Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
5º mini-teste
Mestrado em Matemática

11 de Dezembro de 2007 Duração: 30 minutos

Nome do aluno: ______________________________

1. Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
   (a) O método de penalização pode ser aplicado aos problemas com restrições de igualdade ou desigualdade. Exemplifique a função de penalização a utilizar.
   (b) O método de barreia pode ser aplicado aos problemas com restrições de igualdade ou desigualdade. Exemplifique a função de barreira a utilizar.
2. Considere o problema $\min\{f(x) : x \in S\}$.
   (a) Descreva a forma geral dos métodos penalizantes e indique a diferença principal entre os método de penalização e o método de barreira.
   (b) Indique uma vantagem de cada um dos métodos penalização/barreira.
   (c) Para o método de penalização quadrática no problema $\min\{f(x) : g(x) = 0\}$, indique como obter uma aproximação para os multiplicadores de Lagrange.
   (d) Para o método de barreira logarítmica no problema $\min\{f(x) : g(x) \leq 0\}$, indique como obter uma aproximação para os multiplicadores de Lagrange.
3. Considere o problema $\min\{f(x,y) = 2x + 3y : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (a) Determine graficamente a solução óptima x^* e calcule o multiplicador de Lagrange λ^* para este problema através das condições de optimalidade.
   (b) Dado $u > 0$ fixo, determine a solução óptima $x^*(u)$ e o multiplicador de Lagrange $\lambda^*(u)$ do problema obtido com o método de barreira logarítmica com parmetro u.
   (c) Verifique que $\lim_{u\to 0^+} x^*(u) = x^*$ e que $\lim_{u\to 0^+} \lambda^*(u) = \lambda^*$.

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
$4^{\underline{o}}$ mini-teste
Mestrado em Matemática

26 de Novembro de 2007 Duração: 30 minutos

Nome do aluno: ______________________________

1. Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
   (a) A direcção de Newton reduzida é invariante com a base escolhida para $Nu(A)$.
   (b) A direcção de descida máxima reduzida é invariante com a base escolhida para $Nu(A)$.
2. Considere o problema $\min\{f(x) : Ax = b\}$ e admita que f é duas vezes diferenciável.
   (a) Indique como obter uma solução particular de $Ax = b$ e como obter uma base para $Nu(A)$ utilizando o método de eliminação de variável.
   (b) Descreva o problema reduzido.
   (c) Indique as condições de optimalidade de primeira e segunda ordem para o problema reduzido.
   (d) Determine a direcção de Newton clássica ($\alpha = 1$) para o o problema reduzido e, a partir dela, obtenha a direcção de Newton para o problema original.
   (e) Indique como obter uma aproximação para os multiplicadores de Lagrange.
3. Considere o problema $\min\{f(x,y,z) = 0.5x^2 + -0.5y^2 + 4xy + 3xz - 2yz : x - y - z = -1\}$. Partindo da aproximação inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$, determine uma aproximação para a solução do problema dado utilizando o método de Newton. Considere para base de $Nu(A)$ os vectores $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$.

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
3º mini-teste
Mestrado em Matemática

5 de Novembro de 2007 Duração: 30 minutos

Nome do aluno: ____

1. No método de Newton clássico ($x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1}\nabla f(x^k)$):
   (a) há sempre garante de convergência para um ponto estacionário de f?:
   ☐ sim ☐ não
   (b) a direção de Newton é sempre de descida?
   ☐ sim ☐ não
   Em caso negativo, indique como obter uma direção de descida.

2. (a) Escreva a condição de Armijo e interprete geometricamente.

   (b) Considere o problema $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ onde f é uma função duas vezes continuamente diferenciável. Descreva, sumariamente, os dois processos de globalização (pesquisa em linha e regiões de confiança) do método de Newton.

3. Considere o problema $\min f(x, y) = x^4 + 2x^3 + 24x^2 + y^4 + 12y^2$. Partindo da aproximação inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$ e fazendo $\Delta_0 = 1$, $\eta_1 = 1/4$ e $\eta_2 = 3/4$, determine o valor de (x_1, y_1) e Δ_1.

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
2º mini-teste
Mestrado em Matemática

16 de Outubro de 2007 — Duração: 30 minutos

Nome do aluno: ____

1. (a) Considere o problema $\min\{f(x) : h(x) = 0\}$, com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Denote-se por $T(\bar{x})$ o plano tangente a $S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ em $\bar{x}$. Indique quais das seguintes opções está correcta para o caso geral:
   ☐ $T(\bar{x}) \subseteq N(J_h(\bar{x}))$ ☐ $T(\bar{x}) = N(J_h(\bar{x}))$ ☐ $N(J_h(\bar{x})) \subseteq T(\bar{x})$

   (b) No problema $\min\{f(x) : g(x) \leq 0\}$, com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, as condições de optimalidade apenas engloba o conjunt das restrições activas. Indique se esta afirmação é verdadeira ou falsa, justificando suscintamente.

2. Considere o problema $\min\{f(x) : x \in S\}$ onde $S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ e f, h e g são funções duas vezes continuamente diferenciaveis.

   (a) Defina vector tangente a S em $\bar{x} \in S$.

   (b) Defina ponto regular $\bar{x} \in S$.

   (c) Defina restrições activas em $\bar{x} \in S$.

   (d) Indique as condições necessárias de optimalidade de segunda ordem.

3. Considere o problema $\min x^2 - y^2$ sujeito a $x^2 + 2y^2 = 4$.

   (a) Determine os pontos regulares de S.
   (b) Determine analiticamente a(s) solução(ões) óptima(s) do problema.
   (c) Represente graficamente a região admissível S e as curvas de nível.
   (d) Confirme graficamente a solução óptima do problema.

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
1º mini-teste
Mestrado em Matemática

2 de Outubro de 2007 Duração: 30 minutos

Nome do aluno: ____

1. Considere o problema de minimizar f, sujeita às restrições $Ax = b$, com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

   (a) Indique quais das seguintes consições sobre A acha mais relevante para o problema.
   ☐ $n = m$ ☐ $car(A) = m < n$ ☐ $car(A) = n < m$
   ☐ $n < 2m$ ☐ $n < car(A) < m$ ☐ nenhuma das anteriores
   Justifique suscintamente.

   (b) Admita agora que a restrição do problema é do tipo $Ax \leq b$. Indique quais das seguintes consições sobre A acha mais relevante para o problema.
   ☐ $n = m$ ☐ $car(A) = m < n$ ☐ $car(A) = n < m$
   ☐ $n < 2m$ ☐ $n < car(A) < m$ ☐ nenhuma das anteriores
   Justifique suscintamente.

2. Considere o problema de minimizar f, sujeita às restrições $Ax = b$, com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável.

   (a) Defina ponto admissível ($\bar{x}$).

   (b) Defina direcção admissível em $\bar{x}$.

   (c) Defina direcção de descida em $\bar{x}$.

   (d) Indique um conjunto de condições que garanta que um ponto x^* seja minimizante local do problema indicado.

3. Considere o problema sem restrições $\min f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

   (a) Analise os pontos estacionários deste problema.

   (b) Analise os pontos estacionários do problema dado, depois de acrescentada a restrição:
   i. $x_1 + x_2 = 0$; ii. $x_1 - x_2 = 0$.

   (c) Visualize as soluções encontradas, as curvas de nível para a função f e as restrições em $\mathbb{R}^2$.