Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Frequência de Optimização Numérica 2007/08
Mestrado em Matemática

4 de Dezembro de 2007 Duração: 1H30m

Nome do aluno: ______________________________

1. Considere a função quadrática
$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$
onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.
   (a) Caracterize algebricamente os pontos estacionários de f.
   (b) Indique uma condição suficiente para que f só tenha um ponto estacionário e calcule o valor de f nesse ponto.
   (c) Indique uma condição para que um ponto estacionário seja minimizante/maximizante de f.
   (d) Seja $\bar{x}$ um minimizante local de f. Mostre que $\bar{x}$ é minimizante global de f.

2. Considere $\psi_k(p) = f(x_k)+\nabla f(x_k)^T p+\frac{1}{2}p^T\nabla^2 f(x_k)p$ e a direcção $c_k = -\dfrac{\Delta_k}{||\nabla f(x_k)||}\nabla f(x_k)$.
Mostre que o escalar $\tau_k = \min\left\{1, \dfrac{||\nabla f(x_k)||^3}{\Delta_k \nabla f(x_k)^T\nabla^2 f(x_k)\nabla f(x_k)}\right\}$ é solução do problema
$$\begin{array}{ll} \min & \psi_k(\tau c_k) \\ \text{s. a} & ||\tau c_k|| \leq \Delta_k \end{array}$$

3. Considere o problema de optimização:
$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ \text{s. a} & Ax = b \end{array}$$
onde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e Z^TQZ é definida positiva, com Z uma matriz do espaço nulo de A.
   (a) Utilize o método de Newton, com passo 1 e começando num ponto admissível x_0, para mostrar que $x^* = x_0 - Z(Z^TQZ)^{-1}Z^T\nabla f(x_0)$.
   (b) Considere agora $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $A = [1\ 1\ 1]$ e $b = 3$.
      i. Determine uma matriz associada à geração do espaço nulo de A.
      ii. Seguindo o método da alínea (a) resolva o problema, partindo de $x_0 = (2, 0, 1)$.

4. Considere o programa não linear com restrições:

$$\min\{f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

   (a) Determine graficamente a solução óptima do problema.

   (b) Confirme, utilizando as condições de optimalidade, que a solução óptima encontrada na alínea anterior é óptima.
   (Nota: caso não tenha resolvido a alínea anterior, utilize as condições de optimalidade para determinar a solução óptima do problema).

   (c) Determine a solução óptima do problema utilizando o método das restrições activas partindo da aproximação inicial $(x_0, y_0) = (1.5, 0)$. Utilize a direcção de descida máxima reduzida (com controlo do passo por *backtracking*) para resolver os sub-problemas com restrições de igualdede que vão surgindo.

5. Considere o problema $\min\{f(x) : g(x) = 0\}$.

   (a) Indique as condições necessárias de optimalidade de primeira ordem.

   (b) Utilizando o método de Newton, indique como obter uma aproximação para o sistema não linear obtido na alínea anterior.

   (c) Deduza o método de programação sequencial quadrática.

   (d) Como podem ser interpretada a função objectivo e as restrições do sub-problema resolvido no método de programação sequencial quadrática relativamente à função objectivo e as retrições do problema original?