Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Matemática I - Época Normal

4 Janeiro, 2006 Duração: 3 horas

1. Considere a função definida por

$$f : x \to \frac{\arcsin(\frac{x}{\pi})}{1-\cos x}$$

(a) Determine o domínio de f, estude a continuidade de f e determine, se possível, um prolongamento de f por continuidade.

(b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = \frac{\pi}{2}$.

(Nota: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.**)**

2. Determine a área da região plana definida pelas seguintes desigualdades

$$y + x \geq 2, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad y - x^2 \leq 0.$$

3. Considere a função

$$f : x \to \int_0^x \frac{1}{(t^2+2t+2)\sqrt{\operatorname{arctg}(t+1)}}\mathrm{dt}$$

(a) Determine o domínio e estude a monotonia de f.

(b) Calcule $f(1)$.

4. Qual é a área máxima de um rectângulo limitado por um fio de arame de comprimento 4 metros?

5. (a) Enuncie o Teorema de Taylor com $n = 1$.

(b) Enuncie o Teorema da Média.

(c) Mostre que se f é uma função contínua , não positiva e não identicamente nula em [a,b], então

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} < 0.$$

(d) Mostre que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\arccos x}\mathrm{dx} < 0.$

v.s.f.f.

6. (a) Diga quando é que uma função é estritamente côncava num intervalo.

(b) Mostre que se f é uma função estritamente côncava num intervalo I, então f tem um e um só máximo global em $x_0 \in I$ se e só se f tem um máximo local em x_0.

(c) Determime o máximo global de

$$f : x \to \int_{\log x}^{1} te^t \mathrm{dt}$$

e mostre que

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq 1.$$

Cotações

1	3.5	(2.0+1.5)
2	3.5	
3	3.5	(1.5+2.0)
4	2.5	
5	3.5	(0.25+0.25+1.5+1.5)
6	3.5	(0.25+1.75+1.5)