LR}(\lambda) : \lambda \geq 0\}$, onde $Z_{LR}(\lambda) = \max\{cx + \lambda(b' - A'x) : A''x \leq b''\}$, onde $A''x \leq b''$ são as restrições de $Ax \leq b$ que não aparecem em $A'x \leq b'$.

   (e) Indique uma aproximação para o subgradiente da função $Z_{LR}(\lambda)$ caso pretende-se aplicar o método de subgradiente.

<u>cotação</u>

1 - 5 valores, **2** - 4 valores, **3** - 2 valores
4 - 4 valores, **5** - 5 valores

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Optimização Discreta

(Licenciatura em Matemática)

29 de Junho de 2005 Duração: 2h30m

---

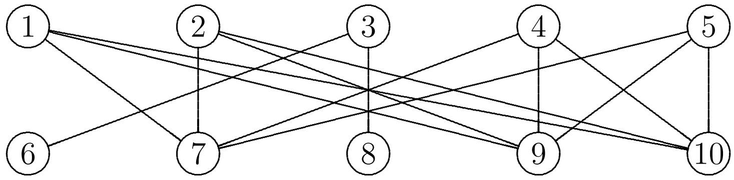
1. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ um grafo não dirigido onde $\mathcal{N}$ é o conjunto de nós e $\mathcal{A}$ é o conjunto de arestas.

   (a) Defina emparelhamento, emparelhamento maximal, emparelhamento de máxima cardinalidade, emparelhamento perfeito e emparelhamento de peso máximo.

   (b) Apresente um exemplo onde o emparelhamento de peso máximo seja diferente do emparelhamento perfeito de peso máximo.

   (c) Prove que, determinar um emparelhamento de peso máximo em $\mathcal{G}$ é equivalente a determinar um emparelhamento perfeito de peso máximo num grafo valorado.

   (d) Considere o o seguinte grafo



      i. Determine um emparelhamento maximal em $\mathcal{G}$.

      ii. Determine um emparelhamento de máxima cardinalidade em $\mathcal{G}$.

      iii. Determine uma cobertura por nós de cardinalidade mínima.

2. Seja $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Caracterize algebricamente a independência linear e afim dos vectores de V.

   (b) Indique um conjunto de vectores que seja independente afim, mas que não seja independente linear.

   (c) Seja f uma função linear em $\mathbb{R}$ e $P = conv(V)$ um poliedro. Prove que

$$min\{f(x) : x \in conv(V)\} \;=\; min\{f(x) : x \in V\}.$$

   (d) Mostre que P se pode escrever na forma $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ e descreva um processo para obter a matriz A e o vector b.

3. Considere o problema $\max\{2x + y : 2x + 2y \leq 13, 10x - 6y \leq 1, y \leq 5, \;\; x, y \in \mathbb{N}_0\}$.

   (a) Resolva a relaxação linear do problema apresentado utilizando o método *Simplex*.

   (b) Determine um corte de Gomory para o problema anterior. Para optimizar a relaxação linear do problema anterior com esta nova restrição adicional, que método utilizaria. Justifique.

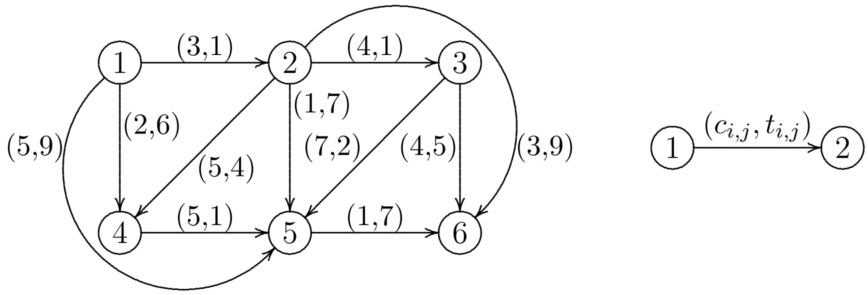
   (c) Determine uma solução inteira admissível para o problema (não necessariamente óptima).

   (d) Resolva o problema pelo método de *Branch & Bound*. (NOTA: pode resolver graficamente os programas lineares resultantes nesta alínea).

v.s.f.f.

4. Seja A uma matriz de incidência vértice-arco de um grafo dirigido $\mathcal{G}$. Prove que A é totalmente unimodular.

5. Considere o problema do trajecto, entre os vértices 1 e 6, de menor custo com restrição de tempo de $T = 10$ unidades no seguinte grafo



(a) Considere o custo penalizado $c^{\lambda}_{i,j} = c_{i,j} + \lambda t_{i,j}$. Prove que, se p^* é um trajecto de menor custo para c^{λ} e $c^{\lambda}(p^*) = c(p^*) + \lambda T$, então p^* é o trajecto óptimo do problema com restrição.

(b) Determine o trajecto de menor custo sem restrição (p_1) e o de menor tempo (p_2).

(c) Considere $S = \{p_1, p_2\}$. Escreva o sub-problema dos multiplicadores de Lagrange $\max\{Z^S_{LR}(\lambda) : \lambda \geq 0\}$, onde $Z^S_{LR}(\lambda) = \min\{cx + \lambda(tx - T) : x \in S\}$ como um problema de programação linear.

(d) Determine a solução óptima λ^* de $\max\{Z^S_{LR}(\lambda) : \lambda \geq 0\}$ utilizando o método *Simplex.*

(e) Determine o trajecto de menor custo para o custo penalizado obtido com o valor de λ^* calculado na alínea anterior. Este trajecto é óptimo para o problema inicial? Justifique.

---

cotação

1 - 6 valores, **2** - 4 valores, **3** - 4 valores
4 - 1 valores, **5** - 5 valores