Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Mestrado em Matemática

Ano lectivo 2007/2008 Folha 1

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Verifique que as formas quadráticas $x^{\mathsf{T}}Ax$ e $x^{\mathsf{T}}Bx$ coincidem.
   (b) Seja A uma matriz quadrada. Prove que A e a parte simétrica de A $((A + A^{\mathsf{T}})/2)$ representam a mesma forma quadrática.

2. Seja A uma matriz real e simétrica de ordem n. Prove que A é definida positiva se e só se:
   (a) Todos os valores próprios de A são positivos.
   (b) Os determinantes de A_k, $1 \le k \le n$, são positivos, onde A_k é a submatriz de A constituída pelas primeiras k linhas e colunas de A.
   (c) A pode factorizar-se na forma $A = LDL^{\mathsf{T}}$, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais unitários e D uma matriz diagonal com elementos diagonais positivos.

3. Seja S um conjunto não vazio. Mostre que S é convexo se e só se para qualquer inteiro $k \ge 2$ a seguinte implicação é verdadeira

$$x_1, \dots, x_k \in S \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in S,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \ge 0,\ j = 1, \dots, k.$$

4. Seja S um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e A uma matriz de ordem $m \times n$. Mostre que os seguintes conjuntos são convexos.
   (a) $AS = \{y : y = Ax, x \in S\}$
   (b) $\alpha S = \{y : y = \alpha x, x \in S\}$

5. Mostre que se f é uma função convexa num conjunto convexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$, então $S = \{x \in D : f(x) \le a\}$ é um conjunto convexo.

6. Mostre que a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

7. Sejam g_i, $1 \le i \le k$, funções convexas num conjunto convexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Prove que $S = \{x \in D : g_i(x) \le 0, 1 \le i \le k\}$ é um conjunto convexo.

8. Estude a convexidade e concavidade das seguintes funções:

   (a) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^2$
   (b) $f(x_1, x_2) = x_1e^{-(x_1+x_2)}$
   (c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 + 5x_2$
   (d) $f(x_1, x_2) = e^{2x_1+3x_2}$
   (e) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
   (f) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3$
   (g) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1x_3 + x_3^2 + x_1^2$
   (h) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 3x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3$
   (i) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2$

9. Mostre que $\frac{x}{4} + \frac{3y}{4} \leq \sqrt{\ln\left(\frac{e^{x^2}}{4} + \frac{3}{4}e^{y^2}\right)}$, para quaisquer $x, y > 0$.

10. Mostre que $\frac{1}{\sqrt{2}}|\arctan(x + y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

11. Seja $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava em $\mathbb{R}^n$. Mostre que f definida por $f(x) = 1/g(x)$ é convexa no conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$.

12. Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, funções convexas em $\mathbb{R}^n$. Mostre que a função definida por $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ é convexa em $\mathbb{R}^n$.

13. Determine as aproximações lineares e quadráticas das seguintes funções nos pontos indicados e estude as suas convexidade e concavidade

   (a) $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2+x_2^2} - 5x_1 + 10x_2, \bar{x} = (0, 0)$
   (b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3^2 + x_2e^{x_1x_3} + x_1^2, \bar{x} = (1, 0, 0)$
   (c) $f(x_1, x_2) = \log(x_1x_2) + e^{x_1/x_2}, \bar{x} = (1, 1)$
   (d) $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1) + \log(x_2x_3) + x_2^2x_3, \bar{x} = (0, 1, 1)$

14. Utilizando as instruções do MatLab em cada uma das funções de duas varíaveis do exercício 8

   (a) visualize o gráfico de f,
   (b) determine os minimizantes e maximizantes de f.

   Verifique se as condições de optimalidade de primeira e segunda ordem são satisfeitas nos pontos determinados anteriormente.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Mestrado em Matemática

Ano lectivo 2007/2008 Folha 2

15. Considere a função quadrática

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.

(a) Caracterize algebricamente os pontos estacionários de f.

(b) Indique uma condição para que f só tenha um ponto estacionário e calcule o valor de f nesse ponto.

(c) Indique uma condição para que um ponto estacionário seja minimizante/maximizante de f.

(d) Seja $\bar{x}$ um minimizante local de f. Mostre que $\bar{x}$ é minimizante global de f.

16. Determine um mínimo global da função $f(x_1, x_2) = 34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2$, usando as condições de optimalidade.

17. Considere a função $f(x) = (x_1 - 1)^2 x_2$ e os pontos de $\mathbb{R}^2$ da forma $\bar{x} = (1, x_2)^T$.

(a) Analise as condições de optimalidade de primeira e segunda ordem para esses pontos.

(b) O que pode afirmar sobre $\bar{x}$ utilizando essas informações?

(c) Use a expressão da função para obter afirmações mais conclusivas sobre as características de $\bar{x}$.

18. Considere a função de Rosenbrock $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$.

(a) Obtenha expressões para as derivadas de 1^a e 2^a ordem de f.

(b) Verifique que $x^* = (1, 1)^{\mathtt{T}}$ é um minimizante local.

(c) Mostre que $\nabla^2 f(x)$ é não singular se e somente se $x_2 - x_1^2 = 0.005$.

19. Encontre os pontos estacionários de $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$ e diga quais são minimizantes ou maximizantes, local ou globais.

20. Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Mostre que minimizar $f(x)$ é equivalente a minimizar $g(f(x))$.

21. Calcule o gradiente e a Hessiana das funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b, c \in \mathbb{R}^n$.

(b) $f(x) = g(Ax + b)$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

22. Considere o problema sem restrições $\min f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

    (a) Analise os pontos estacionários deste problema.

    (b) Analise os pontos estacionários do problema dado, depois de acrescentada a restrição:
        i. $x_1 + x_2 = 0$; ii. $x_1 - x_2 = 0$.

23. Considere o problema quadrático

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} x^T Q x + p^T x + q \\ \text{s. a} & Ax = b, \end{array}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica, $x, p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Seja Z uma base de $\mathcal{N}(A)$ com $Z^T Q Z$ definida positiva e x_0 tal que $Ax_0 = b$.

Mostre que a solução deste problema é:

$$x^* = x_0 - Z(Z^T Q Z)^{-1} Z^T (Q x_0 + p).$$

24. Seja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 4x_1 x_2 x_3$.

    (a) Determine os pontos estacionários de f e verifique se correspondem a minimizantes ou maximizantes de f.

    (b) Considere o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$. Determine os pontos estacionários para o problema $min\{f(x) : x \in S\}$ e verifique quais correspondem a minimizantes ou maximizantes de f em S.

25. Resolva os problemas:

    (a) maximizar $\prod_{i=1}^{n} x_i$ sujeita a $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} = 1$, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$;

    (b) minimizar $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ sujeita a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$ e $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

26. Considere o problema de minimizar f, sujeita às restrições $Ax = b$, com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. Seja x^* um ponto admissível e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ $(r > n - m)$ uma matriz cujas colunas constituem um conjunto gerador do espaço nulo de A mas que não é uma base.

    (a) Mostre que a matriz $Z^T \nabla^2 f(x^*) Z$ não pode ser definida positiva.

    (b) Mostre que se

    $$Z^T \nabla f(x^*) = 0 \quad \text{e} \quad p^T \nabla^2 f(x^*) p > 0, \text{ para qualquer } p \in \mathcal{N}(A) - \{0\},$$

    então x^* é um minimizante local estrito de f na região admissível.

    (c) Considere o problema

    $$\begin{array}{ll} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 = 2, \end{array}$$

    e a matriz do espaço nulo das restrições

    $$Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

    Verifique que $x^* = (1, 1)^T$ satisfaz as condições necessárias de 1^a ordem, mas que a matriz $Z^T \nabla^2 f(x^*) Z$ não é definida positiva. Usando as alíneas anteriores mostre que x^* é um minimizante local estrito.

27. Mostre que a matriz $A = ss^T$, com $s \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, tem característica 1.

28. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não singular e $B = A + uv^T$. Assumindo que $\sigma = 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, verifique a fórmula de Sherman-Morrison:
$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} uv^T A^{-1}.$$

29. Mostre que se A é uma matriz simétrica, então existe $\lambda \geq 0$ tal que $A + \lambda I$ é definida positiva.

30. Determine todas as direcções de descida para a função linear $f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3$.

31. Considere o problema não linear $\min f(x)$, onde $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1+x_2}$.
    (a) Escreva as condições necessárias de 1^a ordem. Diga se são suficientes e porquê.
    (b) O ponto $\bar{x} = (0, 0)^T$ é óptimo?
    (c) Encontre uma direcção $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(\bar{x})^T p < 0$.
    (d) Minimize a função f a partir de $\bar{x}$ na direcção obtida em (c).

32. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ com $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Seja $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva. Mostre que $p = -M\nabla f(\bar{x})$ é uma direcção de descida em $\bar{x}$.

33. Considere a minimização de $f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1 - x_2)^2$. Usando a aproximação inicial $x_0 = (0, 0)^T$, mostre que escolhendo a direcção de Newton para p_0, $p_0 = -(\nabla^2 f(x_0))^{-1} \nabla f(x_0)$, nem p_0 nem $-p_0$ são direcções de descida.

34. Seja $f(x, y) = (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$.
    (a) Qual é o mínimo global de f?
    (b) Efectue uma iteração do método de Newton clássico começando com $x_0 = (2, 2)^T$ e diga se se trata de um bom passo.
    (c) Repita a alínea anterior utilizando os métodos de descida máxima e BFGS (sem controle do passo).
    (d) Proceda ao controle do passo utilizando um esquema de *backtracking* nos métodos anteriores (efectue duas iterações em cada método).
    (e) Repita a alínea anterior fazendo pesquisa unidirecccional exacta.

35. Considere a função $f(x) = x_1^4 + x_2^2$ e a direcção de procura p_0 determinada pelo passo de Newton a partir de $x_0 = (1,1)^T$. Calcule, com uma iteração, novas aproximações do minimizante de f, usando:

    (a) O passo de Newton clássico.

    (b) Procura unidireccional. (Faça $\beta = 1/2$.)

    (c) Procura unidireccional exacta.
    (Pode considerar apenas um valor aproximado de α_0.)

    Compare os resultados obtidos com os diferentes métodos.

36. Determine todos os pontos estacionários de cada um dos problemas seguintes, indicando quais são mínimos e máximos locais ou globais:

    (a) $\min g(x,y) = x^2 + y^2 - x^2 y$

    (b) $\min h(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 7$

    (c) $\min i(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x + 2$

    Para cada um dos problemas, efectue duas iterações com o método de pesquisa linear e com as direcções de descida máxima, Newton e Quase-Newton (fórmula de actualização de BFGS), começando no ponto $(1,0)$.

37. Aplique o método BFGS com procura unidireccional exacta à função $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$, a partir de $x_0 = (1,0)^T$ usando:

    (a) $B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $B_0 = I$, (c) $B_0 = |f(x_0)|I$.

38. Considere a função $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$.

    (a) Suponha que se pretende minimizar f, começando no ponto $x_0 = (0,-2)^T$. Verifique que $p_0 = (0,1)^T$ é uma direcção de descida.

    (b) Suponha que é utilizada procura unidireccional para minimizar a função
    $$F(\alpha) = f(x_0 + \alpha p_0)$$
    e que é utilizado um esquema de *backtracking* para encontrar o passo óptimo α.
    Diga se o passo $\alpha = 1$ satisfaz a condição de decréscimo suficiente para $\beta = 0.5$ e indique todos os valores de β para os quais $\alpha = 1$ satisfaz tal condição.

39. Considere a função real $f(x) = \frac{1}{2}||F(x)||_2^2$, onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $J(x)$ é não-singular para todo o x e considere o método iterativo definido por
    $$x_{k+1} = x_k - \alpha_k J(x_k)^{-1} F(x_k).$$
    Mostre que usando $\beta = 0.5$ na condição de Armijo, se tem $\dfrac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \leq 1 - \alpha_k \dfrac{||F(x)||^2_{J_F(x_k)}}{||F(x)||_2^2}$.

40. Leia e execute os códigos Rosenbrock em Matlab para a minimização da função de Rosenbrock do exercício 15. disponíveis em `http://www.mat.uc.pt/~lnv/pnl/Rosenbrock.tar.gz`. Utilize o comando `diary` para registar os resultados.

    Comente os resultados para os pontos iniciais $x_0 = (1.2, 1.2)$ e $x_0 = (-1.2, 1)$, usando passo inicial $\alpha_0 = 1$ e imprimindo o passo usado pelos métodos em cada iteração.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Mestrado em Matemática

Ano lectivo 2007/2008 Folha 4

41. Mostre que no algoritmo de descida máxima com procura unidireccional exacta se tem:

    (a) $(x_{k+1} - x_k)^T (x_{k-1} - x_k) = 0$,

    (b) $\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_{k+1}) = 0$,

    para qualquer k. Interprete geometricamente.

42. Considere a aplicação de um método de direcções de descida com procura unidireccional exacta para minimizar uma função quadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x$, onde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz definida positiva e $c \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Seja p_k uma direcção de descida para f, a partir do ponto x_k. Mostre que, neste caso, o passo óptimo é dado por

    $$\alpha_k = -\frac{p_k^T \nabla f(x_k)}{p_k^T \nabla^2 f(x_k) p_k},$$

    (b) Verifique que, utilizando procura unidireccional exacta, p_k é ortogonal a $\nabla f(x_{k+1})$.

    (c) Mostre que o método de Newton determina o minimizante de f em apenas uma iteração, independentemente do ponto inicial considerado.

    (d) Mostre que o passo de Newton satisfaz a condição de Armijo para $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$, a partir de qualquer $x_k \in \mathbb{R}^n$.

43. Considere o problema $\min x^4 + 2x^3 + 24x^2 + y^4 + 12y^2$. Partindo da aproximação inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$ e fazendo $\Delta_0 = 1$, $\eta_1 = 1/4$ e $\eta_2 = 3/4$, determine o valor de (x_1, y_1) e Δ_1.

44. Repita os exercícios anteriores onde se procura o minimizante de f aplicando agora o método da região de confiança (começe com $\Delta_0 = 1$) utilizando para matriz H_k na definição de $\psi_k(s)$:

    (a) $\nabla_f^2(x_k)$

    (b) a matriz da fórmula de actualizção BFGS

    (c) Compare o resultados.

    Compare ainda os resultados obtidos entre os métodos de pesquisa unidereccional e região de confiança.

45. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. A condição de descréscimo suficiente em métodos de procura unidireccional, dada por

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + \beta \alpha_k \nabla f(x_k)^T p_k, \quad \beta \in]0, 1[,$$

desempenha um papel semelhante à condição

$$\frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{\psi_k(0) - \psi_k(s_k)} \geq \eta, \quad \eta \in]0, \frac{1}{4}[,$$

dos métodos de região de confiança, em que $\psi_k(s) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T B_k s$ e $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica.

Mostre que esta afirmação faz sentido, escolhendo para o efeito $B_k = 0$ em $\psi_k(s)$ e associando s_k a $\alpha_k p_k$.

46. Considere $\psi_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k) p$ e a direcção $c_k = -\dfrac{\Delta_k}{||\nabla f(x_k)||} \nabla f(x_k)$.

Mostre que o escalar $\tau_k = \min \left\{ 1, \dfrac{||\nabla f(x_k)||^3}{\Delta_k \nabla f(x_k)^T \nabla^2 f(x_k) \nabla f(x_k)} \right\}$ é solução do problema

$$\begin{array}{ll} \min & \psi_k(\tau c_k) \\ \text{s. a} & ||\tau c_k|| \leq \Delta_k \end{array}$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Mestrado em Matemática

Ano lectivo 2007/2008 Folha 5

47. Considere o sistema $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine uma solução particular do sistema, uma base para o núcleo e resolva o sistema $A^T\lambda = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 17 \end{bmatrix}^T$, utilizando:

    (a) o método da redução de variável;

    (b) a factorização $A^{\mathtt{T}} = QR$.

48. Mostre que a direcção de descida máxima reduzida é uma direcção de descida em qualquer ponto não estacionário.

49. Considere o problema de optimização:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ \text{s. a} & Ax = b \end{array}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e Z^TQZ é definida positiva, com Z uma matriz do espaço nulo de A.

    (a) Utilize o método de Newton, com passo 1 e começando num ponto admissível x_0, para mostrar que $x^* = x_0 - Z(Z^TQZ)^{-1}Z^T\nabla f(x_0)$.

    (b) Considere agora $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $A = [1\ 1\ 1]$ e $b = 3$.

        i. Determine uma matriz associada à geração do espaço nulo de A.

        ii. Seguindo o método na alínea (a) resolva o problema, partindo de $x_0 = (2, 0, 1)$.

50. Utilize o método de Newton reduzido para resolver o problema $\min 0.5x^{\mathtt{T}}Qx : Ax = b$, onde

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -13 & -6 & -3 \\ -13 & 23 & -9 & 3 \\ -6 & -9 & -12 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inicialize o metodo com $x_o = [1\ 1\ 0\ 0]^{\mathtt{T}}$.

51. Repita o exercício anterior com o método da descida máximo partindo do mesmo ponto inicial. Calcule 3 iterações utilizando pesquisa linear exacta.

52. Prove que a direcção de Newton reduzida é invariante realtivamente à base escolhida para $Nu(A)$. Diga se o mesmo acontece relativamente à direção de descida máxima (prove ou dê um contra-exemplo).

53. do problema $\min f(x,y) = 0.5(x-3)^2 + (y-2)^2) : x \in S$, onde $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : y - 2x \leq 0, x + y \leq 0, y \geq 0\}$,

(a) Represente graficamente a região admissível e as curvas de nível de f.

(b) Determine a solução óptima através do método das restrições activas. Utilize o método de Newton reduzido para resolver o subproblema com restrições de igualdade e determine Z pelo método de redução de variável.

(c) Repita o exercício anterior utilizando a direcção de descida máxima, a factorização $A^{\mathrm{T}} = QR$ e pesquisa linear exacta.

54. Considere o programa não linear com restrições:

$$\min\{f(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

(a) Determine graficamente a solução óptima do problema.

(b) Confirme, utilizando as condições de optimalidade, que a solução óptima encontrada na alínea anterior é óptima.
(Nota: caso não tenha resolvido a alínea anterior, utilize as condições de optimalidade para determinar a solução óptima do problema).

(c) Determine a solução óptima do problema utilizando o método das restrições activas partindo da aproximação inicial $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Utilize a direcção de descida máxima (com controlo do passo por *backtracking*) para resolver os sub-problemas com restrições de igualdede que vão surgindo.

55. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2x_3$.

(a) Determine os pontos estacionários de f e verifique se correspondem a minimizantes ou maximizantes de f.

(b) Considere o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$. Determine os pontos estacionários para o problema $min\{f(x) : x \in S\}$ e verifique quais correspondem a minimizantes ou maximizantes de f em S.

(c) Caraterize algebricamente as direcções de descida admissíveis para f em $x \in S$.

(d) Determine uma base para espaço nulo de A, $Nu(A)$.

(e) Determine uma direcção de descida admissível p para f em $x_0 = [0 \;\; 1 \;\; 2]^{\mathrm{T}}$.

(f) Determine uma aproximação para a solução de $min\{f(x) : x \in S\}$ partindo de x_0, seguindo a direcção p e utilizando o critério de Armijo ($\beta = 1/2$) para controlar o passo.

56. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

(a) Determine a solução óptima x^*.

(b) Considere o problema "penalizado" $\min x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 - 1)^2$ e calcule a solução óptima $x^*(\mu)$, para cada $\mu > 0$.

(c) Verifique que $\lim\limits_{u \to \infty} x^*(\mu) = x^*$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Optimização Numérica

Mestrado em Matemática

Ano lectivo 2007/2008 Folha 6

57. Dados uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta > 0$, resolva o problema de regiões de confiança:
$$\begin{array}{ll} \min & f(x^*) + p^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x^*) p, \\ \text{s. a} & ||p|| \leq \Delta. \end{array}$$

58. Considere o problema de optimização não linear
$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) = 2x + 3y \\ \text{s. a} & 2x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}$$
   (a) Caracterize a trajectória $x(\mu)$ e $\lambda(\mu)$, com μ um parmetro positivo, para o método de barreira logarítmica.
   (b) Mostre que quando μ tende para 0 se obtêm a solução do problema e o vector de multiplicadores de Lagrange que lhe está associado.

59. Considere o problema
$$\begin{array}{ll} \min & y^2 - 3x \\ \text{s. a} & x + y = 1 \\ & x - y = 0 \end{array}$$
Caracterize a trajectória dos minimizantes e os multiplicadores de Lagrange da função de penalização quadrática deste problema em função de ρ. Mostre que no limite se obtêm o minimizante global do problema dado e os multiplicadores de Lagrange associados.

60. Considere o problema
$$\begin{array}{ll} \min & -x^2 \\ \text{s. a} & 1 - x^2 \geq 0 \end{array}$$
   (a) Mostre que a função de barreira logarítmica $\beta(x,u)$ tem um minimizante $x = 0$ se $\mu > 1$ e dois $x = \pm\sqrt{1-\mu}$ se $\mu < 1$. Que tipo de ponto é $x = 0$ quando $\mu < 1$?
   (b) Seja $\{\mu_k\}$ uma sucessão de parmetros de barreira menores do que 1 a convergir para 0 e $x_k = (-1)^k \sqrt{1-\mu_k}$ uma sucessão de minimizantes de $\beta(x, \mu_k)$. Verifique que as subsucessões $\{x_{2k+1}\}$ e $\{x_{2k}\}$ convergem para pontos diferentes, ambos solução do problema original.

61. Obtenha uma expressão para as estimativas dos multiplicadores de Lagrange associadas aos pontos na trajectória barreira, com função de barreira inversa, e verifique que estes pontos e estimativas são solução das condições de optimalidade de 1^a ordem perturbadas.

62. Considere o problema não linear com restrições $\min\{\frac{-1}{x^2+1} : x \geq 1\}$.

   (a) Mostre que a função de barreira logarítmica é não limitada inferiormente na região admissível.

   (b) Mostre ainda que essa função tem um minimizante local que aproxima a solução do problema x^* quando μ tende para 0.

63. Considere o problema $\min\{x : x^2 \geq 0, x \geq -1\}$. Mostre que a sequência de minimizantes globais da função de barreira logarítmica converge para o minimizante global do problema com restrições $x = -1$, mas que a sequência de minimizantes locais (não globais) converge para 0, que não é minimizante do problema com restrições.

64. Considere a minimização de $f(x) = x^2$, com $x \geq 1$.

   (a) Para cada inteiro positivo k calcule o minimizante x_k da função objectivo do problema sem restrições com o termo de penalização quadrática.

   (b) Repita a alínea anterior utilizando o termo de penalização exacta.

   (c) Compare os resultados e comente.

65. Considere o programa não linear com restrições: $\min\{f(x) = x_1^2 + x_2^2 : x_1 + x_2 = 1\}$

   (a) Encontre, graficamente, a solução do problema e confirme que encontrou a solução óptima através das condições de optimalidade.

   (b) Deduza uma expressão para os pontos estacionários da função (de penalização quadrática) $\pi(x, \rho) = f(x) + \frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x)$ e para os multiplicadores de Lagrange associados.

   (c) Determine agora uma expressão para os pontos estacionários da função (de Lagrange aumentada) $\mathcal{A}(x, \lambda, \rho) = f(x) - \lambda^T g(x) + \frac{\rho}{2} g(x)^T g(x)$.

66. Considere o programa não linear com restrições:
$$\min\{f(x) = e^{3x_1+4x_2} : g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}.$$

   (a) Determine graficamente a solução óptima $x*$ deste problema (confirme depois as condições de optimalidade).

   (b) Aproxime a solução óptima deste problema utilizando os métodos de: penalização quadrática, penalização exacta, lagrangeano aumentado, programação sequencial quadrática e do gradiente reduzido.

   (c) Substitua a restrição de igualdade por uma de desigualdade "$\leq$"e aplique o metodo de barreira com as funções de barreira logarítmica e inversa.

   (d) Compare os resultados obtidos em termos de $\|x*-x_k\|$, $|f(x*)-f(x_k)|$, $|g(x*)-g(x_k)|$ e $\|\nabla\mathcal{L}(x_k, \lambda_k)\|$.

67. Leia e execute os códigos em Matlab para a minimização da função $x_1 + x_2$, com $x_1^2 + x_2^2 = 2$, disponíveis em `http://www.mat.uc.pt/~lnv/pnl/e17ponto1.tar.gz`. Utilize o comando `diary` para registar os resultados e `format compact` para poupar espaço.

   Corra o método de penalização quadrática e o método da função Lagrangeana aumentada. Comente os resultados obtidos.