**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**

*Exame de Optimização Numérica*

Licenciatura em Matemática

9 de Fevereiro de 2007 — 1a parte — Duração: 2h15m

---

1. (a) Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina conjunto ($S$) convexo e função ($f$) convexa.

   (b) Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, funções convexas em $\mathbb{R}^n$. Mostre que a função definida por $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ é convexa em $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Mostre que o método de Newton é invariante ao escalonamento de $f$, ou seja, que o passo de Newton não se altera quando se substitui $f(x)$ por $\lambda f(x)$, com $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

   (b) Mostre que a condição de Armijo também é invariante ao escalonamento de $f$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x_k) \neq 0$, $\delta_k \in \mathbb{R}^+$ e $H_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva.

   (a) Considere a função $\phi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^\mathsf{T} p$. Determine a solução óptima do problema $\min\{\phi_k(p) : ||p|| \leq \delta_k\}$.

   (b) Considere o vector $\bar{p} = -\frac{\delta_k}{||\nabla f(x_k)||}\nabla f(x_k)$ e a função $\psi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi_k(\tau) = f(x_k) + \tau \nabla f(x_k)^\mathsf{T}\bar{p} + \frac{\tau^2}{2}\bar{p}^\mathsf{T} H_k \bar{p}$. Determine a solução óptima do problema $\min\{\psi_k(\tau) : ||\tau\bar{p}|| \leq \delta_k\}$.

4. Determine a solução óptima do problema
$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \text{ sujeita a } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n \text{ e } x_i > 0,\ i = 1, \dots, n.$$

5. (a) Descreva, resumidamente, o método da barreira logarítmica para aproximar a solução do problema $\min\{f(x) : g(x) \leq 0\}$, onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são funções não lineares continuamente diferenciáveis.

   (b) Considere o problema de optimização não linear
$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) = 2x + 3y \\ \text{s. a} & 2x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}$$

   i. Determine a solução óptima deste problema através das condições de optimizalidade.

   ii. Caracterize a trajectória $x(\mu)$ e $\lambda(\mu)$, com $\mu$ um parmetro positivo, para o método de barreira logarítmica.

   iii. Mostre que quando $\mu$ tende para 0 se obtêm a solução do problema e o vector de multiplicadores de Lagrange que lhe está associado.

| Cotação |
|---|
| **1** - 2 valores; **2** - 2 valores; **3** - 3 valores; **4** - 2 valores; **5** - 4 valores |

**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**

*Exame de Optimização Numérica*

Licenciatura em Matemática

9 de Fevereiro de 2007 | 2a parte | Duração: 0h45m

---

A questão 6 substitui os TPC's

6. Considere o programa não linear com restrições: $\min\{f(x) = x_1^2 + x_2^2 : x_1 + x_2 = 1\}$

   (a) Encontre, graficamente, a solução do problema e confirme que encontrou a solução óptima através das condições de optimalidade.

   (b) Deduza uma expressão para os pontos estacionários da função (de penalização quadrática) $\pi(x,\rho) = f(x) + \frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x)$ e para os multiplicadores de Lagrange associados.

   (c) Determine agora uma expressão para os pontos estacionários da função (de Lagrange aumentada) $\mathcal{A}(x,\lambda,\rho) = f(x) - \lambda^T g(x) + \frac{\rho}{2} g(x)^T g(x)$.

A questão 7 substitui o projecto

7. (a) Considere um conjunto de pontos $P = \{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$. Formule o problema onde se pretende determinar a recta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias desses pontos à recta procurada. (este problema é conhecido como os *mínimos quadrados ortogonais*)

   (b) Considere um seguintes conjuntos de pontos $P = \{(x_1^P, y_1^P),\ldots,(x_n^P, y_n^P)\}$, $Q = \{(x_1^Q, y_1^Q),\ldots,(x_m^Q, y_m^Q)\}$, $U = \{(x_1^U, y_1^U),\ldots,(x_k^U, y_k^U)\}$ e $V = \{(x_1^V, y_1^V),\ldots,(x_\ell^V, y_\ell^V)\}$. Formule o problema onde se pretende determinar o rectângulo que minimiza a soma dos quadrados das distâncias desses pontos ao rectângulo procurado.

   (c) Escreva um programa em matLab para resolver o problema da alínea anterior. Nota: admita que os pontos estão armazenados em vectores $xP$, $yP$, $xQ$, $yQ$, $xU$, $yU$, $xV$ e $yV$ de dimensões adequadas.

Formulário

x = fminunc(fun,x0,options)

x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)

Cotação

**6** - 3 valores; **7** - 4 valores;

**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**

*Exame de Optimização Numérica*

Licenciatura em Matemática

19 de Janeiro de 2007 | 1a parte | Duração: 2h15m

---

1. (a) Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina conjunto ($S$) convexo e função ($f$) convexa.

   (b) Sejam $g_i$, $1 \leq i \leq k$, funções convexas num conjunto convexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Prove que $S = \{x \in D : g_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq k\}$ é um conjunto convexo.

2. Considere a aplicação de um método de direcções de descida com procura unidireccional exacta para minimizar uma função quadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^\mathsf{T}Qx - c^\mathsf{T}x$, onde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva e $c \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Seja $p_k$ uma direcção de descida para $f$, a partir do ponto $x_k$. Mostre que, neste caso, o passo óptimo é dado por
   $$\alpha_k = -\frac{p_k^\mathsf{T}\nabla f(x_k)}{p_k^\mathsf{T}\nabla^2 f(x_k)p_k}.$$

   (b) Verifique que, utilizando procura unidireccional exacta, $p_k$ é ortogonal a $\nabla f(x_{k+1})$.

   (c) Mostre que o método de Newton determina o minimizante de $f$ em apenas uma iteração, independentemente do ponto inicial considerado.

   (d) Mostre que o passo de Newton satisfaz a condição de Armijo para $0 < \beta < \frac{1}{2}$, a partir de qualquer $x_k \in \mathbb{R}^n$.

   (e) Determine a solução óptima do problema $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 5x_2$, utilizando um método de direcções de descida com procura unidireccional exacta.

   (f) Verifique as condições de optimalidade para a solução encontrada na alínea anterior.

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2x_3$.

   (a) Determine os pontos estacionários de $f$ e verifique se correspondem a minimizantes ou maximizantes de $f$.

   (b) Considere o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$. Determine os pontos estacionários para o problema $min\{f(x) : x \in S\}$ e verifique quais correspondem a minimizantes ou maximizantes de $f$ em $S$.

   (c) Caraterize algebricamente as direcções de descida admissíveis para $f$ em $x \in S$.

   (d) Determine uma base para espaço nulo de $A$, $Nu(A)$.

   (e) Determine uma direcção de descida admissível $p$ para $f$ em $x_0 = [0 \;\; 1 \;\; 2]^\mathsf{T}$.

   (f) Determine uma aproximação para a solução de $min\{f(x) : x \in S\}$ partindo de $x_0$, seguindo a direcção $p$ e utilizando o critério de Armijo ($\beta = 1/2$) para controlar o passo.

| Cotação |
|---|
| **1** - 2 valores; **2** - 5.5 valores; **3** - 5.5 valores; |

**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**

*Exame de Optimização Numérica*

Licenciatura em Matemática

19 de Janeiro de 2007 | 2a parte | Duração: 0h45m

---

A questão 4 substitui os TPC's

4. (a) Descreva, resumidamente, o método da barreira logarítmica para aproximar a solução do problema $\min\{f(x) : g(x) \leq 0\}$, onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são funções não lineares continuamente diferenciáveis.

   (b) Considere o problema de optimização não linear

$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) = 2x + 3y \\ \text{s. a} & 2x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}$$

   i. Determine a solução óptima deste problema através das condições de optimizalidade.

   ii. Caracterize a trajectória $x(\mu)$ e $\lambda(\mu)$, com $\mu$ um parmetro positivo, para o método de barreira logarítmica.

   iii. Mostre que quando $\mu$ tende para 0 se obtêm a solução do problema e o vector de multiplicadores de Lagrange que lhe está associado.

A questão 5 substitui o projecto

5. (a) Considere um conjunto de pontos $P = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$. Formule o problema onde se pretende determinar a recta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias desses pontos à recta procurada. (este problema é conhecido como os *mínimos quadrados ortogonais*)

   (b) Considere um seguintes conjuntos de pontos $P = \{(x_1^P, y_1^P), \ldots, (x_n^P, y_n^P)\}$, $Q = \{(x_1^Q, y_1^Q), \ldots, (x_m^Q, y_m^Q)\}$, $U = \{(x_1^U, y_1^U), \ldots, (x_k^U, y_k^U)\}$ e $V = \{(x_1^V, y_1^V), \ldots, (x_\ell^V, y_\ell^V)\}$. Formule o problema onde se pretende determinar o rectângulo que minimiza a soma dos quadrados das distâncias desses pontos ao rectângulo procurado.

   (c) Escreva um programa em matLab para resolver o problema da alínea anterior. Nota: admita que os pontos estão armazenados em vectores $xP$, $yP$, $xQ$, $yQ$, $xU$, $yU$, $xV$ e $yV$ de dimensões adequadas.

Formulário

x = fminunc(fun,x0,options)

x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)

Cotação

**4** - 3 valores; **5** - 4 valores;

**Exame modelo de Optimização Numérica, 2006/07**

Este exame foi elaborado com perguntas das folhas práticas resolvidas nas aulas e com resultados teóricos demonstrados nas aulas teóricas.

**Grupo 1**: cotação 13 valores

1. (a) Defina função convexa e conjunto convexo.
   (b) Resolva o exercício 5 das folhas práticas.
2. (a) Descreva em passos gerais o método dos gradientes utilizando a direcção de descida máxima com procura unidireccional exacta.
   (b) Resolva o exercício 32 das folhas práticas.
3. Resolva o exercício 48 das folhas práticas.
4. Demonstre a condição necessária de optimalidade de primeira ordem para o problema $\min\{f(x) : Ax = b\}$.
5. Considere o problema $\min\{f(x) : h(x) = 0\}$, onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são funções não lineares.
   (a) Defina plano tangente $T(\bar{x})$ à superficie $S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ em $\bar{x}$.
   (b) Seja $\bar{x} \in S$. Defina ponto regular em relação às restrições $h(x) = 0$.
   (c) Resolva o exercício 62 das folhas práticas.

**Grupo 2**: cotação 3 valores

6. Resolva o exercício 3 do TPC 1.
7. Resolva o TPC 3.

**Grupo 3**: cotação 4 valores

8. Resolva o exercício 2 do TPC 1.