Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 TPC 3

Data de entrega: 19 de Dezembro de 2006

Considere o problema

$$\begin{gathered} \text{Minimizar } (x+1)^2 + (y-1)^2 \\ \text{s.a. } 2y - 1 = 0 \\ (1-x)(4-x^2-y^2) \leq 0 \\ 100 - 2x^2 - y^2 \geq 0. \end{gathered}$$

Resolva o problema graficamente e encontre os valores exatos dos multiplicadores de Lagrange usando as condições Kuhn-Tucker.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 TPC 2

Data de entrega: 27 de Novembro de 2006

Resolva algebricamente e graficamente o problema

$$\text{Minimizar } (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\text{s.a. } x+y \geq 1;\ x+y \leq 3;\ x, y \geq 0$$

por um método de retrições activas, partindo da aproximação inicial $x_0 = (2,1)^{\mathtt{T}}$. Justifique todos os passos.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2006/2007 — TPC 1

Data de entrega: 7 de Novembro de 2006

1. Verifique se as seguintes funções quadráticas são convexas, côncavas ou não convexas

   (a) $f(x_1,\ldots,x_n) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + \ldots + (n+1)x_n^2 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n}(i+1)x_i^2 + x_i$

   (b) $f(x_1,\ldots,x_n) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 + 2x_3^2 - x_3x_4 + \ldots + 2x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + 2x_n^2 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n = 2x_1^2 - x_1 + \sum_{i=2}^{n}(2x_i^2 - x_{i-1}x_i - x_i)$

2. Considere dois conjuntos de pontos em $\mathbb{R}^2$

   $$A = \{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\} \text{ e } B = \{(u_1,v_1),\ldots,(u_m,v_m)\}$$

   (a) Formule o problema em que se pretende aproximar esses conjuntos de pontos por duas rectas paralelas.

   (b) Resolva o problema anterior utilizando o MatLab gerando os pontos de A e B com os comandos $x = [1 : 10/n : 10]'; y = x + rand(n,1) - 0.5; u = [1 : 10/m : 10]'; v = 10 + u + rand(m,1) - 0.5;$ (utilize vários valores de n e m).

   (c) Repita o exercício considerando agora duas rectas ortogonais e os pontos de A e B gerados com os comandos $x = [1 : 10/n : 10]'; y = x + rand(n,1) - 0.5; u = [1 : 10/m : 10]'; v = 10 - u + rand(m,1) - 0.5;$.

3. O critério de Armijo permite identificar um escalar λ_k por forma a garantir a convergência global dos métodos estudados para o problema de $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Deste modo, dada uma direção de descida de f em x_k e $\beta \in (0,1)$, λ_k deve satisfazer

   $$f(x_k + \lambda_k p_k) < f(x_k) + \beta\lambda_k \nabla f(x_k)^{\mathrm{T}} p_k$$

   Prove que existe $i \in \mathbb{N}_0$ para o qual 2^{-i} satisfaz o critério de Armijo.

4. Seja f uma função continuamente diferenciável e considere o método da descida máxima ($x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)$) com o critério da minimização para determinar λ_k.

   (a) Prove que o algoritmo se move em passos perpendiculares, isto é,

   $$(x_{k+1} - x_k)^{\mathrm{T}}(x_k - x_{k-1}) = 0, \forall k \geq 1.$$

   (b) Interprete graficamente o resultado anterior para a função $f(x,y) = 5x^2 + y^2 - x - y$, partindo do ponto $x_0 = (2,2)$.