Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 Folha 1

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que as formas quadráticas $x^{\mathrm{T}}Ax$ e $x^{\mathrm{T}}Bx$ coincidem.

   (b) Seja A uma matriz quadrada. Prove que A e a parte simétrica de A ($(A + A^{\mathrm{T}})/2$) representam a mesma forma quadrática.

2. Seja A uma matriz real e simétrica de ordem n. Prove que A é definida positiva se e só se:

   (a) Todos os valores próprios de A são positivos.

   (b) Os determinantes de A_k, $1 \leq k \leq n$, são positivos, onde A_k é a submatriz de A constituída pelas primeiras k linhas e colunas de A.

   (c) A pode factorizar-se na forma $A = LDL^{\mathrm{T}}$, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais unitários e D uma matriz diagonal com elementos diagonais positivos.

3. Seja S um conjunto não vazio. Mostre que S é convexo se e só se para qualquer inteiro $k \geq 2$ a seguinte implicação é verdadeira

$$x_1, \ldots, x_k \in S \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in S, \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, k.$$

4. Seja S um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e A uma matriz de ordem $m \times n$. Mostre que os seguintes conjuntos são convexos.

   (a) $AS = \{y : y = Ax, x \in S\}$

   (b) $\alpha S = \{y : y = \alpha x, x \in S\}$

5. Mostre que se f é uma função convexa num conjunto convexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$, então $S = \{x \in D : f(x) \leq a\}$ é um conjunto convexo.

6. Mostre que a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

7. Sejam g_i, $1 \leq i \leq k$, funções convexas num conjunto convexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Prove que $S = \{x \in D : g_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq k\}$ é um conjunto convexo.

8. Estude a convexidade e concavidade das seguintes funções:

   (a) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^2$
   (b) $f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1+x_2)}$
   (c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 + 5x_2$
   (d) $f(x_1, x_2) = e^{2x_1+3x_2}$
   (e) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
   (f) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3$
   (g) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1x_3 + x_3^2 + x_1^2$
   (h) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 3x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3$
   (i) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2$

9. Utilizando as instruções do MatLab em cada uma das funções de duas varíaveis do exercício anterior

   (a) visualize o gráfico de f,
   (b) determine os mínimos e máximos de f.

10. Mostre que $\dfrac{x}{4} + \dfrac{3y}{4} \leq \sqrt{\ln\left(\dfrac{e^{x^2}}{4} + \dfrac{3}{4}e^{y^2}\right)}$, para quaisquer $x, y > 0$.

11. Mostre que $\frac{1}{\sqrt{2}}|\arctan(x+y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

12. Seja $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava em $\mathbb{R}^n$. Mostre que f definida por $f(x) = 1/g(x)$ é convexa no conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$.

13. Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, funções convexas em $\mathbb{R}^n$. Mostre que a função definida por $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ é convexa em $\mathbb{R}^n$.

14. Determine as aproximações lineares e quadráticas das seguintes funções nos pontos indicados e estude as suas convexidade e concavidade

   (a) $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2+x_2^2} - 5x_1 + 10x_2, \bar{x} = (0, 0)$
   (b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3^2 + x_2e^{x_1x_3} + x_1^2, \bar{x} = (1, 0, 0)$
   (c) $f(x_1, x_2) = \log(x_1x_2) + e^{x_1/x_2}, \bar{x} = (1, 1)$
   (d) $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1) + \log(x_2x_3) + x_2^2x_3, \bar{x} = (0, 1, 1)$

15. Considere as seguintes sucessões de aproximações para o valor 1

   $v_k = 1 + 1/2^k$; $\quad w_k = 1 + 1/10^k$; $\quad x_k = 1 + 0.0001/5^k$
   $y_k = 1 + 1/k!$; $\quad z_k = 1 + 1/2^{2^k}$.

   Para cada uma destas sucessões:

   (a) indique a taxa de convergência;
   (b) supondo que o erro na iteração k é inferior a δ, quantas iterações é necessário realizar para que o erro seja inferior a $\delta/10$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 Folha 2

16. Considere a função quadrática

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Caracterize algebricamente os pontos estacionários de f.

   (b) Indique uma condição para que f só tenha um ponto estacionário e calcule o valor de f nesse ponto.

   (c) Indique uma condição para que um ponto estacionário seja mínimizante/máximizante de f.

   (d) Seja $\bar{x}$ um minimizante local de f. Mostre que $\bar{x}$ é minimizante global de f.

17. Determine um mínimo global da função $f(x_1, x_2) = 34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2$, usando as condições de optimalidade.

18. Considere a função $f(x) = (x_1 - 1)^2 x_2$ e os pontos de $\mathbb{R}^2$ da forma $\bar{x} = (1, x_2)^T$.

   (a) Analise as condições de optimalidade de primeira e segunda ordem para esses pontos.

   (b) O que pode afirmar sobre $\bar{x}$ utilizando essas informações?

   (c) Use a expressão da função para obter afirmações mais conclusivas sobre as características de $\bar{x}$.

19. Encontre os pontos estacionários de $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$ e diga quais são minimizantes ou maximizantes, local ou globais.

20. Considere a função de Rosenbrock $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$.

   (a) Obtenha expressões para as derivadas de 1^a e 2^a ordem de f.

   (b) Verifique que $x^* = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ é um minimizante local.

   (c) Mostre que $\nabla^2 f(x)$ é não singular se e somente se $x_2 - x_1^2 = 0.005$.

21. Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Mostre que minimizar $f(x)$ é equivalente a minimizar $g(f(x))$.

22. Calcule o gradiente e a Hessiana das funções:

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b, c \in \mathbb{R}^n$.

   (b) $f(x) = g(Ax + b)$, com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

23. Determine todas as direcções de descida para a função linear $f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3$.

24. Considere o problema não linear $\min f(x)$, onde $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1+x_2}$.

    (a) Escreva as condições necessárias de 1^a ordem. Diga se são suficientes e porquê.

    (b) O ponto $\bar{x} = (0,0)^T$ é óptimo?

    (c) Encontre uma direcção $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(\bar{x})^T p < 0$.

    (d) Minimize a função f a partir de $\bar{x}$ na direcção obtida em (c).

25. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ com $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Seja $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva. Mostre que $p = -M\nabla f(\bar{x})$ é uma direcção de descida em $\bar{x}$.

26. Considere a minimização de $f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1 - x_2)^2$.

    (a) Diga por que razão o método de Newton não pode ser aplicado de forma satisfatória usando a aproximação inicial $x_0 = (0,0)^T$.

    (b) Mostre que escolhendo a direcção $p_0 = -(\nabla^2 f(x_0))^{-1}\nabla f(x_0)$, nem p_0 nem $-p_0$ são direcções de descida.

27. Seja $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(1 - x_1)^2$.

    (a) Qual é o mínimo global de f?

    (b) Efectue uma iteração do método de Newton começando com $x_0 = (2,2)^T$ e diga se se trata de um bom passo.

28. Determine todos os pontos estacionários de cada um dos problemas seguintes, indicando quais são mínimos e máximos locais ou globais:

    (a) $\min f(x,y) = (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$

    (b) $\min g(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y$

    (c) $\min h(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 7$

    (d) $\min i(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x + 2$

    Para cada um dos problemas, efectue duas iterações dos métodos da descida máxima, Newton e Quase-Newton (fórmula de actualização de BFGS), começando no ponto $(1,0)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 Folha 3

29. Considere a função $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$.

    (a) Suponha que se pretende minimizar f, começando no ponto $x_0 = (0, -2)^T$. Verifique que $p_0 = (0, 1)^T$ é uma direcção de descida.

    (b) Suponha que é utilizada procura unidireccional para minimizar a função

    $$F(\alpha) = f(x_0 + \alpha p_0)$$

    e que é utilizado um esquema de *backtracking* para encontrar o passo óptimo α.

    Diga se o passo $\alpha = 1$ satisfaz a condição de decréscimo suficiente para $\mu = 0.5$ e indique todos os valores de μ para os quais $\alpha = 1$ satisfaz tal condição.

30. Considere a função real $f(x) = \frac{1}{2}||F(x)||_2^2$, onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $J(x)$ é não-singular para todo o x e considere o método iterativo definido por

    $$x_{k+1} = x_k - \alpha_k J(x_k)^{-1} F(x_k).$$

    Mostre que usando $\mu = 0.5$ na condição de Armijo, se tem $\dfrac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \leq 1 - \alpha_k$.

31. Leia e execute os códigos Rosenbrock em Matlab para a minimização da função de Rosenbrock do exercício 15. disponíveis em `http://www.mat.uc.pt/~lnv/pnl/Rosenbrock.tar.gz`. Utilize o comando `diary` para registar os resultados.

    Comente os resultados para os pontos iniciais $x_0 = (1.2, 1.2)$ e $x_0 = (-1.2, 1)$, usando passo inicial $\alpha_0 = 1$ e imprimindo o passo usado pelos métodos em cada iteração.

32. Mostre que no algoritmo de descida máxima com procura unidireccional exacta se tem:

    (a) $(x_{k+1} - x_k)^T (x_{k-1} - x_k) = 0$,

    (b) $\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_{k+1}) = 0$,

    para qualquer k.

33. Efectue duas iterações do método de Newton para a resolução dos seguintes problemas, com início nos pontos x_0 indicados:

    (a) Minimizar $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_1 - 2)x_2 + (x_2 + 1)^2$, com $x_0 = (1, 1)^T$.

    (b) Minimizar $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, com $x_0 = (0, 0)^T$.

34. Mostre que se A é uma matriz simétrica, então existe $\lambda \geq 0$ tal que $A + \lambda I$ é definida positiva.

35. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável duas vezes e $x^* \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Mostre que se $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ não é semidefinida positiva, então existe uma direcção de descida em x^*.

    (b) Admita que a Hessiana de f é definida positiva em x^* e considere uma sucessão $\{x_k\}$, a convergir para x^*, gerada por:

    $$x_{k+1} = x_k + p_k \text{ com } \nabla^2 f(x_k) p_k = -\nabla f(x_k) + r_k,$$

    em que $r_k \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $p_k \neq 0$ para todo o k.
    Indique uma condição suficiente para que p_k seja uma direcção de descida.

36. Considere a função $f(x) = x_1^4 + x_2^2$ e a direcção de procura p_0 determinada pelo passo de Newton a partir de $x_0 = (1,1)^T$. Calcule, com uma iteração, novas aproximações do minimizante de f, usando:

    (a) O passo de Newton.

    (b) Procura unidireccional. (Faça $\mu = 1/2$.)

    (c) Procura unidireccional exacta. (Pode considerar apenas um valor aproximado de α_0.)

    Compare os resultados obtidos com os diferentes métodos.

37. Seja $f(x) = x_1^4 + 6x_2^2 + 4x_1x_2$ uma função que se pretende minimizar partindo do ponto inicial $x_0 = (1,1)^T$.

    (a) Minimize a função f a partir de x_0, aplicando uma vez o método de Newton.

    (b) Verifique que $p_0 = (-1,-5)^T$ é uma direcção de descida a partir de x_0.

    (c) Minimize a função f, com uma iteração, a partir do ponto x_0 e usando a direcção p_0 e procura unidireccional.

38. Considere a aplicação de um método de direcções de descida com procura unidireccional exacta para minimizar uma função quadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - c^Tx$, onde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz definida positiva e $c \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Seja p_k uma direcção de descida para f, a partir do ponto x_k. Mostre que, neste caso, o passo óptimo é dado por

    $$\alpha_k = -\frac{p_k^T \nabla f(x_k)}{p_k^T \nabla^2 f(x_k) p_k},$$

    (b) Verifique que, utilizando procura unidireccional exacta, p_k é ortogonal a $\nabla f(x_{k+1})$.

    (c) Mostre que o método de Newton determina o minimizante de f em apenas uma iteração, independentemente do ponto inicial considerado.

    (d) Mostre que o passo de Newton satisfaz a condição de Armijo para $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, a partir de qualquer $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 Folha 4

39. Mostre que a matriz $A = ss^T$, com $s \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, tem característica 1.

40. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não singular e $B = A + uv^T$. Assumindo que $\sigma = 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, verifique a fórmula de Sherman-Morrison:

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} uv^T A^{-1}.$$

41. Aplique o método BFGS com procura unidireccional exacta função $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$, a partir de $x_0 = (1, 0)^T$ usando:

(a) $B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $B_0 = I$, (c) $B_0 = |f(x_0)|I$.

42. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. A condição de descréscimo suficiente em métodos de procura unidireccional, dada por

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + \mu \alpha_k \nabla f(x_k)^T p_k, \quad \mu \in]0, 1[,$$

desempenha um papel semelhante condição

$$\frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{\psi_k(0) - \psi_k(s_k)} \geq \eta, \quad \eta \in]0, \frac{1}{4}[,$$

dos métodos de região de confiança, em que $\psi_k(s) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T B_k s$ e $B_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica.

Mostre que esta afirmação faz sentido, escolhendo para o efeito $B_k = 0$ em $\psi_k(s)$ e associando s_k a $\alpha_k p_k$.

43. Considere $\psi_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k) p$ e a direcção $p_k^s = -\dfrac{\Delta_k}{||\nabla f(x_k)||} \nabla f(x_k)$.

Mostre que o escalar $\tau_k = \min \left\{ 1, \dfrac{||\nabla f(x_k)||^3}{\Delta_k \nabla f(x_k)^T \nabla^2 f(x_k) \nabla f(x_k)} \right\}$ é solução do problema

$$\begin{array}{ll} \min & \psi_k(\tau p_k^s) \\ \text{s. a} & ||\tau p_k^s|| \leq \Delta_k. \end{array}.$$

44. Repita os exercícios anteriores onde se procura o minimizante de f aplicando agora o método da região de confiança (começe com $\delta_0 = 1$) utilizando para matriz H_k na definição de $\psi_k(p)$:

   (a) $\nabla_f^2(x_k)$

   (b) a matriz da fórmula de actualizção BFGS

   (c) Compare o resultados.

   Compare ainda os resultados obtidos entre os métodos de pesquisa unidereccional e região de confiança.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 — Folha 5

45. Considere o problema sem restrições $\min f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

   (a) Analise os pontos estacionários deste problema.

   (b) Analise os pontos estacionários do problema dado, depois de acrescentada a restrição:
   i. $x_1 + x_2 = 0$; ii. $x_1 - x_2 = 0$.

46. Considere o problema quadrático

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Q x + p^T x + q \\ \text{s. a} & Ax = b, \end{array}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica, $x, p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Seja Z uma base de $\mathcal{N}(A)$ com $Z^T Q Z$ definida positiva e x_0 tal que $Ax_0 = b$.

Mostre que a solução deste problema é:

$$x^* = x_0 - Z(Z^T Q Z)^{-1} Z^T (Qx_0 + p).$$

47. Seja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 4x_1x_2x_3$.

   (a) Determine os pontos estacionários de f e verifique se correspondem a minimizantes ou maximizantes de f.

   (b) Considere o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$. Determine os pontos estacionários para o problema $min\{f(x) : x \in S\}$ e verifique quais correspondem a minimizantes ou maximizantes de f em S.

   (c) Aplique o método de Newton para aproximar o minimizante de f em S partindo de $x_0 = [2\ \ 2\ \ 2]^{\mathsf{T}}$. Utilize o critério de Armijo para aproximar λ_k e a decomposição QR para calcular Z.

48. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

   (a) Determine a solução óptima x^*.

   (b) Considere o problema "penalizado" $\min x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 - 1)^2$ e calcule a solução óptima $x^*(\mu)$, para cada $\mu > 0$.

   (c) Verifique que $\lim\limits_{u\to\infty} x^*(\mu) = x^*$.

49. Resolva os problemas:

(a) maximizar $\prod_{i=1}^{n} x_i$ sujeita a $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} = 1$, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$;

(b) minimizar $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ sujeita a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$ e $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

50. Considere o problema de minimizar f, sujeita s restrições $Ax = b$, com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. Seja x^* um ponto admissível e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ $(r > n - m)$ uma matriz do espaço nulo de A que não é uma base, ou seja, que contém algumas colunas linearmente dependentes.

(a) Mostre que a matriz $Z^T \nabla^2 f(x^*) Z$ não pode ser definida positiva.

(b) Mostre que se

$$Z^T \nabla f(x^*) = 0 \quad \text{e} \quad p^T \nabla^2 f(x^*) p > 0, \text{ para qualquer } p \in \mathcal{N}(A) - \{0\},$$

então x^* é um minimizante local estrito de f na região admissível.

(c) Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 = 2, \end{array}$$

e a matriz do espaço nulo das restrições

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Verifique que $x^* = (1, 1)^T$ satisfaz as condições necessárias de 1^a ordem, mas que a matriz $Z^T \nabla^2 f(x^*) Z$ não é definida positiva. Usando as alíneas anteriores mostre que x^* é um minimizante local estrito.

51. (a) Mostre que a direcção de descida máxima reduzida é uma direcção de descida em qualquer ponto não estacionário.

(b) Deduza uma expressão explícita para a direcção de descida quando se utiliza o método de descida máxima reduzido, considerando a matriz de projecção ortogonal para base do espaço nulo da matriz das restrições.

Nota: Ao método assim obtido dá-se o nome de método do gradiente projectado.

52. Considere o problema de optimização:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{s. a} & Ax = b \end{array}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $Z^T Q Z$ é definida positiva, com Z uma matriz do espaço nulo de A.

(a) Utilize o método de Newton, com passo 1 e começando num ponto admissível x_0, para mostrar que $x^* = x_0 - Z(Z^T Q Z)^{-1} Z^T \nabla f(x_0)$.

(b) Considere agora $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $A = [1\ 1\ 1]$ e $b = 3$.

i. Determine uma matriz associada geração do espaço nulo de A.

ii. Seguindo o método na alínea (a) resolva o problema, partindo de $x_0 = (2, 0, 1)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 Folha 6

53. Dados uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta > 0$, resolva o problema de regiões de confiança:
$$\begin{array}{ll} \min & f(x^*) + p^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x^*) p, \\ \text{s. a} & ||p|| \leq \Delta. \end{array}$$

54. Determine uma inversa direita da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ a partir do método da redução de variável, considerando $x_B = (x_2, x_3)^T$, e resolva o sistema
$$A^T \lambda = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 17 \end{bmatrix}^T.$$

55. Considere o problema de optimização não linear
$$\begin{array}{ll} \min & f(x, y) = 2x + 3y \\ \text{s. a} & 2x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}$$
   (a) Caracterize a trajectória $x(\mu)$ e $\lambda(\mu)$, com μ um parmetro positivo, para o método de barreira logarítmica.
   (b) Mostre que quando μ tende para 0 se obtêm a solução do problema e o vector de multiplicadores de Lagrange que lhe está associado.

56. Considere o problema
$$\begin{array}{ll} \min & y^2 - 3x \\ \text{s. a} & x + y = 1 \\ & x - y = 0 \end{array}$$
Caracterize a trajectória dos minimizantes e os multiplicadores de Lagrange da função de penalização quadrática deste problema em função de ρ. Mostre que no limite se obtêm o minimizante global do problema dado e os multiplicadores de Lagrange associados.

57. Considere o problema
$$\begin{array}{ll} \min & -x^2 \\ \text{s. a} & 1 - x^2 \geq 0 \end{array}$$
   (a) Mostre que a função de barreira logarítmica $\beta(x, u)$ tem um minimizante $x = 0$ se $\mu > 1$ e dois $x = \pm\sqrt{1-\mu}$ se $\mu < 1$. Que tipo de ponto é $x = 0$ quando $\mu < 1$?
   (b) Seja $\{\mu_k\}$ uma sucessão de parmetros de barreira menores do que 1 a convergir para 0 e $x_k = (-1)^k \sqrt{1 - \mu_k}$ uma sucessão de minimizantes de $\beta(x, \mu_k)$. Verifique que as subsucessões $\{x_{2k+1}\}$ e $\{x_{2k}\}$ convergem para pontos diferentes, ambos solução do problema original.

58. Obtenha uma expressão para as estimativas dos multiplicadores de Lagrange associadas aos pontos na trajectória barreira, com função de barreira inversa, e verifique que estes pontos e estimativas são solução das condições de optimalidade de 1^a ordem perturbadas.

59. Considere o problema não linear com restrições $\min\{\frac{-1}{x^2+1} : x \geq 1\}$.

    (a) Mostre que a função de barreira logarítmica é não limitada inferiormente na região admissível.

    (b) Mostre ainda que essa função tem um minimizante local que aproxima a solução do problema x^* quando μ tende para 0.

60. Considere o problema $\min\{x : x^2 \geq 0, x \geq -1\}$. Mostre que a sequência de minimizantes globais da função de barreira logarítmica converge para o minimizante global do problema com restrições $x = -1$, mas que a sequência de minimizantes locais (não globais) converge para 0, que não é minimizante do problema com restrições.

61. Considere a minimização de $f(x) = x^2$, com $x \geq 1$.

    (a) Para cada inteiro positivo k calcule o minimizante x_k da função objectivo do problema sem restrições com o termo de penalização quadrática.

    (b) Repita a alínea anterior utilizando o termo de penalização exacta.

    (c) Compare os resultados e comente.

62. Considere o programa não linear com restrições: $\min\{f(x) = x_1^2 + x_2^2 : x_1 + x_2 = 1\}$

    (a) Encontre, graficamente, a solução do problema e confirme que encontrou a solução óptima através das condições de optimalidade.

    (b) Deduza uma expressão para os pontos estacionários da função (de penalização quadrática) $\pi(x, \rho) = f(x) + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x)$ e para os multiplicadores de Lagrange associados.

    (c) Determine agora uma expressão para os pontos estacionários da função (de Lagrange aumentada) $\mathcal{A}(x, \lambda, \rho) = f(x) - \lambda^T g(x) + \frac{\rho}{2} g(x)^T g(x)$.

63. Considere o programa não linear com restrições:
$$\min\{f(x) = e^{3x_1+4x_2} : g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}.$$

    (a) Determine graficamente a solução óptima $x*$ deste problema (confirme depois as condições de optimalidade).

    (b) Aproxime a solução óptima deste problema utilizando os métodos de: penalização quadrática, penalização exacta, lagrangeano aumentado, programação sequencial quadrática e do gradiente reduzido.

    (c) Substitua a restrição de igualdade por uma de desigualdade "$\leq$"e aplique o metodo de barreira com as funções de barreira logarítmica e inversa.

    (d) Compare os resultados obtidos em termos de $\|x* - x_k\|$, $|f(x*) - f(x_k)|$, $|g(x*) - g(x_k)|$ e $\|\nabla \mathcal{L}(x_k, \lambda_k)\|$.

64. Leia e execute os códigos em Matlab para a minimização da função $x_1 + x_2$, com $x_1^2 + x_2^2 = 2$, disponíveis em `http://www.mat.uc.pt/~lnv/pnl/e17ponto1.tar.gz`. Utilize o comando `diary` para registar os resultados e `format compact` para poupar espaço.

    Corra o método de penalização quadrática e o método da função Lagrangeana aumentada. Comente os resultados obtidos.