

1. Considere a função definida por

$$f : x \rightarrow x \log x^2 + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(a) Estude a continuidade de  $f$  e determine, caso exista, um prolongamento por continuidade.

(b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $x = 1$ .

(Nota  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ )

2. Calcule a área da região plana definida pelas seguintes desigualdades

$$y \leq x^2, \quad y \geq \frac{x^2}{2}, \quad y \leq 2x.$$

3. Considere a função

$$g : x \rightarrow \int_0^x \frac{1 - 2 \sin^2 t}{\cos t} dt$$

(a) Determine o domínio e estude a monotonia de  $g$ .

(b) Calcule  $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

4. Um fabricante vende 1000 televisores por semana a 460 euros cada. Uma pesquisa de mercado indica que um desconto de 10 euros na venda de cada televisor provoca um aumento nas vendas de 100 unidades por semana. Qual deve ser o desconto oferecido pelo fabricante de modo a maximizar o seu rendimento com a venda dos televisores?

5. (a) Enuncie o Teorema de Rolle.

(b) Mostre que se  $f$  e  $g$  são duas funções diferenciáveis num intervalo  $[a, b]$ ,  $g(a) \neq g(b)$  e a derivada de  $g$  não se anula em  $]a, b[$ , então existe pelo menos um  $c \in ]a, b[$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(c) Mostre que

$$\forall x > 0 \quad \arg \operatorname{sh} x > \operatorname{arctg} x.$$

6. (a) Enuncie o Teorema de Weierstrass.

(b) Mostre que se  $f$  é uma função contínua num intervalo  $]a, b[$  e se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$$

então  $f$  tem um máximo global em  $]a, b[$ .

(c) Determine o máximo global da função

$$f : x \rightarrow \log[x(1 - x)]$$

e mostre que o gráfico de  $f$  não intersecta o eixo dos  $xx$ .

#### Cotações

1	3.5	(2.0+1.5)
2	3.0	
3	4.0	(2.0+2.0)
4	2.5	
5	3.5	(0.25+1.75+1.5)
6	3.5	(0.25+1.75+1.5)