

João Filipe Queiró

# ANÁLISE COMPLEXA

(Licenciatura em Matemática)

## Índice

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 0. História dos números complexos .....                                                             | 1  |
| 1. Conceitos fundamentais .....                                                                     | 2  |
| 2. Noções topológicas em $\mathbb{C}$ .....                                                         | 8  |
| 3. Limites de funções complexas .....                                                               | 16 |
| 4. Derivação de funções complexas .....                                                             | 19 |
| 5. Sucessões e séries em $\mathbb{C}$ .....                                                         | 24 |
| 6. A função exponencial .....                                                                       | 30 |
| 7. Séries de potências .....                                                                        | 35 |
| 8. Integração de funções complexas de variável real .....                                           | 43 |
| 9. Integração de funções complexas de variável complexa .....                                       | 45 |
| 10. Teorema de Cauchy e consequências .....                                                         | 52 |
| 11. Fórmula integral de Cauchy .....                                                                | 57 |
| 12. Consequências da fórmula integral de Cauchy .....                                               | 59 |
| 13. Teorema de Laurent .....                                                                        | 65 |
| 14. Classificação das singularidades isoladas. Resíduos .....                                       | 70 |
| 15. Teorema dos resíduos .....                                                                      | 74 |
| 16. Aplicações do Teorema dos resíduos ao cálculo de integrais<br>de funções de variável real ..... | 77 |
| 17. A transformada- $z$ .....                                                                       | 81 |
| 18. A transformada de Laplace .....                                                                 | 84 |
| 19. Zeros de funções diferenciáveis .....                                                           | 87 |
| 20. Teorema de Rouché .....                                                                         | 91 |
| 21. Soluções de alguns dos exercícios .....                                                         | 94 |

## 0 História dos números complexos

Foi no século XVI, a propósito da descoberta da fórmula resolvente das equações do 3.º grau, que se “descobriram” os números complexos.

Aplicando a fórmula resolvente à equação  $x^3 = 15x + 4$  o italiano Bombelli obteve

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Aparece aqui a raiz quadrada de um número negativo, o que torna a expressão sem sentido. Mas Bombelli fez cálculos com essas raízes *como se elas existissem*, e usando as propriedades habituais das operações com números.

Como  $121 = 11^2$ , deverá ser  $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$ , pelo que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Como entre os radicandos das raízes  $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$  e  $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$  só há uma diferença de sinal, ocorreu a Bombelli que essas raízes se possam também escrever na forma

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = a - b\sqrt{-1}$$

com  $a$  e  $b$  números reais. E, de facto, tem-se

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

(Exercício: verifique estas igualdades.)

Então

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

e vem, para a solução da equação,

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Portanto, trabalhando com estas *quantidades imaginárias* — as raízes quadradas de números negativos — Bombelli chegou a um resultado *real* correcto.

A partir deste episódio, os números da forma  $a + b\sqrt{-1}$ , com  $a$  e  $b$  reais — hoje chamados *números complexos* — passaram a ser usados nas mais variadas questões e aplicações da Matemática, e foram-se impondo pela sua utilidade. (A partir do século XVIII, com Euler, tornou-se habitual usar a letra  $i$  para designar  $\sqrt{-1}$ .)

Durante mais de dois séculos, a questão da *natureza* dos números complexos — que números são estes ao certo? — permaneceu em suspenso. Só durante o século XIX foram apresentadas respostas satisfatórias para essa questão e foram justificadas as propriedades destes números. Como? *Definindo* os números complexos à custa de entidades conhecidas — por exemplo, como pares ordenados de números reais ou como pontos num plano — sendo as operações definidas da maneira conveniente. Depois mostra-se que as operações gozam das propriedades desejadas e que no conjunto há um subconjunto que é uma “cópia” dos números reais.

# 1 Conceitos fundamentais

**Definição.** O conjunto  $\mathbb{C}$  dos **números complexos** é o conjunto  $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  dos pares ordenados de números reais, munido das duas seguintes operações:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

**Teorema.** Estas operações gozam das mesmas propriedades algébricas que as correspondentes no conjunto dos números reais: comutatividade, associatividade, distributividade da multiplicação relativamente à adição. Os pares  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  são elementos neutros para, respectivamente, a adição e a multiplicação. O simétrico do par  $(a, b)$  é  $(-a, -b)$ . O inverso do par  $(a, b) \neq (0, 0)$  é  $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ . Portanto,  $\mathbb{C}$  é um corpo.

**Demonstração.** Exercício. ■

**Observação.** O conjunto  $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$  é um subcorpo de  $\mathbb{C}$  isomorfo ao corpo  $\mathbb{R}$ . Identificando cada número real  $a$  com o par  $(a, 0)$ , e denotando o par  $(0, 1)$  por  $i$ , temos que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  e

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Note-se que  $i^2 = -1$ .

**Teorema.**  $\mathbb{C}$  não é um corpo ordenado, isto é, em  $\mathbb{C}$  não existe uma relação de ordem total  $<$  compatível com as operações, ou seja satisfazendo, para quaisquer  $z_1, z_2, w \in \mathbb{C}$ ,

$$z_1 < z_2 \vee z_1 > z_2 \vee z_1 = z_2,$$

$$z_1 < z_2 \implies z_1 + w < z_2 + w,$$

$$z_1 < z_2 \wedge w > 0 \implies z_1 w < z_2 w.$$

**Demonstração.** Suponhamos que existe uma tal relação de ordem. Como  $i \neq 0$ , tem-se  $i > 0$  ou  $i < 0$ . Suponhamos que  $i > 0$  (o outro caso é análogo). Multiplicando os membros por  $i$  vem  $i^2 > i \cdot 0$ , isto é,  $-1 > 0$ . Multiplicando ambos os membros por  $-1$  obtemos  $1 > 0$ . Somando  $-1$  a ambos os membros obtemos  $0 > -1$ , contradição. ■

**Observação.** Não faz, portanto, sentido usar os símbolos  $<$  ou  $\leq$  entre números complexos. Quando esses símbolos aparecerem entre dois números, trata-se necessariamente de números reais.

**Definição.** Seja  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Chamamos a  $x$  **parte real** de  $z$  e escrevemos  $x = \operatorname{Re} z$ . Chamamos a  $y$  **parte imaginária** de  $z$  e escrevemos  $y = \operatorname{Im} z$ . Se  $x = 0$  dizemos que  $z$  é **imaginário puro**. O **módulo** de  $z$  é o número real não negativo  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . O **conjugado** de  $z$  é  $\bar{z} = x - iy$ .

**Observação.** A função módulo em  $\mathbb{C}$  estende a função módulo conhecida em  $\mathbb{R}$ .

Para propriedades destes conceitos ver os exercícios 4, 6 e 7 da Folha 1.

**Observação.** À relação  $|z + w| \leq |z| + |w|$  costuma chamar-se “desigualdade triangular”.

**Definição.** Fixemos um sistema de eixos ortogonal num plano. Identificando cada número complexo  $x + iy$  com o ponto de coordenadas  $(x, y)$  obtemos uma representação geométrica de  $\mathbb{C}$  — o chamado **plano complexo**.

**Observação.** Nesta representação, dados dois números complexos  $z$  e  $w$ ,  $|z - w|$  é a distância entre os pontos  $z$  e  $w$ .

**Definição.** Seja  $z$  um número complexo não nulo. À medida do ângulo que a parte positiva do eixo real faz com a semi-recta que vai de 0 para  $z$  (medido no sentido anti-horário) chamamos **argumento** de  $z$  (notação:  $\arg z$ ). Cada número complexo  $z \neq 0$  tem uma infinidade de argumentos, diferindo uns dos outros por múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Ao argumento de  $z$  que pertence ao intervalo  $]-\pi, \pi]$  chamamos **argumento principal** de  $z$ . Notação:  $\arg_0 z$ . Mais geralmente, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , denotamos o argumento de  $z$  pertencente ao intervalo  $]\alpha - \pi, \alpha + \pi]$  por  $\arg_\alpha z$ .

Seja  $z \in \mathbb{C}$  não nulo. Ponhamos  $|z| = r$ . Seja  $\theta$  um argumento de  $z$ . Então  $\operatorname{Re} z = r \cos \theta$  e  $\operatorname{Im} z = r \sin \theta$  e podemos escrever

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

**Definição.** Esta é a chamada **forma trigonométrica** de  $z$ , por oposição à **forma algébrica**  $z = x + iy$ . Para  $\cos \theta + i \sin \theta$  usaremos temporariamente a abreviatura  $\operatorname{cis} \theta$ .

**Observação.** (Igualdade de números complexos escritos na forma trigonométrica) Tem-se  $r_1 \operatorname{cis} \theta_1 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$  se e só se  $r_1 = r_2$  e  $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$  para algum inteiro  $k$ .

**Teorema.** *Tem-se*

- $(r_1 \operatorname{cis} \theta_1)(r_2 \operatorname{cis} \theta_2) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$  e analogamente para mais de dois números ;
- $\overline{r \operatorname{cis} \theta} = r \operatorname{cis}(-\theta)$  ;   •  $\frac{1}{r \operatorname{cis} \theta} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta)$  ;   •  $\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$  ;
- $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$  ,  $n \in \mathbb{Z}$  (fórmula de De Moivre).

**Demonstração.** Exercício. ■

**Teorema.** *Seja  $z = r \operatorname{cis} \theta$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z$  tem  $n$  raízes de índice  $n$  em  $\mathbb{C}$ :*

$$r^{1/n} \operatorname{cis} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) , \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Demonstração.** Escrevendo  $w = \rho \operatorname{cis}(\alpha)$ , tem-se  $w^n = z$  se e só se

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

É simples ver que para  $k = 0, 1, \dots, n-1$  obtemos  $n$  números complexos diferentes e que para qualquer outro  $k \in \mathbb{Z}$  obtemos um número complexo igual a um desses  $n$ . ■

**Observações.** 1) Este resultado mostra que  $\mathbb{C}$  é rico do ponto de vista algébrico.

2) Note-se que as  $n$  raízes de índice  $n$  de um número complexo estão nos vértices de um polígono regular de  $n$  lados centrado na origem.

**Teorema.** (Teorema Fundamental da Álgebra para polinómios de graus 2, 3 e 4)  
*Se  $p(z)$  for um polinómio de grau 2, 3 ou 4 com coeficientes complexos,  $p(z)$  tem pelo menos uma raiz complexa.*

**Demonstração.** Isto é consequência do teorema anterior e do facto de que as fórmulas resolventes para equações de graus 2, 3 e 4 só utilizam raízes. ■

Adiante estudaremos a mesma questão para polinómios de qualquer grau.

---

## Exercícios

1. Escreva na forma algébrica:

(a)  $(3 - 2i)(4 + 5i) + (3 - 2i)(4 - 5i)$ ;      (b)  $(2 - i)(4 + 3i)(5 + 2i)$ ;

(c)  $\frac{3 - 2i}{4 + 3i}$ ;      (d)  $\frac{2 - 2i}{7 + i} + \frac{3 + 4i}{2 - 3i}$ ;

(e)  $i^4 - 3i^3 + 4i^2 + 2i - 6$ ;      (f)  $\left(\frac{2i}{1 + i}\right)^4$ .

2. Encontre dois números cuja soma seja 5 e cujo produto seja 9.

3. Resolva em  $\mathbb{C}$  a equação  $z^2 - (3 + i)z + (2 + 2i) = 0$ .

4. Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:

(a)  $\overline{\overline{z}} = z$ ;      (b)  $\overline{-z} = -\overline{z}$ ;      (c)  $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ ;  
(d)  $\overline{z\overline{w}} = \overline{z} \cdot w$ ;      (e)  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ ;      (f)  $\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$ ;  
(g)  $\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$ ;      (h)  $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ ;      (i)  $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$ ;  
(j)  $|-z| = |z|$ ;      (k)  $|\overline{z}| = |z|$ ;      (l)  $z\overline{z} = |z|^2$ ;  
(m)  $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ ;      (n)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ ;      (o)  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ .

5. (a) Mostre que, se um número complexo  $\lambda$  for raiz de um polinómio  $p(z)$  com coeficientes reais, então  $\overline{\lambda}$  também é raiz de  $p(z)$ .

(b) Conclua que polinómio com coeficientes reais de grau ímpar tem um número ímpar de raízes reais (e portanto, necessariamente, pelo menos uma raiz real).

6. Sendo  $z$  e  $w$  números complexos quaisquer, prove que:

(a)  $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$ ;  
(b)  $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$ ;  
(c)  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ .

7. Demonstre as seguintes propriedades do módulo de números complexos:
- (a)  $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ;      (b)  $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ;
- (c)  $|z \pm w| \leq |z| + |w|$ ;      (d)  $||z| - |w|| \leq |z \pm w|$ .
8. (a) Calcule a distância entre  $-2 + 3i$  e  $1$ .
- (b) Mostre que se tem  $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1$  se e só se  $\operatorname{Re} z > 0$ .
9. Represente na forma trigonométrica os seguintes números complexos:
- (a)  $-5$ ;      (b)  $5i$ ;      (c)  $-2 - 2i$ ;
- (d)  $1 + \sqrt{3}i$ ;      (e)  $3\sqrt{3} + 3i$ ;      (f)  $(1-i)(-1 + \sqrt{3}i)$ .
10. Escreva  $\left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^{20}$  na forma algébrica.
11. Mostre que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , se tem  $\left( \frac{1+i}{1-i} \right)^n = \operatorname{cis} \left( n \frac{\pi}{2} \right)$ .
12. Determine e represente geometricamente:
- (a) as raízes cúbicas de  $1$ ;      (b) as raízes cúbicas de  $-1$ ;
- (c) as raízes quadradas de  $i$ ;      (d) as raízes quartas de  $-1$ ;
- (e) as raízes quartas de  $2i$ ;      (f) as raízes de índice  $n$  de  $1$ .
13. Determine as raízes cúbicas de  $-\frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}}i$  e represente-as geometricamente.
14. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , calcule as raízes de índice  $n$  de  $1$ , mostre que constituem um grupo para a multiplicação de complexos e que esse grupo é cíclico (isto é, existe pelo menos um elemento do qual todos os outros são potências).
15. Escreva os seguintes polinómios como produtos de factores de grau 1:
- (a)  $z^2 + 1$ ;      (b)  $z^4 - 1$ ;      (c)  $z^2 - 2z + 5$ .

16. Determine as quatro raízes da equação  $z^4 + 4 = 0$  e use-as para escrever o polinómio  $z^4 + 4$  como produto de factores de grau 2 com coeficientes reais.
17. Para  $n = 2, 3, 4, 5, 6$ , exprima  $\cos n\theta$  em função de  $\cos \theta$ .  
(Sugestão: Usar a fórmula de De Moivre.)
18. Mostre que qualquer polinómio de grau 2, 3 ou 4 com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz em  $\mathbb{C}$ .
19. Sendo  $|z| = 4$ ,  $\operatorname{Re} z = -2$  e  $\operatorname{Im} z^2 > 0$ , ache o argumento principal de  $z$ .
20. Determine todos os números complexos  $z$  que satisfazem  $\bar{z} = z^3$ .
21. Interpretando  $\arg(z)$  como um conjunto, mostre que:
- (a)  $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$  para quaisquer  $z$  e  $w$  não nulos.
  - (b)  $\arg(z^2) \neq 2\arg(z)$ .
  - (c)  $\arg_0(zw)$  não é necessariamente igual a  $\arg_0(z) + \arg_0(w)$ .

## 2 Noções topológicas em $\mathbb{C}$

**Definição.** Sendo  $z \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ , a **bola aberta de centro  $z$  e raio  $r$**  é o conjunto

$$B(z, r) = \{w : |w - z| < r\}.$$

(A uma bola aberta de centro em  $z$  chama-se por vezes uma **vizinhança** de  $z$ .)

A **bola fechada de centro  $z$  e raio  $r$**  é o conjunto

$$\overline{B}(z, r) = \{w : |w - z| \leq r\}.$$

A **circunferência de centro  $z$  e raio  $r$**  é o conjunto

$$C(z, r) = \{w : |w - z| = r\}.$$

Seja  $A \subseteq \mathbb{C}$ . A diz-se **aberto** se, qualquer que seja  $z \in A$ , existir  $r > 0$  tal que  $B(z, r) \subseteq A$ . A diz-se **fechado** se  $\mathbb{C} \setminus A$  for aberto.

**Teorema.**

- $\emptyset$  e  $\mathbb{C}$  são conjuntos abertos.
- $B(z, r)$  é um conjunto aberto.
- $\overline{B}(z, r)$  é um conjunto fechado.

**Demonstração.** Exercício. ■

**Teorema.**

- Qualquer reunião de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- Qualquer intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- Uma intersecção arbitrária de conjuntos abertos não é necessariamente um conjunto aberto.

**Demonstração.** Exercício. ■

**Definição.** Seja  $A \subseteq \mathbb{C}$ . A diz-se **limitado** se existir uma bola que o contém.

**Teorema.**  $A$  é limitado se e só se existir uma bola centrada na origem que o contém, isto é, se e só se existir  $R > 0$  tal que, para todo  $z \in A$ , se tem  $|z| \leq R$ .

**Demonstração.** Exercício. ■

**Definição.** Seja  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Dizemos que  $A$  é **desconexo** se for possível dividi-lo em duas partes separadas usando dois conjuntos abertos. Formalmente,  $A$  é desconexo se existirem conjuntos abertos  $V$  e  $W$  tais que  $A \subseteq V \cup W$  com  $A \cap V$  e  $A \cap W$  não vazios e disjuntos. (Ao par  $V, W$  chama-se uma **desconexão** de  $A$ .) A diz-se **conexo** se não for desconexo.

**Teorema.** (Topologia e Análise Linear) Defina-se conjunto conexo em  $\mathbb{R}$  exactamente da mesma forma que em  $\mathbb{C}$ . Seja  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Então  $A$  é conexo se e só se for um intervalo.

**Definição.** Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Um **caminho** em  $A$  é uma função contínua  $\varphi: [a, b] \rightarrow A$ . Diz-se que o caminho  $\varphi$  **une** os pontos  $\varphi(a)$  e  $\varphi(b)$ . Um subconjunto  $A$  de  $X$  diz-se **conexo por caminhos** se dados dois quaisquer pontos de  $A$  existir um caminho em  $A$  que os une.

**Observações.** 1) Dizer que  $\varphi$  é contínua significa simplesmente que as funções reais de variável real  $\operatorname{Re} \varphi$  e  $\operatorname{Im} \varphi$  são contínuas. Isto é, qualquer que seja  $t_0$ , para todo o  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |\operatorname{Re} \varphi(t) - \operatorname{Re} \varphi(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, para todo o  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$|t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow |\operatorname{Im} \varphi(t) - \operatorname{Im} \varphi(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como  $\operatorname{Re} \varphi(t) - \operatorname{Re} \varphi(t_0) = \operatorname{Re} [\varphi(t) - \varphi(t_0)]$  e  $\operatorname{Im} \varphi(t) - \operatorname{Im} \varphi(t_0) = \operatorname{Im} [\varphi(t) - \varphi(t_0)]$  e como, para qualquer complexo  $z$ , se tem  $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ , vem que, sendo  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , se tem

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon.$$

- 2) A imagem (ou contradomínio) de um caminho  $\varphi$  é uma **curva**. Mas a função  $\varphi$  diz como é que a curva é percorrida à medida que  $t$  percorre o intervalo  $[a, b]$ .
- 3) Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$  e sejam  $u, v$  pontos de  $A$ . Se existir um caminho em  $A$  que une  $u$  e  $v$ , existe um caminho em  $A$  com a mesma imagem que  $\varphi$  que une  $v$  e  $u$ .
- 4) Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$  e sejam  $u, v, w$  pontos de  $A$ . Se existir um caminho em  $A$  que une  $u$  e  $v$  e um caminho em  $A$  que une  $v$  e  $w$ , existe um caminho em  $A$  que une  $u$  e  $w$ .

**Teorema.** *Um conjunto conexo por caminhos é conexo.*

**Demonstração.** Vamos por absurdo. Suponhamos que  $A$  é conexo por caminhos mas não é conexo. Então existem abertos  $V$  e  $W$  tais que  $A \subseteq V \cup W$  com  $A \cap V$  e  $A \cap W$  não vazios e disjuntos.

Seja  $v$  um ponto de  $A \cap V$  e seja  $w$  um ponto de  $A \cap W$ . Pela hipótese, existe um caminho em  $A$  que os une. Seja esse caminho  $\varphi: [a, b] \rightarrow A$ . Tem-se portanto  $\varphi(a) = v$  e  $\varphi(b) = w$  e todos os pontos  $\varphi(t)$ , com  $t \in [a, b]$ , pertencem a  $A$ .

Definamos os conjuntos  $X = \{t : \varphi(t) \in V\}$  e  $Y = \{t : \varphi(t) \in W\}$ . Vamos ver que  $X, Y$  constituem uma desconexão de  $[a, b]$ . Claramente,  $X$  e  $Y$  são disjuntos e  $[a, b] = X \cup Y$ . Além disso,  $X$  é não vazio porque  $a \in X$  e  $Y$  é não vazio porque  $b \in Y$ .

Seja  $t_0 \in X$ . Então  $\varphi(t_0) \in V$ . Como  $V$  é aberto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(\varphi(t_0), \varepsilon) \subseteq V$ . Pela continuidade de  $\varphi$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon$ . Logo, para todos os  $t$  em  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ , as imagens  $\varphi(t)$  pertencem a  $B(\varphi(t_0), \varepsilon)$ . Como esta bola está contida em  $V$ , essas imagens pertencem a  $V$  e, portanto, todos os  $t$  em  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$  pertencem a  $X$ , por definição deste conjunto. Provamos assim que  $X$  é aberto. Com um raciocínio análogo, vemos que  $Y$  também é aberto. Logo,  $X, Y$  constituem uma desconexão de  $[a, b]$  e  $[a, b]$  é desconexo, absurdo. ■

**Nota.** Note-se que, se  $t_0$  for  $a$ , o raciocínio só prova que existe  $\delta > 0$  tal que  $[a, a + \delta[ \subseteq X$ . Portanto,  $X$  é “aberto para a direita de  $a$ ”. De forma análoga prova-se que  $Y$  é aberto “para a esquerda de  $b$ ”. Juntando ao primeiro conjunto um intervalo da forma  $]a - r, a[$  e ao segundo um intervalo da forma  $]b, b + r[$ , obtemos uma desconexão de  $[a, b]$ : dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que são abertos, cuja reunião contém  $[a, b]$  e cujas intersecções com  $[a, b]$  são disjuntas e não vazias.

**Observação.** O subconjunto de  $\mathbb{C}$   $A = \{x + i \sin \frac{1}{x} : x > 0\} \cup \{iy : -1 \leq y \leq 1\}$  é conexo mas não é conexo por caminhos. Este exemplo mostra que o recíproco do teorema anterior não é em geral verdadeiro. Mas se o conjunto em causa for aberto o recíproco é verdadeiro. Este é o conteúdo do resultado seguinte.

**Teorema.** *Se um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{C}$  for aberto e conexo então é conexo por caminhos.*

**Demonstração.** Se  $A = \emptyset$  o teorema é trivial. Suponhamos então que  $A \neq \emptyset$ .

Fixemos um elemento  $u$  qualquer em  $A$  e consideremos o subconjunto de  $A$

$$G = \{z \in A : \text{existe um caminho em } A \text{ que une } u \text{ a } z\}.$$

Vamos provar que  $G = A$  e, portanto,  $A$  é conexo por caminhos.

Suponhamos que  $G \neq A$ . Vamos ver que  $G$  e  $A \setminus G$  são ambos abertos.

Começemos por  $G$ . Seja  $z$  um ponto qualquer de  $G$ . Então existe um caminho que une  $u$  a  $z$ , por definição de  $G$ . Por outro lado, como  $A$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B(z, r) \subseteq A$ . Mas para qualquer ponto  $w$  desta bola existe evidentemente um caminho que une  $z$  a  $w$ : basta tomar o segmento de recta de  $z$  para  $w$ , correspondente à função  $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$  definida por  $\varphi(t) = (1 - t)z + tw$ . Então existe um caminho que une  $u$  a  $w$  e, portanto,  $w$  pertence a  $G$ . Como  $w$  era qualquer em  $B(z, r)$ , provámos que  $B(z, r)$  está contida em  $G$ . Como  $z$  era qualquer em  $G$ , provámos que  $G$  é aberto.

Passemos a  $A \setminus G$ . Seja  $z$  um ponto qualquer de  $A \setminus G$ . Então não existe nenhum caminho em  $A$  que une  $u$  a  $z$ . Como  $A$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B(z, r) \subseteq A$ . Vamos ver que esta bola está totalmente contida em  $A \setminus G$ . Se não estivesse, existiria um ponto  $w$  nessa bola que pertenceria a  $G$ . Mas então existiria um caminho em  $A$  que une  $u$  a  $w$ . Como obviamente existe um caminho que une  $w$  ao centro da bola  $z$ , teríamos um caminho em  $A$  que une  $u$  a  $z$ , contra a suposição de que  $z \notin G$ . Logo,  $A \setminus G$  é também aberto.

Como  $G$  e  $A \setminus G$  são ambos abertos e são não vazios e disjuntos, formam uma desconexão de  $A$ , o que contradiz a hipótese de que  $A$  é conexo. ■

Com a mesma técnica de demonstração podemos obter um resultado mais forte.

**Teorema.** *Se um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{C}$  for aberto e conexo então, dados dois quaisquer pontos de  $A$ , existe um caminho em  $A$  que os une cuja imagem é uma linha poligonal composta por segmentos horizontais e verticais.*

**Demonstração.** Fixemos um elemento  $u$  qualquer em  $A$ . Consideremos o subconjunto  $G$  de  $A$  formado pelos pontos  $z$  para os quais existe um caminho em  $A$  que une  $u$  a  $z$  e cuja imagem é uma linha poligonal composta por segmentos horizontais e verticais.

Seguindo o raciocínio da demonstração anterior, com as necessárias adaptações, prova-se que  $G = A$  e, portanto,  $A$  tem a propriedade desejada. ■

**Definição.** Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Um número complexo  $z_0$  diz-se um **ponto de acumulação** de  $A$  se qualquer bola aberta centrada em  $z_0$  contiver pelo menos um ponto de  $A$  diferente de  $z_0$ .

Um ponto  $z_0$  de  $A$  que não seja de acumulação, isto é, para o qual exista  $r > 0$  tal que  $B(z_0, r) \cap A = \{z_0\}$ , chama-se um **ponto isolado** de  $A$ .

**Observações.** 1) Note-se que um ponto de acumulação de  $A$  pode pertencer a  $A$  ou não.

2) Se  $z_0$  for um ponto de acumulação de  $A$ , existem pontos de  $A$  arbitrariamente próximos de  $z_0$ . Mais: em qualquer bola aberta centrada em  $z_0$  existe uma infinidade de pontos de  $A$ . (Prove.)

3) Se  $A$  for aberto, todos os pontos de  $A$  são pontos de acumulação de  $A$ . (Prove.)

**Teorema.** Um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{C}$  é fechado se e só se contiver todos os seus pontos de acumulação.

**Demonstração.**  $(\Rightarrow)$  Suponhamos que  $A$  é fechado. Seja  $z_0$  um ponto de acumulação de  $A$ . Se  $z_0$  não pertencesse a  $A$ , pertenceria a  $\mathbb{C} \setminus A$ . Mas, como  $A$  é fechado,  $\mathbb{C} \setminus A$  é aberto. Logo, existiria  $r > 0$  tal que  $B(z_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus A$ . Logo, nenhum ponto de  $B(z_0, r)$  pertenceria a  $A$ , o que contradiria a hipótese de  $z_0$  ser um ponto de acumulação de  $A$ .

$(\Leftarrow)$  Suponhamos que  $A$  contém todos os seus pontos de acumulação. Vamos provar que  $\mathbb{C} \setminus A$  é aberto. Seja  $z_0$  um ponto de  $\mathbb{C} \setminus A$ , isto é  $z_0 \notin A$ . Se  $z_0$  não é um ponto de  $A$ , então, pela hipótese, não é um ponto de acumulação de  $A$ . Logo, existe uma bola aberta centrada em  $z_0$  que não contém nenhum ponto de  $A$ , isto é, essa bola está contida em  $\mathbb{C} \setminus A$ . Portanto,  $\mathbb{C} \setminus A$  é aberto e  $A$  é fechado. ■

**Exemplo.** Seja

$$A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Então 0 é o único ponto de acumulação de  $A$ . Como pertence a  $A$ , este é fechado. Todos os outros pontos de  $A$  são isolados.

(Exercício: para cada um desses outros pontos determine uma bola aberta centrada nele que não contenha nenhum outro ponto de  $A$ .)

---

## Exercícios

22. Interprete geometricamente as seguintes funções no plano complexo:

- (a) A aplicação  $z \mapsto z + w$ , para  $w$  dado.
- (b) A aplicação  $z \mapsto tz$ , para  $t \geq 0$  dado.
- (c) A aplicação  $z \mapsto \text{cis}(\theta).z$ , para  $\theta$  dado.

23. Para cada uma das seguintes condições, represente geometricamente o conjunto dos números complexos que a satisfazem, diga se é aberto, fechado ou nem uma coisa nem outra:

- (a)  $|z - (1 + i)| < 2$ ;      (b)  $\text{Re}z \geq -1$ ;      (c)  $1 \leq \text{Im}z < 2$ ;
- (d)  $3 < |z - i| < 4$ ;      (e)  $|z - i| < 3 \vee |z - i| > 4$ ;      (f)  $|z - 2| = |z - 3i|$ ;
- (g)  $\left| \frac{z + i}{2} \right| < 1$ ;      (h)  $\text{Re}(z^{-1}) < 1/4$ ;      (i)  $|z - 2| + |z + 2| = 5$ ;
- (j)  $\text{Re}(z^2) < 0$ ;      (k)  $u + r \text{ cis } t, 0 \leq t \leq 2\pi$ ;      (l)  $tu, t \geq 0$ ;
- (m)  $(1 - t)u + tv, 0 \leq t \leq 1$ ;      (n)  $\alpha < \arg_0(z) < \beta$       (o)  $\alpha < \arg_0(z - z_0) < \beta$ .

24. Determine a maior bola aberta centrada em  $2i$  que não contém  $3 - 4i$ .

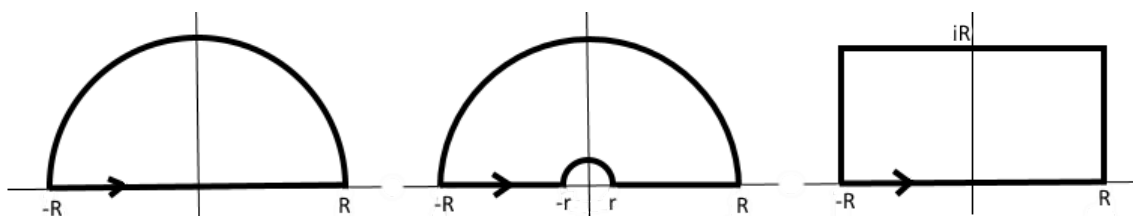
25. Prove que:

- (a)  $\emptyset$  e  $\mathbb{C}$  são conjuntos abertos.
- (b)  $B(z, r)$  é um conjunto aberto.
- (c)  $\overline{B}(z, r)$  é um conjunto fechado.

26. Prove que:

- (a) Qualquer reunião de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- (b) Qualquer intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- (c) Uma intersecção arbitrária de conjuntos abertos não tem de ser um conjunto aberto.

27. Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Prove que  $A$  é aberto se e só se for uma reunião de bolas abertas.
28. Prove que  $A$  é limitado se e só se existir uma bola centrada na origem que o contém, isto é, se e só se existir  $R > 0$  tal que, para todo o  $z \in A$ , se tem  $|z| \leq R$ .
29. Prove que  $\emptyset$  e os conjuntos singulares são conexos.
30. Prove que um conjunto finito com mais de um elemento é desconexo.
31. A intersecção de dois conjuntos conexos será necessariamente um conjunto conexo?
32. Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$  e sejam  $u, v, w$  pontos de  $A$ . Prove que, se existir um caminho em  $A$  que une  $u$  e  $v$  e um caminho em  $A$  que une  $v$  e  $w$ , então existe um caminho em  $A$  que une  $u$  e  $w$ .
33. Apresente funções explícitas para os caminhos que descrevem as três curvas seguintes no sentido indicado.



34. Para cada um dos seguintes subconjuntos de  $\mathbb{C}$ , diga se é conexo ou desconexo e, no caso de ser desconexo, indique uma desconexão.
- (a)  $B(0, 1) \cup B(3, 1)$ ;
  - (b)  $B(1, 1) \cup B(3, 1)$ ;
  - (c)  $\overline{B}(1, 1) \cup B(3, 1)$ .
35. Prove que  $\mathbb{C}$  é conexo.
36. Prove que as bolas em  $\mathbb{C}$  são conjuntos conexos.

37. Justifique porque é que o conjunto  $A = \{x + i \sin \frac{1}{x} : x > 0\} \cup \{iy : -1 \leq y \leq 1\}$  é conexo mas não é conexo por caminhos.
38. Para cada um dos seguintes conjuntos  $A$  e pares de pontos  $z$  e  $w$ , indique (se possível) uma linha poligonal composta por segmentos horizontais e verticais, totalmente contida em  $A$ , que une  $z$  e  $w$ .
- (a)  $A = B(0, 2)$ ,  $z = 1 + i$ ,  $w = 1 - i$ ;
  - (b)  $A = C(0, 1)$ ,  $z = -i$ ,  $w = i$ ;
  - (c)  $A = B(0, 2) \setminus \overline{B}(0, 1)$ ,  $z = \sqrt{2}$ ,  $w = -\sqrt{2}$ .
39. Se  $z_0$  for um ponto de acumulação de  $A$ , mostre que em qualquer bola aberta centrada em  $z_0$  existe uma infinidade de pontos de  $A$ .
40. Prove que, se  $A$  for aberto, todos os pontos de  $A$  são pontos de acumulação de  $A$ .
41. Considere o conjunto  $A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ . Mostre que todos os elementos de  $A$  não nulos são pontos isolados de  $A$ , indicando, para cada um desses pontos, uma bola aberta centrada nele que não contenha nenhum outro ponto de  $A$ .
42. Determine os pontos de acumulação dos conjuntos:
- (a)  $\left\{ \frac{i}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ;
  - (b)  $\left\{ \frac{1}{m} + i \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ;
  - (c)  $\{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

### 3 Limites de funções complexas

**Definição.** Consideremos uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Suponhamos que  $z_0$  é um ponto de acumulação de  $A$ . Seja  $w \in \mathbb{C}$ . Diz-se que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$$

se a distância de  $f(z)$  a  $w$  pode ser tornada tão pequena quanto se queira desde que se tome  $z$  suficientemente próximo de  $z_0$ , isto é, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in A \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon.$$

**Observações.** 1. Note-se que, nesta definição,  $f$  não precisa de estar definida em  $z_0$ . Mas mesmo que  $f(z_0)$  exista, não tem de ser igual a  $w$ .

2. Nesta definição, a importância de  $z_0$  ser um ponto de acumulação de  $A$  vem de que, se não fosse, existiria  $\xi > 0$  tal que  $B(z_0, \xi)$  não contém nenhum ponto de  $A$ . E então a condição da definição seria verdadeira para qualquer  $w \in \mathbb{C}$ .

3. O facto de  $z_0$  ser um ponto de acumulação de  $A$  garante que o limite de  $f(z)$  quando  $z$  tende para  $z_0$ , se existir, é único. Porquê? Se também se tivesse  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w'$ , com  $w' \neq w$ , tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}|w - w'|$  existiriam  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que, para todo o  $z \in A$ , se tem

$$\begin{aligned} 0 < |z - z_0| < \delta_1 &\Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon \quad \text{e} \\ 0 < |z - z_0| < \delta_2 &\Rightarrow |f(z) - w'| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $z_0$  é um ponto de acumulação de  $A$ , existe  $z \in A$  tal que  $0 < |z - z_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$  e para um tal  $z$  ter-se-ia

$$|w - w'| = |w - f(z) + f(z) - w'| \leq |w - f(z)| + |f(z) - w'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

contradizendo a escolha de  $\varepsilon$ .

4. Na maioria das situações que vamos considerar,  $A$  será um conjunto aberto, o que, como já se referiu, garante que todos os seus pontos são de acumulação.

**Teorema.** Tem-se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$  se e só se  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w$ .

**Demonstração.** Exercício (recorde-se o exercício 7 da Folha 1). ■

**Observação.** Valem para funções complexas as propriedades da álgebra dos limites conhecidas para funções reais (limite da soma, do produto, do quociente). As demonstrações são análogas ao caso real.

**Definição.** Consideremos uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Seja  $z_0$  um ponto de  $A$  que é de acumulação. Diz-se que  $f$  é **contínua em**  $z_0$  se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

$f$  é **contínua em**  $A$  se o for em todos os pontos de  $A$ .

**Teorema.** Valem para funções complexas as propriedades fundamentais das funções contínuas conhecidas para funções reais (continuidade da soma, do produto, do quociente, da composição).

**Demonstração.** Exercício. ■

**Exemplos.**

- As funções constantes são contínuas em todo o plano.
- As funções  $z$ ,  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $\bar{z}$  e  $|z|$  são contínuas em todo o plano.
- Os polinómios são funções contínuas em todo o plano.
- Sendo  $p(z)$  e  $q(z)$  polinómios, a função racional  $\frac{p(z)}{q(z)}$  é contínua em todo o plano excepto nos zeros de  $q(z)$ .
- A função  $\arg_0 z$  não é contínua em  $\mathbb{R}^-$ .

---

## Exercícios

43. Prove que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$  se e só se  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w$ .

44. Mostre que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$  não existe.

45. Verifique se existem os limites, quando  $z$  tende para 0, das seguintes funções:

(a)  $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$ ;

(b)  $\frac{|z|}{z}$ ;

(c)  $\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ .

46. Prove que as funções constantes são contínuas em todo o plano.

47. Prove que as funções  $z$ ,  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $\bar{z}$  e  $|z|$  são contínuas em todo o plano.

48. Prove que os polinómios são funções contínuas em todo o plano.

49. Prove que a função  $\arg_0 z$  não é contínua em  $\mathbb{R}^-$ .

50. Calcule os seguintes limites:

(a)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 - 27}{z - 3}$ ;      (b)  $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i}$ .

## 4 Derivação de funções complexas

Para uma função  $f$  complexa de uma variável real, a sua diferenciabilidade define-se como em Análise Infinitesimal I e a diferenciabilidade de  $f$  é equivalente às de  $\operatorname{Re} f$  e  $\operatorname{Im} f$ , tendo-se  $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$ .

Passemos ao caso de funções de uma variável complexa.

**Definição.** Consideremos uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Diz-se que  $f$  é **diferenciável** em  $z \in A$  se existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

A este limite chama-se **derivada** de  $f$  em  $z$ . (Notação:  $f'(z)$ .)

$f$  é diferenciável em  $A$  se o for em todos os pontos de  $A$ . Nesse caso fica definida em  $A$  uma nova função  $f'$ , a **função derivada** de  $f$ .

**Observações.** 1) O limite que define  $f'(z)$  pode ser apresentado assim:  $\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ .

2) Valem para funções complexas, com as mesmas demonstrações, as proposições conhecidas para funções reais sobre a derivada da soma, do produto, do quociente e da composição de funções diferenciáveis.

**Teorema.** Se  $f$  é diferenciável em  $z$ , é contínua em  $z$ .

**Demonstração.** Tem-se

$$\lim_{w \rightarrow z} [f(w) - f(z)] = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} (w - z) = f'(z) \lim_{w \rightarrow z} (w - z) = 0$$

e portanto  $\lim_{w \rightarrow z} f(w) = f(z)$ . ■

**Exemplos.** 1) São diferenciáveis em todo o plano as funções constantes e a função identidade, com derivadas 0 e 1, respectivamente.

2) Os polinómios são diferenciáveis em todo o plano.

3) A função  $\bar{z}$ , que é contínua em  $\mathbb{C}$ , não é diferenciável em nenhum ponto, porque

$$\frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

e isto não tem limite quando  $h$  tende para 0.

Seja  $f$  uma função complexa de variável complexa. Sendo  $z = x + iy$ , escreva-se

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

**Teorema.** Se  $f$  é diferenciável em  $z = x + iy$ , existem as derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  no ponto  $(x, y)$  e tem-se

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

**Demonstração.** Por hipótese, existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Considerando neste limite o acréscimo  $h$  só com valores reais, obtemos a primeira das expressões indicadas para  $f'(z)$ . Tomando  $h$  com valores imaginários puros, digamos  $h = ik$  com  $k \in \mathbb{R}$ , obtemos a segunda expressão para  $f'(z)$ . ■

**Corolário.** Se  $f$  é diferenciável em  $z = x + iy$ , tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

(condições de Cauchy-Riemann).

**Observação.** Uma função pode satisfazer as condições de Cauchy-Riemann num ponto e não ser diferenciável nesse ponto. Exemplo: Consideremos a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como tomando o valor 0 sobre os eixos e 1 fora dos eixos. Então, trivialmente, as quatro derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  são nulas no ponto  $(0, 0)$  mas a função  $f$  não é diferenciável na origem (nem contínua é).

Portanto, as condições de Cauchy-Riemann são apenas condições necessárias para a diferenciabilidade.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Seja  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  uma função definida num aberto  $A$  e seja  $z = x + iy \in A$ . Se as quatro derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

existem e são contínuas numa vizinhança do ponto  $(x, y)$  e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann em  $(x, y)$ , pode provar-se que  $f$  é diferenciável em  $z$ . Isto significa que, para a maioria dos efeitos práticos, as condições de Cauchy-Riemann são necessárias e suficientes para a diferenciabilidade de uma função.

Uma aplicação interessante das expressões para  $f'(z)$  vistas no Teorema,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

é o resultado seguinte.

**Teorema.** *Seja  $A \subseteq \mathbb{C}$  aberto e conexo e seja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $f' = 0$  em  $A$  então  $f$  é uma função constante.*

**Demonstração.** Como  $f' = 0$  em  $A$ , as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  são nulas em  $A$ .

Vamos ver que  $f$  é constante em qualquer segmento horizontal ou vertical contido em  $A$ . Seja por exemplo  $S$  um segmento vertical em  $A$ , digamos correspondente à abscissa  $x_0$ . Então  $S$  é um conjunto da forma  $\{x_0 + it : t \in [a, b]\}$  para algum intervalo  $[a, b]$ . Definamos nesse intervalo a função  $\varphi(t) = u(x_0, t)$ . Então  $\varphi' = \frac{\partial u}{\partial y}$  e sabemos que esta derivada parcial é 0. Logo,  $\varphi$  é constante e portanto  $u$  é constante no segmento  $S$ . Da mesma forma provamos que  $v$  é constante em  $S$  e analogamente  $u$  e  $v$  são constantes em qualquer segmento horizontal ou vertical contido em  $A$ .

Logo, a função  $f$  é constante em qualquer segmento horizontal ou vertical contido em  $A$ . Como, por  $A$  ser aberto e conexo, quaisquer dois pontos de  $A$  podem ser unidos por uma linha poligonal composta por segmentos horizontais e verticais totalmente contida em  $A$ , provamos que

$$\forall_{z, w \in A} \quad f(z) = f(w)$$

o que implica que  $f$  é constante em  $A$ . ■

---

## Exercícios

51. Para cada uma das seguintes funções, determine o seu domínio e calcule a sua derivada:

- (a)  $\frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}$  ;  
(b)  $\frac{1}{(z^3 - 1)(z^2 + 2)}$  .

52. Prove que a função  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$  só é diferenciável na origem.

53. Mostre que as funções  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ ,  $\bar{z}$  e  $|z|$  não são diferenciáveis em nenhum  $z \in \mathbb{C}$ .

54. Verifique as condições de Cauchy-Riemann para a função  $z^2$ .

55. Para cada uma das seguintes funções, verifique as condições de Cauchy-Riemann e, usando as derivadas parciais calculadas, determine a derivada da função:

- (a)  $f(z) = z^3$  ;  
(b)  $f(z) = \frac{1}{z}$  .

56. Seja  $f$  a função de variável complexa definida por  $f(x + iy) = \sqrt{|xy|}$ .

- (a) Mostre que  $f$  satisfaz as condições de Cauchy-Riemann no ponto 0.  
(b) Mostre que  $f$  não é diferenciável nesse ponto. (Sugestão: Tome  $h$  a tender para 0 ao longo da semirecta  $h = r \operatorname{cis}(\theta)$ , com  $\theta$  fixo.)

57. Seja  $f$  diferenciável em  $\mathbb{C}$ . Prove que, se o contradomínio de  $f$  estiver contido no eixo real, então  $f$  é constante.

58. (a) Determine uma função  $f$  diferenciável em  $\mathbb{C}$  que satisfaça

$$\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + xy$$

onde  $z = x + iy$ . (Sugestão: Use as condições de Cauchy-Riemann.)

- (b) Será  $f$  a única função nestas condições?

59. Encontre uma função diferenciável  $f$  tal que  $\operatorname{Im} f(z) = x - 5xy$  e  $f(0) = 0$ .

60. Determine as constantes reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  para as quais a função  $x + ay + i(bx + cy)$  é diferenciável em todo o plano.

61. Seja  $f(z + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Supondo que as segundas derivadas parciais de  $u$  e  $v$  existem e são contínuas, prove que, se  $f$  for diferenciável, então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Estas igualdades costumam traduzir-se dizendo que  $u$  e  $v$  são **funções harmônicas**.

Conclui-se que, se uma função  $u$  não for harmônica, ela não pode ser a parte real de uma função diferenciável (e analogamente para  $v$ ).

## 5 Sucessões e séries em $\mathbb{C}$

**Definição.** Dada uma sucessão  $u_1, u_2, u_3, \dots$  de números complexos, diz-se que ela **converge** ou **tende** para um número  $w$ , e escreve-se  $u_n \rightarrow w$  ou  $\lim u_n = w$ , se a distância de  $u_n$  a  $w$  pode ser tornada tão pequena quanto se queira desde que se tome  $n$  suficientemente grande, isto é, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - w| < \varepsilon.$$

**Observações.** 1) A definição de  $u_n \rightarrow w$  é equivalente a afirmar que a sucessão real  $|u_n - w|$  converge para 0. Daqui sai, trivialmente, que  $u_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |u_n| \rightarrow 0$ .

2) O uso da notação  $\lim u_n = w$  justifica-se pela unicidade de  $w$ . Isto é, uma sucessão não pode convergir para dois números diferentes: se pudesse acontecer  $u_n \rightarrow w$  e  $u_n \rightarrow w'$ , com  $w \neq w'$ , então, escolhendo  $\varepsilon = \frac{|w - w'|}{3}$ , ter-se-ia, para  $n$  suficientemente grande, que  $u_n$  pertenceria a  $B(w, \varepsilon)$  e também pertenceria a  $B(w', \varepsilon)$ , o que é absurdo, pois essas duas bolas são disjuntas. Não há portanto problema em dizer que  $w$  é o **limite** da sucessão  $(u_n)$ .

3) Para o caso complexo vale a seguinte relação entre limites de funções e limites de sucessões, com a mesma demonstração que no caso real: tem-se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$$

se e só se, para toda a sucessão  $(u_n)$  convergente para  $z_0$ , a sucessão  $f(u_n)$  converge para  $w$ .

**Teorema.** Tem-se  $u_n \rightarrow w$  se e só se  $\operatorname{Re} u_n \rightarrow \operatorname{Re} w$  e  $\operatorname{Im} u_n \rightarrow \operatorname{Im} w$ .

**Demonstração.** Tem-se, por um lado,

$$|u_n - w| \leq |\operatorname{Re}(u_n - w)| + |\operatorname{Im}(u_n - w)| = |\operatorname{Re} u_n - \operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} u_n - \operatorname{Im} w|$$

e, por outro,

$$|\operatorname{Re} u_n - \operatorname{Re} w| = |\operatorname{Re}(u_n - w)| \leq |u_n - w| \quad \text{e} \quad |\operatorname{Im} u_n - \operatorname{Im} w| = |\operatorname{Im}(u_n - w)| \leq |u_n - w|. \quad \blacksquare$$

Deste teorema segue-se imediatamente que valem para sucessões complexas as propriedades da álgebra dos limites conhecidas para sucessões reais (limite da soma, do produto, etc.).

E tem-se também uma importante consequência.

**Teorema.** *Se a sucessão complexa  $(u_n)$  for de Cauchy, isto é,*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{m,n} \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon,$$

*então é convergente. (A recíproca é trivial.)*

**Teorema.** *Se  $u_n \rightarrow w$  então  $|u_n| \rightarrow |w|$ .*

**Demonstração.** Isto é consequência imediata da desigualdade

$$||u_n| - |w|| \leq |u_n - w|. \blacksquare$$

Note-se que a afirmação recíproca é falsa. Pense-se no exemplo  $u_n = i^n$ . Então a sucessão  $|u_n|$  é a sucessão constante 1, enquanto que a sucessão  $u_n$  é  $i, -1, -i, 1, i, \dots$ . Isto é um caso particular de um tipo importante de sucessões, as progressões geométricas:

**Teorema.** *Seja  $z \in \mathbb{C}$ . Se  $|z| < 1$ , tem-se que  $z^n \rightarrow 0$ . Se  $|z| \geq 1$  e  $z \neq 1$ , a sucessão  $z^n$  não tem limite.*

**Demonstração.** Tem-se que  $|z^n| = |z|^n$ , de onde concluímos imediatamente que, se  $|z| < 1$ , a sucessão  $z^n$  converge para 0 e que, se  $|z| > 1$ , a sucessão  $z^n$  não tem limite.

Resta o caso de  $|z| = 1$ .

Se  $z=1$  temos a sucessão constante 1, com limite 1. Suponhamos agora que  $|z| = 1$  mas  $z \neq 1$ . Podemos ver que  $z^n$  não tem limite de duas maneiras diferentes.

Primeiro, se  $z^n$  fosse convergente seria de Cauchy. Mas, para qualquer  $n$ , tem-se

$$|z^{n+1} - z^n| = |z^n(z - 1)| = |z - 1|,$$

que é uma constante positiva. Logo,  $z^n$  não pode ser uma sucessão de Cauchy.

Um outro processo é observar que  $z = \text{cis}(\theta)$ , com  $\theta$  um número real não múltiplo de  $2\pi$ . Então  $z^n = \text{cis}(n\theta)$  e, portanto,  $z^n$  não tende para nenhum limite, porque as sucessivas potências de  $z$  vão rodando na circunferência  $C(0, 1)$  com um “salto” de medida  $\theta$  de cada vez.  $\blacksquare$

Um dos principais usos das sucessões é no estudo das séries.

**Definição.** *Seja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

*uma série de termos complexos. A série diz-se **convergente** se a sua sucessão das somas parciais*

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$\dots$

*tiver limite. A **soma** da série é  $S = \lim S_n$ , e escreve-se  $\Sigma u_n = S$ . Uma série não convergente diz-se **divergente**.*

**Observações.** 1) Acrescentar ou suprimir um número finito de parcelas a uma série não afecta a sua convergência ou divergência (mas, se ela for convergente, claro que altera a soma).

2) Frequentemente o primeiro valor do índice de soma será 0.

Com demonstrações análogas ao caso real, têm-se os seguintes factos básicos:

**Teorema.**

- *Se  $\Sigma u_n$  for convergente então  $u_n \rightarrow 0$ . (A implicação recíproca é falsa.)*
- *Se a série  $\Sigma u_n$  for convergente, com soma  $S$ , e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , então  $\Sigma (\alpha u_n)$  é convergente, com soma  $\alpha S$ .*
- *Se as séries  $\Sigma u_n$  e  $\Sigma v_n$  forem convergentes, com somas  $S$  e  $T$ , respectivamente, então  $\Sigma (u_n + v_n)$  é convergente, com soma  $S + T$ .*

O resultado seguinte é consequência imediata do anteriormente visto para sucessões:

**Teorema.**  $\Sigma u_n$  é convergente se e só se  $\Sigma \operatorname{Re} u_n$  e  $\Sigma \operatorname{Im} u_n$  forem convergentes, e tem-se

$$\Sigma u_n = (\Sigma \operatorname{Re} u_n) + i(\Sigma \operatorname{Im} u_n).$$

O teorema seguinte trata de um tipo importante de séries.

**Teorema.** Seja  $z \in \mathbb{C}$ . Se  $|z| < 1$ , a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

é convergente, com soma  $\frac{1}{1-z}$ . Se  $|z| \geq 1$ , a série é divergente.

**Demonstração.** Se  $z = 1$ , a série é obviamente divergente. Sendo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 1$ , tem-se que  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ . (Prove.) Se  $|z| \geq 1$ , a fração do segundo membro não tem limite. Se  $|z| < 1$ , a fração do segundo membro tem limite  $\frac{1}{1-z}$ . ■

**Observação.** A esta última série chama-se **série geométrica** de razão  $z$ . Note-se que nos seus termos figuram apenas potências de  $z$ .

**Definição.** Diz-se que  $\sum u_n$  é **absolutamente convergente** se a série de termos reais não negativos  $\sum |u_n|$  for convergente.

**Teorema.** Se  $\sum u_n$  for absolutamente convergente então é convergente.

**Demonstração.** Vamos ver duas demonstrações diferentes.

1.<sup>a</sup> demonstração: Tem-se  $|\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n|$  e  $|\operatorname{Im} u_n| \leq |u_n|$ , e portanto as séries reais  $\sum \operatorname{Re} u_n$  e  $\sum \operatorname{Im} u_n$  são absolutamente convergentes, logo são convergentes (pelo teorema correspondente a este para séries reais). Logo,  $\sum u_n$  é convergente.

2.<sup>a</sup> demonstração: Designemos por  $S_n$  e  $T_n$  as sucessões das somas parciais das séries  $\sum u_n$  e  $\sum |u_n|$ , respectivamente. Vamos ver que  $(S_n)$  é uma sucessão de Cauchy. Tem-se

$$|S_m - S_n| = |u_{n+1} + \dots + u_m| \leq |u_{n+1}| + \dots + |u_m| = |T_m - T_n|.$$

Como  $\sum |u_n|$  é convergente, a sucessão  $(T_n)$  é de Cauchy e a conclusão segue. ■

**Observação.** A recíproca da afirmação do teorema é falsa, como se sabe do estudo de séries de termos reais.

O teorema sugere que, para estudar a convergência de séries  $\Sigma u_n$  de termos complexos, podemos muitas vezes tentar aplicar a  $\Sigma |u_n|$  os critérios de convergência conhecidos para séries de termos reais positivos ou não negativos, como o critério de comparação, o critério de d'Alembert ou o critério de Cauchy.

**Teorema.** *Se  $\Sigma u_n$  for absolutamente convergente, tem-se  $|\Sigma u_n| \leq \Sigma |u_n|$ .*

**Demonstração.** Designemos por  $S_n$  e  $T_n$  as sucessões das somas parciais das séries  $\Sigma u_n$  e  $\Sigma |u_n|$ , respectivamente. Tem-se

$$|S_n| = |u_1 + \cdots + u_n| \leq |u_1| + \cdots + |u_n| = T_n,$$

e portanto

$$|\Sigma u_n| = |\lim S_n| = \lim |S_n| \leq \lim T_n = \Sigma |u_n|. \blacksquare$$

Com demonstração análoga ao caso real, tem-se o seguinte facto:

**Teorema.** *Se  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  forem absolutamente convergentes, com somas  $S$  e  $T$ , respectivamente, então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)$$

*é convergente, com soma  $ST$ .*

À série do teorema chama-se **produto** das duas séries dadas.

---

## Exercícios

62. Seja  $\sum u_n$  uma série convergente e suponhamos que os  $u_n$  estão todos no primeiro quadrante. Prove que, então,  $\sum u_n$  é absolutamente convergente.

63. Sendo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 1$ , prove que  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ .

64. Sendo  $|z| < 1$ , ache a soma da série  $z + z^2 + z^3 + \dots$ .

65. Ache a soma de  $\frac{i}{2} - \frac{1}{4} - \frac{i}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ .

66. Ache a soma das seguintes séries, representando geometricamente o conjunto dos valores de  $z$  que as tornam convergentes:

(a)  $1 + (z - 2) + (z - 2)^2 + (z - 2)^3 + \dots$

(b)  $1 - \frac{z+i}{2} + \frac{(z+i)^2}{4} - \frac{(z+i)^3}{8} + \dots$

67. Para cada uma das seguintes funções  $f(z)$ , ache uma série cuja soma seja  $f(z)$  e diga quais os valores de  $z$  que tornam a série convergente:

(a)  $\frac{1}{1+z}$ ;      (b)  $\frac{1}{1-z^2}$ ;      (c)  $\frac{1}{2-z}$ ;      (d)  $\frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-z}$ .

## 6 A função exponencial

**Teorema.** Sendo  $z \in \mathbb{C}$  qualquer, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

converge absolutamente.

**Demonstração.** Se  $z = 0$  a afirmação é trivial. Supondo  $z \neq 0$  e aplicando o critério de d'Alembert à série dos módulos, a conclusão é imediata. ■

**Definição.** Para cada  $z \in \mathbb{C}$ , chamamos **exponencial de  $z$**  à soma da série referida no teorema anterior. Notações:  $\exp z$  ou  $e^z$ .

**Teorema.** Também as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots$$

são absolutamente convergentes qualquer que seja  $z \in \mathbb{C}$ . Designamos as suas somas, respectivamente, por  $\cos z$  e  $\sin z$ .

**Demonstração.** Análoga. ■

**Observação.** Note-se que estas três funções estendem ao plano complexo as funções exponencial, coseno e seno conhecidas para a variável real.

**Teorema.** (Fórmula de Euler.) Para todo o  $z \in \mathbb{C}$  tem-se

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

**Demonstração.** Simples verificação usando as séries que definem as funções. ■

**Observação.** Devido à fórmula de Euler, passamos a escrever  $e^{i\theta}$  em vez de  $\operatorname{cis} \theta$ .

**Corolário.**  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad e \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$

**Teorema.** Para quaisquer  $z, w \in \mathbb{C}$  tem-se  $\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$ .

**Demonstração.** Tem-se

$$\begin{aligned}\exp(z + w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left( \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp z \cdot \exp w. \blacksquare\end{aligned}$$

Deste teorema seguem-se imediatamente várias consequências:

**Corolário.** 1.  $\exp z$  nunca é 0 e tem-se  $\frac{1}{\exp z} = \exp(-z)$ .

2. Sendo  $z = x + iy$ , tem-se

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

e portanto

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z \text{ é um argumento de } e^z.$$

3. A exponencial de variável complexa é uma função periódica de período  $2\pi i$ .

**Teorema.** A função exponencial é diferenciável em  $\mathbb{C}$  e tem-se  $(\exp z)' = \exp z$ .

**Demonstração.** Escrevendo  $z = x + iy$ , temos

$$\exp z = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

É imediato verificar que as funções  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \sin y$  satisfazem as condições de Cauchy-Riemann. Como são contínuas em todo o plano, concluímos (ver nota de rodapé da página 13) que a função  $\exp$  é diferenciável em  $\mathbb{C}$ . Quanto à derivada, usando uma das expressões vistas na secção 4, temos

$$(\exp z)' = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = \exp z. \blacksquare$$

**Corolário.** As funções  $\cos$  e  $\sin$  são diferenciáveis em todo o plano complexo e tem-se  $(\cos z)' = -\sin z$  e  $(\sin z)' = \cos z$ .

**Demonstração.** Este facto é imediato a partir das expressões  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  e

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \blacksquare$$

**Definição.** Seja  $z \neq 0$ . Um número complexo  $w$  é um **logaritmo** de  $z$  se  $\exp w = z$ .  
 Notação:  $\log z$ .

**Teorema.** Seja  $z \neq 0$ . Tem-se  $\log z = \ln |z| + i \arg z$ .

**Demonstração.** Suponhamos  $\exp w = z$  e ponhamos  $w = a + ib$ . Então, como visto anteriormente, tem-se  $|\exp w| = e^a$  e  $b$  é um argumento de  $\exp w$ . Logo,  $a = \ln |z|$  e  $b$  é um argumento de  $z$ . ■

**Observação.** Cada número complexo  $z \neq 0$  tem portanto uma infinidade de logaritmos (todos com parte real  $\ln |z|$ ) diferindo uns dos outros por múltiplos inteiros de  $2\pi i$ . Quando se toma o argumento principal de  $z$ , obtemos o chamado *logaritmo principal* de  $z$ .  
 Notação:  $\log_0 z$ .

**Corolário.** O conjunto dos valores da função exponencial é  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Demonstração.** Acabámos de ver que todo o  $z \neq 0$  tem logaritmos. ■

**Definição.** (José Anastácio da Cunha) Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ . Define-se **potência de base  $z$  e expoente  $w$**  por

$$z^w = \exp(w \log z).$$

**Observações.**

- $z^w$  tem portanto uma infinidade de valores. Quando se toma o logaritmo principal de  $z$ , obtém-se o chamado **valor principal** de  $z^w$ .
- Vejamos qual o valor principal da potência  $e^z$ , em que a base é o número de Neper  $e = 2,71828182\dots$ :

$$e^z = \exp(z \log_0 e) = \exp z.$$

Isto justifica o nosso uso da notação  $e^z$  para  $\exp z$ .

- Esta definição foi apresentada pela primeira vez no livro *Principios Mathematicos*, Lisboa, 1790, pgs. 108-109. O autor, José Anastácio da Cunha (1744-1787), foi professor da Universidade de Coimbra entre 1773 e 1778. Foi o primeiro matemático a dar uma definição correcta de convergência de uma série, no mesmo livro (pg. 106).

---

## Exercícios

68. Calcule  $e^0$ ,  $e^{2\pi i}$ ,  $e^{\pi i}$ ,  $e^{-\pi i}$ ,  $e^{\pi i/2}$ ,  $e^{\pi i/4}$ ,  $e^{k\pi i}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
69. Determine o módulo e o argumento principal de  $e^i$ ,  $e^{2+i}$ ,  $e^{3+4i}$ .
70. Mostre que o contradomínio da função exponencial é  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
71. Verifique as condições de Cauchy-Riemann para a função exponencial  $e$ , usando as derivadas parciais calculadas, determine a derivada dessa função.
72. Prove que  $\cos' = -\sin$  e  $\sin' = \cos$ .
- (Sugestão: Use as expressões de  $\cos$  e  $\sin$  em termos da exponencial.)
73. Sendo  $z$  um número complexo qualquer, prove que:
- (a)  $\cos(-z) = \cos z$ ;
  - (b)  $\sin(-z) = -\sin z$ ;
  - (c)  $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ ;
  - (d)  $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ ;
  - (e)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .
74. Investigue a periodicidade das funções  $\cos$  e  $\sin$ .
75. Prove que  $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ .
76. Determine os valores de  $\sin i$ ,  $\cos i$ ,  $\operatorname{tg}(1 + i)$ .

77. As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são definidas por:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Prove que:

- (a)  $\operatorname{ch} z = \cos iz$ ;
- (b)  $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$ ;
- (c)  $\operatorname{ch}(z + w) = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} w + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} w$ ;
- (d)  $\operatorname{sh}(z + w) = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} w + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} w$ ;
- (e)  $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ ;
- (f)  $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ .

78. Escrevendo  $z = x + iy$ , determine as partes real e imaginária das funções  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\operatorname{ch} z$  e  $\operatorname{sh} z$  e verifique as condições de Cauchy-Riemann para essas funções.

79. Calcule  $\log 4$ ,  $\log(-1)$ ,  $\log i$ ,  $\log e$  e  $\log(1 + i)$ , e em cada caso indique o logaritmo principal.

80. Determine os zeros das funções  $\cos$  e  $\sin$  de variável complexa.

81. (a) Determine os valores de  $z \in \mathbb{C}$  para os quais  $\cos z = 2$ .  
(Sugestão: Multiplique ambos os membros da igualdade por  $e^{iz}$  e note que obtém uma equação do segundo grau em  $e^{iz}$ .)
- (b) Quantos dos valores achados em (a) são reais? Seria isso de esperar?

82. Mostre que o contradomínio das funções  $\cos$  e  $\sin$  é  $\mathbb{C}$ .

83. Calcule  $1^{\sqrt{2}}$ ,  $(-i)^i$ ,  $2^i$ ,  $(1 + i)^{1+i}$ , e em cada caso indique o valor principal.

## 7 Séries de potências

**Definição.** Seja  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Uma **série de potências** de  $z - z_0$  é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

onde  $z$  é uma variável e os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots$  são números complexos.

A primeira questão que se põe perante uma série de potências é qual o conjunto dos valores de  $z$  para o qual a série converge.

**Lema de Abel.** 1 - Fixemos  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Seja  $w \neq z_0$ . Se  $\sum a_n(z - z_0)^n$  for convergente no ponto  $w$ , é absolutamente convergente para todo o  $z$  tal que  $|z - z_0| < |w - z_0|$ .

2 - Se  $\sum a_n(z - z_0)^n$  for divergente no ponto  $w$ , é divergente para todo o  $z$  tal que  $|z - z_0| > |w - z_0|$ .

**Demonstração.** 1 - Observemos que, para todo o  $n$ , se tem

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(w - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|^n.$$

Por hipótese,  $\sum a_n(w - z_0)^n$  é convergente e portanto  $a_n(w - z_0)^n \rightarrow 0$ . Logo, também  $|a_n(w - z_0)^n| \rightarrow 0$ . Portanto, a partir de certa ordem tem-se  $|a_n(w - z_0)^n| \leq 1$ , donde, a partir dessa ordem,

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|^n.$$

Concluimos que, se  $|z - z_0| < |w - z_0|$ , a série  $\sum |a_n(z - z_0)^n|$  (com a excepção de um número finito de parcelas) é majorada pela série  $\sum \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|^n$ , uma série geométrica de razão menor que 1, logo é convergente.

2 - Consequência imediata do ponto 1. ■

**Definição.** Dada uma série de potências  $\sum a_n(z - z_0)^n$ , chamamos **raio de convergência** da série ao número real não-negativo

$$R = \sup\{|z - z_0| : \sum a_n(z - z_0)^n \text{ converge}\}.$$

Se a série convergir em todo o  $\mathbb{C}$ , dizemos que o seu raio de convergência é  $+\infty$ .

**Teorema.** Dada uma série de potências  $\sum a_n(z - z_0)^n$ , seja  $R$  o seu raio de convergência. Então a série converge absolutamente em  $B(z_0, R)$  e diverge em  $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, R)$ .

**Demonstração.** Seja  $z \in B(z_0, R)$ . Então existe  $w \in B(z_0, R)$  tal que  $|z - z_0| < |w - z_0|$ . Como  $|w - z_0| < R$ , a série  $\sum a_n(w - z_0)^n$  converge. Logo, pelo Lema de Abel, a série  $\sum a_n(z - z_0)^n$  converge absolutamente.

Seja agora  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, R)$ , isto é,  $|z - z_0| > R$ . Então existe  $w$  tal que  $|z - z_0| > |w - z_0| > R$ . Como  $|w - z_0| > R$ , a série  $\sum a_n(w - z_0)^n$  diverge. Logo, pelo Lema de Abel, a série  $\sum a_n(z - z_0)^n$  diverge. ■

**Observação.** Sobre o comportamento da série de potências na circunferência  $C(z_0, R)$  não se pode fazer nenhuma afirmação geral: tanto pode haver convergência da série em todos os pontos de  $C(z_0, R)$ , como em nenhum, como convergência nalguns e divergência noutros.

**Teorema.** Têm-se as seguintes fórmulas para o raio de convergência da série  $\sum a_n(z - z_0)^n$ :

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad , \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \quad ,$$

válidas se os limites indicados existirem.

**Demonstração.** Suponhamos que existe o segundo limite e que  $|z - z_0| < R$ . Então, a partir de certa ordem, tem-se  $|z - z_0| < \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ . Isto implica, aplicando o critério de d'Alembert à série  $\sum |a_n(z - z_0)^n|$ , que a série  $\sum a_n(z - z_0)^n$  converge absolutamente.

Suponhamos agora que  $|z - z_0| > R$ . Usando um raciocínio análogo concluímos que a série  $\sum a_n(z - z_0)^n$  não converge absolutamente. Mas uma análise da demonstração do critério de d'Alembert mostra que isto acontece porque  $|a_n(z - z_0)^n| \nrightarrow 0$ . Logo, também  $a_n(z - z_0)^n \nrightarrow 0$  e, portanto, a série  $\sum a_n(z - z_0)^n$  diverge.

Os raciocínios com o outro limite são análogos, usando o critério de Cauchy. ■

**Observação.** Uma fórmula para o raio de convergência que é válida em todos os casos é

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad .$$

Vamos agora interessar-nos pelas funções que são somas de séries de potências.

**Definição.** Uma função que, numa bola aberta  $B(z_0, R)$ , seja aí soma de uma série de potências de  $z - z_0$  chama-se uma função **analítica** nessa bola. Também se usa a palavra **holomorfa**.

Pelo que vimos sobre operações com séries podemos concluir imediatamente o seguinte:

**Teorema.** Dado  $z_0 \in \mathbb{C}$ , sejam  $f$  e  $g$  duas funções analíticas em bolas centradas em  $z_0$ , digamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad e \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n,$$

onde a primeira série tem raio de convergência  $R_1$  e a segunda tem raio de convergência  $R_2$ . Então  $f + g$ ,  $\alpha f$  (onde  $\alpha \in \mathbb{C}$ ) e  $fg$  são também analíticas. Concretamente, sendo  $R = \min\{R_1, R_2\}$ , tem-se

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n \quad \text{em } B(z_0, R)$$

$$\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n)(z - z_0)^n \quad \text{em } B(z_0, R_1)$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z - z_0)^n \quad \text{em } B(z_0, R)$$

**Observação.** No caso de  $f(z)g(z)$ , usámos o facto de que as duas séries convergem absolutamente em  $B(z_0, R)$ .

Põe-se agora a questão da diferenciabilidade de uma função analítica. Começamos com um resultado preparatório.

**Teorema.** As séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

têm o mesmo raio de convergência.

**Demonstração.** Isto é consequência das fórmulas para o raio de convergência vistas anteriormente. ■

**Lema.** Sendo  $a$  e  $b$  quaisquer números complexos distintos e  $n$  um número natural  $> 1$ , tem-se

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

**Demonstração.** Imediato. ■

E temos agora o resultado fundamental, que nos diz que uma série de potências pode ser derivada termo a termo.

**Teorema.** *Seja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

*uma série de potências com raio de convergência não nulo. Seja  $f(z)$  a sua função soma. Então, na bola aberta em que a série converge,  $f$  é diferenciável e tem-se*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}.$$

**Demonstração.** Para simplificar a escrita, vamos tomar  $z_0 = 0$  (a demonstração no caso geral é análoga). Temos portanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Designemos a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$  por  $g(z)$ . Seja  $R$  o raio de convergência das duas séries.

Pretendemos mostrar que, para todos os  $z \in B(0, R)$ , se tem  $f'(z) = g(z)$ , isto é,

$$\lim_{w \rightarrow z} \left( \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right) = 0.$$

Temos

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{w^n - z^n}{w - z} - na_n z^{n-1} \right).$$

Pelo lema anterior podemos escrever isto assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1} - nz^{n-1}).$$

Vamos separar esta expressão numa soma de duas parcelas, com  $M$  a escolher posteriormente:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^M a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1} - nz^{n-1}) + \\ & + \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1} - nz^{n-1}). \end{aligned}$$

Designemos a primeira parcela por  $P(w)$  e a segunda por  $Q(w)$ .

Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário.

Seja  $r$  tal que  $|z| < r < R$ . Então a série  $\sum na_n r^{n-1}$  é absolutamente convergente (pelo teorema anterior) e, portanto, existe  $M$  tal que

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} |na_n r^{n-1}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Escolhendo  $w$  suficientemente próximo de  $z$  para que também  $|w| < r$  vem, para esse  $M$ ,

$$\begin{aligned} |Q(w)| &= \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1} - nz^{n-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=M+1}^{\infty} 2n|a_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

A parcela  $P(w)$  é mais simples. Trata-se de um polinómio em  $w$  e claramente  $P(w) \rightarrow 0$  quando  $w \rightarrow z$ . Tomando  $w$  suficientemente próximo de  $z$  conseguimos que

$$|P(w)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escolhendo  $w$  de forma a serem satisfeitas as duas desigualdades temos, finalmente,

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| = |P(w) + Q(w)| \leq |P(w)| + |Q(w)| < \varepsilon$$

e, portanto,  $f'(z) = g(z)$ . ■

**Corolário.** *Seja  $f$  analítica, digamos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

*com raio de convergência não nulo. Então  $f(z)$ , na bola aberta em que a série converge, é infinitamente diferenciável e as suas sucessivas derivadas podem ser calculadas derivando a série termo a termo sucessivamente.*

**Teorema.** (Teorema de Taylor) *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*com raio de convergência não nulo. Então, para todo o  $n$ , tem-se*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

**Demonstração.** Basta observar que o termo independente da série cuja soma é  $f^{(n)}(z)$  é  $n! a_n$ . ■

**Observação.** Deste último facto conclui-se que uma função  $f(z)$  não pode ser soma de duas séries de potências de  $z - z_0$  diferentes (com raio de convergência não nulo). De facto, de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

vem, para todo o  $n$ ,

$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n.$$

---

## Exercícios

84. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências:

$$\begin{aligned} & \text{(a) } \sum z^n; \quad \text{(b) } \sum \frac{z^n}{n}; \quad \text{(c) } \sum \frac{z^n}{n^2}; \quad \text{(d) } \sum z^{3n}; \quad \text{(e) } \sum \frac{n}{2^n} (z + 2i)^n; \\ & \text{(f) } \sum n^n z^n; \quad \text{(g) } \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z - 1)^n; \quad \text{(h) } \sum n! z^n. \end{aligned}$$

85. Mostre que:

- (a)  $\sum z^n$  diverge em todos os pontos da fronteira do círculo de convergência.
- (b)  $\sum \frac{z^n}{n^2}$  converge em todos os pontos da fronteira do círculo de convergência.
- (c)  $\sum \frac{z^n}{n}$  não tem nem um nem outro desses comportamentos.

86. Ache uma série de potências de  $z + 2$  que tenha como soma a função  $\frac{1}{1 - z}$  e determine o respectivo raio de convergência.

87. Escreva os quatro primeiros termos não nulos de uma série de potências de  $z$  que tenha como soma a função  $\frac{e^z}{z + 4}$  e determine o respectivo raio de convergência.

88. Derivando as séries de potências cujas somas são as funções indicadas, prove que:

$$\begin{aligned} & \text{(a) } (e^z)' = e^z; \quad \text{(b) } (\cos z)' = -\sin z; \quad \text{(c) } (\sin z)' = \cos z; \\ & \text{(d) } (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z; \quad \text{(e) } (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z. \end{aligned}$$

89. Considere a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)z^n = 1 + 2z + 3z^2 + \dots$

- (a) Determine o seu raio de convergência.
- (b) Determine a sua função soma (Sugestão: Procure uma série de que a série dada seja a derivada.)

90. Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  uma série de potências com raio de convergência positivo. Suponhamos que a sua função soma  $f(z)$  satisfaz as seguintes condições:

$$(1 + z^2)f'(z) = 1, \quad f(0) = 0.$$

Determine a série de potências  $\sum a_n z^n$ .

## 8 Integração de funções complexas de variável real

**Definição.** Seja  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo e seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua (isto é,  $\operatorname{Re} f$  e  $\operatorname{Im} f$  são contínuas). Define-se **integral de  $f$  entre  $a$  e  $b$**  por

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt.$$

Vamos ver algumas propriedades simples destes integrais.

**Teorema.** Sejam  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  contínuas. Então

$$\int_a^b [f_1(t) + f_2(t)] dt = \int_a^b f_1(t)dt + \int_a^b f_2(t)dt.$$

**Demonstração.** Consequência imediata da definição. ■

**Teorema.** Seja  $\alpha \in \mathbb{C}$  uma constante. Então

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt.$$

**Demonstração.** Seja  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ , com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  reais. Tem-se então

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(t)dt &= \int_a^b (\alpha_1 + i\alpha_2)[\operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t)]dt = \\ &= \int_a^b \alpha_1 \operatorname{Re} f(t)dt - \int_a^b \alpha_2 \operatorname{Im} f(t)dt + i \left[ \int_a^b \alpha_1 \operatorname{Im} f(t)dt + \int_a^b \alpha_2 \operatorname{Re} f(t)dt \right] = \\ &= \alpha_1 \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt - \alpha_2 \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt + i \left[ \alpha_1 \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt + \alpha_2 \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt \right] = \\ &= (\alpha_1 + i\alpha_2) \int_a^b [\operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema.** Sendo  $c \in [a, b]$ , tem-se

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

**Demonstração.** Consequência imediata da definição. ■

**Teorema.** *Tem-se*

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

**Demonstração.** Se  $\int_a^b f(t) dt = 0$ , a desigualdade é trivial. Suponhamos  $\int_a^b f(t) dt \neq 0$  e ponhamos  $\int_a^b f(t) dt = re^{i\theta}$ . Tem-se  $r = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt$ , pela segunda propriedade vista acima. Como  $r$  é real temos

$$r = \operatorname{Re}(r) = \operatorname{Re} \left( \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(t)] dt.$$

Logo, recordando que  $|e^{-i\theta}| = 1$ , vem

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = r = \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(t)] dt \leq \int_a^b |\operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(t)]| dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt. \blacksquare$$

**Teorema.** *Se  $F$  for uma primitiva de  $f$ , tem-se*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

**Demonstração.** Consequência imediata da definição e do Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais de uma variável real. ■

**Teorema.** *Se  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  for uma bijecção com derivada contínua, tem-se*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) ds.$$

**Demonstração.** Consequência imediata da definição e do teorema correspondente para funções reais de uma variável real. ■

**Observação.** Diz-se que o segundo integral se obtém do primeiro pela mudança de variável  $t = \varphi(s)$ .

## 9 Integração de funções complexas de variável complexa

A integração de funções complexas de variável complexa faz-se **ao longo de caminhos no plano**. Sistematizemos o material necessário sobre caminhos.

**Definição.** Seja  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Um **caminho em  $A$**  é uma função contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ , onde  $[a, b]$  é um intervalo em  $\mathbb{R}$ . A  $\gamma(a)$  chama-se **origem** ou **ponto inicial** e a  $\gamma(b)$  **extremidade** ou **ponto final** do caminho  $\gamma$ . Diz-se que o caminho  $\gamma$  **une** os pontos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ . Se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  diz-se que  $\gamma$  é um caminho **fechado**. O conjunto dos valores de  $\gamma$  chama-se **imagem** do caminho e denota-se por  $\{\gamma\}$ .

A imagem  $\{\gamma\}$  é uma **curva**. A função  $\gamma$  diz-nos como é que a curva é percorrida à medida que  $t$  percorre o intervalo  $[a, b]$ .

**Definição.** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  um caminho em  $A$ . Seja  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma bijecção crescente. Então  $\gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow A$  é um novo caminho em  $A$ , com as mesmas origem, extremidade e imagem que  $\gamma$ , que se diz obtido de  $\gamma$  por **mudança de parâmetro**.

**Observação.** Sendo  $[a, b]$  um intervalo qualquer, a função  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  definida por  $\varphi(s) = (1 - s)a + sb$  é bijectiva e crescente. Através dela podemos considerar qualquer caminho, por mudança de parâmetro, definido no intervalo  $[0, 1]$ , ou mesmo em qualquer outro intervalo.

**Definição.** Dado um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , o **caminho oposto** de  $\gamma$  é o caminho  $\overleftarrow{\gamma}$  definido por  $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$ ,  $t \in [a, b]$ .

Se  $\gamma$  une  $u$  e  $v$ , o caminho  $\overleftarrow{\gamma}$  une  $v$  e  $u$  e os dois caminhos têm mesma imagem.

**Definição.** Sendo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dois caminhos, com a extremidade de  $\gamma_1$  igual à origem de  $\gamma_2$ , define-se o caminho  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  da maneira natural, obtendo-se um caminho cuja origem é a de  $\gamma_1$ , cuja extremidade é a de  $\gamma_2$  e cuja imagem é  $\{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\}$  (e analogamente para mais de dois caminhos).

**Observação.** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho e suponhamos que  $\gamma'$  existe e é contínua. Conforme estudado em disciplinas anteriores, o **comprimento** de  $\gamma$  é  $\text{comp } \gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

Se tentarmos definir integral de uma função ao longo de um caminho de forma análoga ao integral para funções de uma variável real, somos conduzidos à seguinte definição.

**Definição.** Consideremos uma função contínua  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  um caminho em  $A$  com derivada contínua (excepto eventualmente num número finito de pontos). Define-se **integral de  $f$  ao longo de  $\gamma$**  como sendo o número complexo

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

devendo entender-se o segundo membro como uma soma de integrais se houver pontos onde não existe  $\gamma'(t)$ .

**Observações.** 1. Note-se que, para  $\int_{\gamma} f(z)dz$  existir, a função  $f$  tem que estar definida na imagem de  $\gamma$  e para o cálculo do integral só interessam os valores de  $f$  nessa imagem.

2. Sempre que no texto se tratar de integrais ao longo de caminhos, supor-se-á, conforme a definição, que as funções são contínuas nas imagens dos caminhos e que estes têm derivada contínua (excepto eventualmente num número finito de pontos).

3. Quando num integral se indicar um segmento de recta  $[u, v]$  como caminho de integração, a parametrização que se está a usar é  $(1-t)u + tv$ ,  $t \in [0, 1]$ . Analogamente, quando se indicar uma circunferência  $C(u, r)$ , a parametrização é  $u + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Teorema.** O integral não depende do parâmetro usado no caminho, isto é, se  $\gamma \circ \varphi$  for um caminho obtido de  $\gamma$  por uma mudança de parâmetro  $\varphi$  com derivada contínua, tem-se, para qualquer função  $f$ ,

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

**Demonstração.** Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  e  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ . Tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} f(z)dz &= \int_c^d f[(\gamma \circ \varphi)(s)](\gamma \circ \varphi)'(s)ds = \int_c^d f[\gamma(\varphi(s))]\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)ds = \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z)dz \end{aligned}$$

usando o teorema sobre mudança de variável para integrais de funções de variável real. ■

**Observação.** Se  $\gamma$  for o intervalo real  $[a, b]$  (percorrido uma só vez de  $a$  para  $b$ ), tem-se, para qualquer função  $f$ ,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(t)dt.$$

Esta propriedade mostra que o integral de funções de uma variável complexa ao longo de caminhos generaliza o integral de funções de uma variável real em intervalos.

**Teorema.** 1. Se  $\gamma$  for um caminho constante, tem-se, para qualquer função  $f$ ,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

2. Para quaisquer funções  $f_1, f_2$  e qualquer caminho  $\gamma$ , tem-se

$$\int_{\gamma} [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_{\gamma} f_1(z)dz + \int_{\gamma} f_2(z)dz$$

e analogamente para mais de duas funções.

3. Para qualquer função  $f$  e qualquer caminho  $\gamma$ , tem-se, sendo  $\alpha \in \mathbb{C}$  uma constante,

$$\int_{\gamma} \alpha f(z)dz = \alpha \int_{\gamma} f(z)dz.$$

4. Para qualquer função  $f$  e quaisquer caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , com a extremidade de  $\gamma_1$  igual à origem de  $\gamma_2$ , tem-se

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

e analogamente para mais de dois caminhos.

5. Para qualquer função  $f$  e qualquer caminho  $\gamma$ , tem-se

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

**Demonstração.** Provamos apenas a propriedade 5, já que as outras são consequências imediatas da definição. Seja  $\varphi : [b, a] \rightarrow [a, b]$  definida por  $\varphi(s) = a + b - s$ . Tem-se

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)dz = \int_a^b f(\overleftarrow{\gamma}(t)) \cdot \overleftarrow{\gamma}'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) \cdot \gamma'(a + b - t) \cdot (-1)dt.$$

Fazendo  $t = \varphi(s)$ , isto é igual a

$$- \int_b^a f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \varphi'(s)ds = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \int_a^b f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)ds = - \int_{\gamma} f(z)dz. \blacksquare$$

**Teorema.** Para qualquer função  $f$  e qualquer caminho  $\gamma$ , tem-se

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \text{comp } \gamma$$

onde  $M$  é  $\max \{|f(z)| : z \in \{\gamma\}\}$  ou qualquer outro majorante de  $|f(z)|$  em  $\{\gamma\}$ .

**Demonstração.** Seja  $\gamma$  definido no intervalo  $[a, b]$ . Tem-se

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot \text{comp } \gamma. \blacksquare$$

**Teorema.** (Teorema Fundamental do Cálculo para funções de variável complexa)  
Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  é um caminho em  $A$  e  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $A$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

**Demonstração.** Isto é consequência do facto de que  $F(\gamma(t))$  é uma primitiva de  $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ .  $\blacksquare$

**Observação.** Se  $A$  for aberto e conexo, quaisquer duas primitivas  $F_1$  e  $F_2$  de uma função  $f$  diferem por uma constante. De facto, de  $F_1' = f$  e  $F_2' = f$  tiramos que  $(F_1 - F_2)' = 0$  e, portanto, por  $A$  ser aberto e conexo,  $F_1 - F_2$  é constante.

**Exemplo.** Seja  $\gamma$  a circunferência  $C(0, 1)$ . Então  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ . Como  $\gamma$  é fechado, concluímos do Teorema Fundamental que a função  $\frac{1}{z}$  não é primitivável em nenhum conjunto que contenha  $C(0, 1)$ . De facto,  $\frac{1}{z}$  é a derivada de  $\log_0$ , porque, escrevendo  $z = e^p$  e  $w = e^q$ , temos

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{\log_0(w) - \log_0(z)}{w - z} = \lim_{q \rightarrow p} \frac{q - p}{e^q - e^p} = \frac{1}{\lim_{q \rightarrow p} \frac{e^q - e^p}{q - p}} = \frac{1}{e^p} = \frac{1}{z}.$$

Mas  $\log_0(z) = \ln|z| + i \arg_0(z)$  e já sabemos que  $\arg_0$  não é contínua em  $\mathbb{R}^-$ , portanto  $\log_0$  também não é contínua em  $\mathbb{R}^-$ , logo não é diferenciável em  $\mathbb{R}^-$ . Isto dá uma ideia de porque é que aquele integral não é obrigatoriamente 0.

Sendo  $\gamma$  o mesmo caminho, tem-se  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0$  (porquê?).

**Observação.** O Teorema acima é simples e útil mas tem aplicação limitada, porque exige saber se a função integranda  $f$  tem primitiva, o que pode não ser fácil (fora de casos simples como polinómios, a função exponencial, etc.). No estudo da dependência do integral em relação ao caminho – ou, equivalentemente, no estudo do anulamento do integral ao longo de um caminho fechado – vai ter mais importância a diferenciabilidade da função integranda.

---

## Exercícios

91. Calcule  $\int_{\gamma} f(z) dz$  onde:

(a)  $f(z) = \operatorname{Re} z$ ,  $\gamma$  é o segmento  $[0, 2 + i]$ ;

(b)  $f(z) = \operatorname{Im} z$ ,  $\gamma$  é a semicircunferência  $|z| = 1$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ .

92. (a) Sejam  $\gamma$  e  $\sigma$  as poligonais  $[1, i]$  e  $[1, 1 + i, i]$ , respectivamente.

Calcule  $\int_{\gamma} f(z) dz$  e  $\int_{\sigma} f(z) dz$  onde  $f(z) = \bar{z}$ .

(b) Mesmo exercício com  $f(z) = z$ .

93. Usando a definição de integral ao longo de um caminho, mostre que, se  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  é um caminho num conjunto  $A$  e  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $A$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

94. Usando o exercício anterior:

(a) Volte a calcular  $\int_{[1, i]} z dz$ ;

(b) Calcule  $\int_{\gamma} (z^2 - iz + 7) dz$ , onde  $\gamma$  é qualquer caminho com origem em  $1 - i$  e extremidade em  $-2 + i$ .

95. Mostre que a função  $\bar{z}$  não tem primitiva em  $\mathbb{C}$ .

96. Sendo  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ , mostre que:

(a)  $\int_{C(z_0, r)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$ ;

(b)  $\int_{C(z_0, r)} \frac{1}{(z - z_0)^k} dz = 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$ .

97. Sem calcular o integral, mostre que  $\left| \int_{[0, -2+i]} \operatorname{Re} z \, dz \right| \leq 2\sqrt{5}$ .
98. Sendo  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , prove que  $\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} \, dz \right| \leq \pi e$ .
99. Prove que  $\left| \int_{C(0,1)} \frac{\sin z}{z^2} \, dz \right| \leq 2\pi e$ .
100. Determine um majorante de  $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{2+z^2} \, dz \right|$ , onde  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

## 10 Teorema de Cauchy e consequências

Começamos por ver a relação do integral de funções de uma variável complexa ao longo de caminhos com o integral curvilíneo de funções de duas variáveis reais.

**Teorema.** *Seja  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Então*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{\gamma} [v(x, y)dx + u(x, y)dy].$$

**Demonstração.** Seja  $\gamma$  definido no intervalo  $[a, b]$ . Identificaremos quando necessário o número complexo  $\gamma(t)$  com o par ordenado  $(\operatorname{Re}\gamma(t), \operatorname{Im}\gamma(t))$ .

Tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b [u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))] \cdot [\operatorname{Re}\gamma'(t) + i\operatorname{Im}\gamma'(t)] dt = \\ &= \int_a^b [u(\gamma(t))\operatorname{Re}\gamma'(t) - v(\gamma(t))\operatorname{Im}\gamma'(t)]dt + i \int_a^b [u(\gamma(t))\operatorname{Im}\gamma'(t) + v(\gamma(t))\operatorname{Re}\gamma'(t)]dt = \\ &= \int_{\gamma} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{\gamma} [v(x, y)dx + u(x, y)dy]. \blacksquare \end{aligned}$$

**Observação.** Daqui em diante tratar-se-á apenas com caminhos fechados para os quais seja geometricamente inequívoco o que é a “parte de dentro” e a “parte de fora” do caminho. Além disso, dado um caminho fechado, supor-se-á, salvo indicação em contrário, que ele é percorrido uma só vez e deixando a parte de dentro do lado esquerdo. Para um tal caminho, o caminho oposto é percorrido deixando a parte de dentro do lado direito.

**Teorema.** (Teorema de Cauchy) *Seja  $f$  uma função diferenciável num conjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Seja  $\gamma$  um caminho fechado em  $A$ . Se  $f$  for diferenciável dentro de  $\gamma$ , tem-se*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Demonstração.** Provaremos o Teorema de Cauchy sob a hipótese, mais restritiva, de  $f$  ter derivada contínua em  $A$  e dentro de  $\gamma$ .

Nessas condições, escrevendo  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , as funções  $u$  e  $v$  têm derivadas parciais contínuas.

Pelo teorema anterior tem-se

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{\gamma} [v(x, y)dx + u(x, y)dy].$$

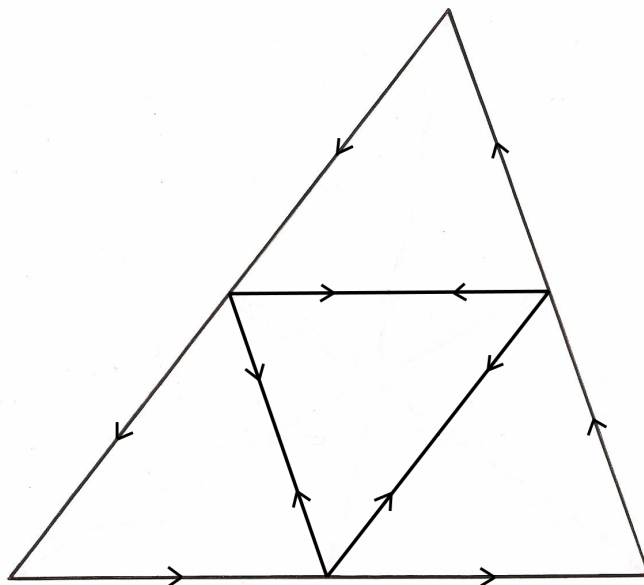
Aplicando o Teorema de Riemann-Green a estes dois integrais curvilíneos, e designando por  $D$  a parte de dentro de  $\gamma$ , obtemos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \iint_D \left[ -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right] dxdy + i \iint_D \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right] dxdy.$$

Como  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, estes dois integrais duplos são nulos, donde a conclusão. ■

**Observação.** A demonstração do Teorema de Cauchy no caso geral de se supor apenas  $f$  diferenciável é mais delicada e não a estudaremos. Mas há um tipo de caminhos para os quais a demonstração sob essa hipótese mais fraca é razoavelmente simples, para além de interessante, e vale a pena vê-la.

**Demonstração do Teorema de Cauchy para caminhos triangulares.** Suponhamos que  $\gamma$  é um caminho triangular, percorrido uma só vez de forma a deixar a parte de dentro do triângulo do lado esquerdo. Designemos o triângulo por  $\Delta$ . Seja  $f$  diferenciável num aberto contendo  $\Delta$ . Pretendemos provar que  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ .



Unindo os pontos médio dos três lados, dividimos  $\Delta$  em quatro triângulos  $\Delta^{(1)}$ ,  $\Delta^{(2)}$ ,  $\Delta^{(3)}$ ,  $\Delta^{(4)}$ . Introduzimos assim quatro novos caminhos cujas imagens são as fronteiras  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  dos quatro triângulos, percorridas nos sentidos indicados.

Tem-se

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\xi_1} f(z)dz + \int_{\xi_2} f(z)dz + \int_{\xi_3} f(z)dz + \int_{\xi_4} f(z)dz \quad (\text{porquê?}).$$

Ponhamos  $c = \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right|$ . Então  $c \geq 0$  e pretendemos mostrar que  $c = 0$ . Tem-se

$$c = \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\xi_1} f(z) dz \right| + \left| \int_{\xi_2} f(z) dz \right| + \left| \int_{\xi_3} f(z) dz \right| + \left| \int_{\xi_4} f(z) dz \right|.$$

Seja  $\left| \int_{\xi_j} f(z) dz \right|$  o máximo das quatro parcelas do lado direito. Então tem-se

$$c \leq 4 \left| \int_{\xi_j} f(z) dz \right|.$$

Ponhamos  $\Delta_1 = \Delta^{(j)}$  e denotemos por  $\gamma_1$  o caminho cuja imagem é a fronteira de  $\Delta_1$ . Tem-se portanto

$$\frac{1}{4} c \leq \left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right|$$

além de, claro,  $\text{comp } \gamma_1 = \frac{1}{2} \text{comp } \gamma$ .

Agora repetimos todo o processo com o triângulo  $\Delta_1$  e assim sucessivamente. Obtemos uma sequência de triângulos  $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$  tendo-se, para todo o  $n$ ,

$$\frac{1}{4^n} c \leq \left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| \quad \text{e} \quad \text{comp } \gamma_n = \frac{1}{2^n} \text{comp } \gamma.$$

Seja  $z_0$  um ponto pertencente a todos os triângulos  $\Delta_n$ . Sabemos que  $f$  é diferenciável em  $z_0$ . Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Então existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < |z - z_0| < \delta$ , se tem

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

isto é,

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Tomemos  $N$  suficientemente grande para que, para todo o  $n \geq N$ , se tenha  $\Delta_n \subset B(z_0, \delta)$ .

Então, para  $n \geq N$  e todo o  $z \in \Delta_n$ , tem-se

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Se  $z \in \Delta_n$ , seguramente  $|z - z_0| \leq \text{comp } \gamma_n$ . Vem então

$$\left| \int_{\gamma_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| < \varepsilon \cdot \text{comp } \gamma_n \cdot \text{comp } \gamma_n.$$

Mas  $\int_{\gamma_n} [-f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = 0$ , porque a função integranda é primitivável. Logo, ficamos apenas com

$$\left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| < \varepsilon \cdot (\text{comp } \gamma_n)^2.$$

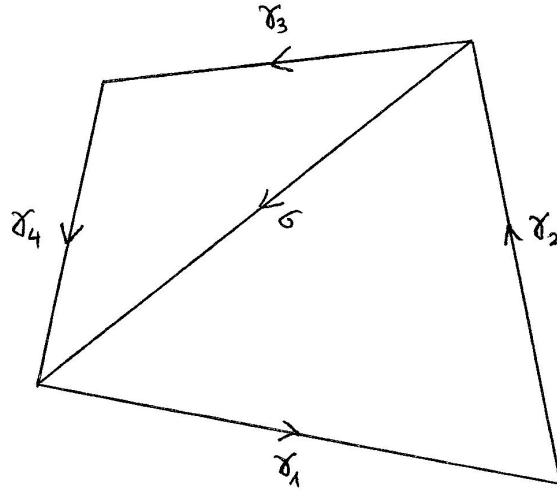
Vem, finalmente, que

$$\frac{1}{4^n} c \leq \left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| < \varepsilon \cdot \frac{1}{4^n} (\text{comp } \gamma)^2$$

donde  $c \leq \varepsilon \cdot (\text{comp } \gamma)^2$ . Como  $\text{comp } \gamma$  é fixo e  $\varepsilon$  é arbitrário,  $c$  tem que ser igual a 0. ■

**Observação.** Da validade do Teorema de Cauchy para caminhos triangulares deduz-se facilmente a sua validade para qualquer caminho cuja imagem seja uma linha poligonal fechada.

Vejamos o caso de um quadrilátero cuja imagem é constituída por quatro segmentos de recta  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$ .



Sendo  $\sigma$  a diagonal indicada na figura, é imediato ver que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz = \\ &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \sigma} f(z) dz + \int_{\gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \overleftarrow{\sigma}} f(z) dz \end{aligned}$$

e estes dois integrais são ambos nulos pelo caso triangular.

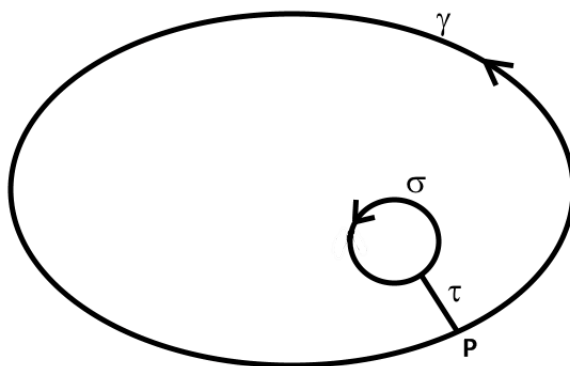
A generalização para qualquer polígono é imediata, por indução sobre o número de lados.

Uma consequência simples e importante do Teorema de Cauchy é a seguinte.

**Teorema.** (Teorema da deformação do caminho.) *Seja  $f$  uma função diferenciável num conjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Sejam  $\gamma$  e  $\sigma$  caminhos fechados em  $A$ , com  $\sigma$  dentro de  $\gamma$ . Se  $f$  for diferenciável entre  $\gamma$  e  $\sigma$  (isto é, na região do plano que está fora de  $\sigma$  e dentro de  $\gamma$ ), tem-se*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz.$$

**Demonstração.** Unamos um ponto  $P$  de  $\gamma$  a um ponto de  $\sigma$  por um caminho  $\tau$  e consideremos o caminho fechado  $\gamma \cup \tau \cup \overleftarrow{\sigma} \cup \overleftarrow{\tau}$  (começando e acabando em  $P$ ).



Pelo Teorema de Cauchy tem-se

$$\int_{\gamma \cup \tau \cup \overleftarrow{\sigma} \cup \overleftarrow{\tau}} f(z) dz = 0$$

Mas

$$\int_{\gamma \cup \tau \cup \overleftarrow{\sigma} \cup \overleftarrow{\tau}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\sigma} f(z) dz,$$

o que prova o teorema. ■

## 11 Fórmula integral de Cauchy

Um dos mais importantes e curiosos teoremas de Análise Complexa afirma que os valores de uma função diferenciável numa bola são determinados pelos valores que ela toma apenas na fronteira da bola. Concretamente, tem-se o seguinte:

**Teorema.** (Fórmula integral de Cauchy.) *Seja  $f$  uma função diferenciável num conjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Seja  $C(z_0, R)$  uma circunferência contida em  $A$  e suponhamos que  $f$  é diferenciável dentro de  $C(z_0, R)$ . Então*

$$\forall_{a \in B(z_0, R)} \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

**Demonstração.** Fixemos um ponto  $a$  na bola  $B(z_0, R)$ . Tem-se

$$\begin{aligned} \int_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - a} dz &= \int_{C(z_0, R)} \frac{f(a) + [f(z) - f(a)]}{z - a} dz = \\ &= f(a) \int_{C(z_0, R)} \frac{1}{z - a} dz + \int_{C(z_0, R)} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz. \end{aligned}$$

O primeiro integral é igual a  $2\pi i$ . Vamos provar que o segundo integral é igual a 0. Pelo teorema da deformação do caminho, tem-se

$$\int_{C(z_0, R)} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \int_{C(a, \varepsilon)} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz$$

com  $\varepsilon$  arbitrário, suficientemente pequeno para que a circunferência  $C(a, \varepsilon)$  esteja contida na bola  $B(z_0, R)$ .

Como  $f$  é diferenciável em  $a$ , o quociente  $\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$  é limitado nas vizinhanças de  $a$ , isto é, existe uma constante  $K$  e existe  $\delta$  tal que, se  $|z - a| < \delta$ , se tem

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right| \leq K.$$

Vem então, para qualquer  $\varepsilon < \delta$ ,

$$\left| \int_{C(a, \varepsilon)} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz \right| \leq K \cdot 2\pi\varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrariamente pequeno, o integral tem de ser 0. Logo,

$$\int_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i \cdot f(a)$$

como pretendíamos provar. ■

---

## Exercícios

101. Usando a fórmula integral de Cauchy, calcule os seguintes integrais:

(a)  $\int_{C(0,r)} \frac{e^z}{z} dz$  ;

(b)  $\int_{C(2,3)} \frac{\sin z}{z-4} dz$  ;

(c)  $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$  , onde  $\gamma$  é o caminho cuja imagem é constituída pelo segmento  $[-2, 2]$  seguido da semicircunferência  $2e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  ;

(d)  $\int_{C(0,r)} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$  , para  $r < 1$  e  $r > 1$ .

102. Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis num aberto  $A$  e seja  $\overline{B}(z_0, r) \subset A$ . Suponhamos que os valores de  $f$  coincidem com os de  $g$  em  $C(z_0, r)$ . Prove que, então,  $f$  e  $g$  coincidem em  $\overline{B}(z_0, r)$ .

103. Indique duas funções  $f$  e  $g$  reais de variável real diferenciáveis num aberto contendo  $[0, 1]$  e tais que  $f(0) = g(0) = 2$  e  $f(1) = g(1) = 3$ .

104. Mostre que, para funções reais de variável real, não existe nenhum resultado com as implicações da fórmula integral de Cauchy. Isto é, que afirme que os valores de uma função diferenciável num intervalo  $[a, b]$  são determinados pelos valores que ela toma apenas na fronteira do intervalo.

## 12 Consequências da fórmula integral de Cauchy

Vamos reescrever a fórmula integral de Cauchy mudando as letras usadas. Sendo  $f$  uma função diferenciável num conjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$  e  $C(z_0, R)$  uma circunferência contida em  $A$  tal que  $f$  é diferenciável dentro de  $C(z_0, R)$ , então

$$\forall_{z \in B(z_0, R)} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, R)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Escrita assim, fica mais claro que a fórmula nos dá uma representação dos valores de  $f$  dentro de  $C(z_0, R)$  desde que conheçamos os seus valores sobre a circunferência,

Desta representação tira-se uma consequência muito surpreendente: se  $f$  for diferenciável numa bola aberta, é analítica (isto é, soma de uma série de potências) dentro dessa bola!

**Teorema.** *Seja  $f$  uma função diferenciável num aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$  e seja  $B(z_0, R) \subseteq A$ . Então  $f$  é analítica em  $B(z_0, R)$ , isto é, existem números complexos  $a_0, a_1, a_2, \dots$  tais que*

$$\forall_{z \in B(z_0, R)} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

**Demonstração.** Para simplificar a escrita, vamos tomar  $z_0 = 0$  (a demonstração no caso geral é análoga). Tomemos  $z$  arbitrário em  $B(0, R)$  e escolhamos  $r$  tal que  $|z| < r < R$ . Pela fórmula integral de Cauchy tem-se

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Como  $w$  percorre  $C(0, r)$ , tem-se  $|z| < |w|$ , pelo que a série geométrica de razão  $\frac{z}{w}$  é convergente.

Notemos que se tem, sendo  $M$  um natural arbitrário,

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w \left(1 - \frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} \left(1 + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{w^2} + \dots + \frac{z^M}{w^M} + (*)\right).$$

As parcelas designadas por  $(*)$  são

$$\frac{z^{M+1}}{w^{M+1}} + \frac{z^{M+2}}{w^{M+2}} + \dots = \frac{z^{M+1}}{w^{M+1}} \left(1 + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{w^2} + \dots\right) = \frac{z^{M+1}}{w^{M+1}} \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{z^{M+1}}{w^{M+1}} \frac{w}{w - z}.$$

Logo, temos

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \dots + \frac{z^M}{w^{M+1}} + \frac{z^{M+1}}{w^{M+1}(w - z)}$$

e portanto

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} f(w) \left( \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \cdots + \frac{z^M}{w^{M+1}} + \frac{z^{M+1}}{w^{M+1}(w-z)} \right) dw = \\ &= \sum_{n=0}^M a_n z^n + Q_M(z) \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \quad \text{e} \quad Q_M(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)z^{M+1}}{w^{M+1}(w-z)} dw.$$

Vamos ver que a sucessão  $Q_M(z)$  converge para 0. Como  $f$  é contínua em  $C(0, r)$ , é aí limitada, isto é, existe  $K$  tal que  $|f(w)| \leq K$  para todo o  $w \in C(0, r)$ . Ainda para  $w \in C(0, r)$  tem-se  $|w| = r$  e, portanto,  $|w - z| \geq |w| - |z| = r - |z|$ . Vem então, aplicando o teorema sobre o módulo do integral,

$$|Q_M(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{K|z|^{M+1}}{r^{M+1}(r - |z|)} = \frac{K|z|}{r - |z|} \cdot \left( \frac{|z|}{r} \right)^M$$

que  $\rightarrow 0$ , porque  $|z| < r$ .

Logo,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . ■

**Observações.** 1 - Na demonstração do teorema no caso de  $z_0$  qualquer, o passo inicial seria escrever

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(w - z_0) \left( 1 - \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)}$$

e o resto do raciocínio é análogo, substituindo  $z$  por  $z - z_0$  e  $w$  por  $w - z_0$  nos sítios apropriados.

2 - Como  $z$  é arbitrário em  $B(z_0, R)$ , o raio de convergência da série é pelo menos  $R$  e a sua convergência em  $B(z_0, R)$  é absoluta, como vimos atrás.

3 - Este teorema é falso para funções reais de variável real. O exemplo clássico é a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(t) = e^{-1/t^2}$  se  $t \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Esta função é diferenciável em todo o  $\mathbb{R}$ , não é a função nula mas a sua série de Taylor em 0 é a série nula.

O que é que se passa com a correspondente função de variável complexa definida por  $f(z) = e^{-1/z^2}$  se  $z \neq 0$  e  $f(0) = 0$ ? Exercício: Verifique que essa função não é diferenciável em 0, e portanto o teorema não se aplica.

É imediata a seguinte consequência do Teorema:

**Corolário.** *Se  $f$  for uma função diferenciável num conjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$ , então  $f$  tem derivadas de todas as ordens em qualquer bola aberta contida em  $A$ .*

Analisando a sequência do raciocínio, concluímos que os coeficientes  $a_n$  na série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Como já tínhamos visto que têm de ser iguais a  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ , concluímos que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Escrevendo  $z$  em vez de  $z_0$ , podemos afirmar que, se  $f$  for diferenciável numa bola aberta  $B(z, R)$ , se tem

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

onde, pelo teorema da deformação do caminho, podemos tomar para caminho de integração qualquer circunferência  $C(z, r)$  dentro da bola aberta  $B(z, R)$ , isto é, com  $r < R$ .

Desta última observação tira-se imediatamente o seguinte.

**Teorema.** *Se  $f$  for diferenciável numa bola aberta  $B(z, R)$  e se, tomando qualquer  $r < R$ ,  $K$  for um majorante dos valores de  $|f(w)|$  sobre a circunferência  $C(z, r)$ , então tem-se, para todo o  $n$ ,*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!K}{r^n}.$$

**Demonstração.** Tem-se

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{K}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!K}{r^n}. \blacksquare$$

**Corolário.** (Teorema de Liouville) *Se  $f$  for diferenciável e limitada em todo o plano complexo, tem de ser constante.*

**Demonstração.** Suponhamos que  $f$  é diferenciável em todo o plano complexo e que é limitada, isto é, existe  $K$  tal que  $|f(z)| \leq K$  para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . Aplicando a estimativa do teorema anterior no caso  $n = 1$ , obtemos

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad |f'(z)| \leq \frac{K}{r}.$$

Aqui  $r$  pode ser qualquer, porque o valor do integral acima, e portanto o valor de  $f'(z)$ , não dependem de  $r$ . Tomando  $r$  arbitrariamente grande, vemos que  $f'(z)$  tem de ser 0, e portanto  $f$  é constante. ■

**Observação.** Note-se que esta afirmação é falsa para funções de variável real. Por exemplo, as funções  $\cos$  e  $\sin$  são diferenciáveis e limitadas em todo o  $\mathbb{R}$  mas não são constantes. Do mesmo passo concluímos que as funções  $\cos$  e  $\sin$  de variável complexa não são limitadas.

O Teorema de Liouville permite dar uma demonstração quase instantânea do Teorema Fundamental da Álgebra.

**Teorema.** (Teorema Fundamental da Álgebra) *Seja  $p(z)$  um polinómio não constante (isto é, de grau  $\geq 1$ ) com coeficientes complexos. Então  $p(z)$  tem pelo menos uma raiz em  $\mathbb{C}$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que  $p(z)$  não tem nenhuma raiz em  $\mathbb{C}$ . Então a função

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

é diferenciável em todo o plano complexo. Se provarmos que  $f(z)$  é limitada em  $\mathbb{C}$  então, pelo Teorema de Liouville, tem de ser constante e o mesmo acontece a  $p(z)$ , em contradição com a hipótese.

Resta então provar que  $f(z)$  é limitada em  $\mathbb{C}$ . Suponhamos que o grau de  $p(z)$  é  $n$ . Então  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ , com  $a_n \neq 0$ .

Tem-se

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{z^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right)}$$

e, portanto,  $|f(z)| \rightarrow 0$  quando  $|z| \rightarrow +\infty$ . Como claramente  $f(z)$  é limitada em qualquer bola centrada na origem,  $f(z)$  é limitada em todo o plano. ■

---

## Exercícios

105. (a) Prove que se uma função  $f(z)$  for diferenciável numa bola então é aí primitivável. (Sugestão:  $f(z)$  é soma de uma série de potências.)  
(b) Reciprocamente, prove que se uma função  $f(z)$  tiver uma primitiva  $F(z)$  numa bola então é aí diferenciável. (Sugestão:  $F(z)$  é infinitamente diferenciável.)
106. Ache a série de potências de  $z$  cuja soma é  $\frac{1}{1-z-z^2}$ , indique o círculo de convergência e mostre que os coeficientes  $a_n$  satisfazem  $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ . (Diz-se que esta função é a “função geradora” da sucessão de Fibonacci.)
107. Ache a série de potências de  $z$  cuja soma é  $\log_0(1+z)$  e indique o círculo de convergência.
108. Prove que na bola  $B(1,1)$  se tem  $\log_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$ .
109. Desenvolva as seguintes funções em série de potências em torno dos pontos  $z_0$  indicados e em cada caso determine o raio de convergência:
- (a)  $e^z, z_0 = 1$  ;
  - (b)  $\frac{1}{z}, z_0 = 1$  ;
  - (c)  $\frac{1}{2-z}, z_0 = 0$  ;
  - (d)  $\frac{1}{i-z}, z_0 = -1$  ;
  - (e)  $\frac{1}{1+z^2}, z_0 = 0$  ;
  - (f)  $\frac{1}{z+3}, z_0 = 2$  ;
  - (g)  $\frac{z}{2z+5}, z_0 = 0$  ;
  - (h)  $\frac{z}{(z-3)(z+5)}, z_0 = 0$  ;
  - (i)  $\cos z^2, z_0 = 0$  .

110. Se  $f$  for diferenciável numa bola  $B(0, \rho)$  e for uma função ímpar, mostre que no desenvolvimento  $f(z) = \sum a_n z^n$  todos os coeficientes de índice par são iguais a zero. Prove um resultado análogo para funções pares.

111. Seja  $f$  uma função diferenciável numa bola  $B(0, \rho)$  e suponhamos que  $f$  satisfaz  $f(z) = f(2z)$  para todo o  $z$ . Prove que, então,  $f$  é constante.

112. Calcule o integral  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$  para os caminhos  $C(0, \frac{1}{2})$  e  $C(1, \frac{1}{2})$ .

113. Calcule  $\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^5} dz$ .

114. Calcule os seguintes integrais:

(a)  $\int_{C(1,r)} \frac{1}{(z-1)^2} dz ;$

(b)  $\int_{C(0,r)} \frac{e^{iz}}{z^2} dz ;$

(c)  $\int_{C(0,r)} \frac{\sin z}{z^3} dz ;$

(d)  $\int_{C(0,r)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz ;$

(e)  $\int_{C(1,r)} \left( \frac{z}{z-1} \right)^n dz .$

## 13 Teorema de Laurent

Vimos na secção anterior que uma função diferenciável numa bola aberta centrada num ponto  $z_0$  é a soma de uma série de potências de  $z - z_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

E se  $f$  for diferenciável numa bola centrada em  $z_0$  excepto em  $z_0$ ?

**Definição.** *Seja  $f$  uma função. Dizemos que  $z_0$  é uma **singularidade** de  $f$  se a função não for diferenciável em  $z_0$ . Dizemos que  $z_0$  é uma **singularidade isolada** de  $f$  se a função for diferenciável em  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  para algum  $R > 0$ .*

Vamos ver um interessante resultado que implica que, nas vizinhanças de uma singularidade isolada de uma função, esta continua a ser a soma de uma série de potências mas admitindo potências de expoente negativo.

**Teorema.** (Teorema de Laurent) *Seja  $f$  uma função diferenciável numa coroa circular aberta  $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$  (onde  $R_1 \geq 0$  e  $R_2 \leq +\infty$ ). Então existem números complexos  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , tais que, para todo o  $z$  nessa coroa circular, se tem*

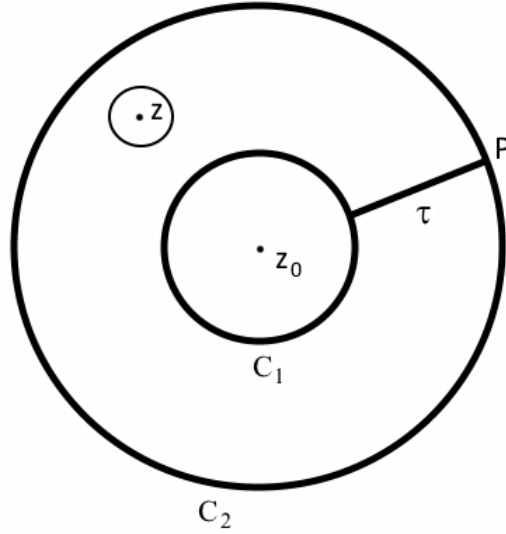
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

**Demonstração.** Tomemos  $z$  arbitrário na coroa circular indicada. Sejam  $r_1$  e  $r_2$  tais que  $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$  e designemos por  $C_1$  e  $C_2$  as circunferências  $C(z_0, r_1)$  e  $C(z_0, r_2)$ , respectivamente.

Seja  $\rho$  suficientemente pequeno para que a bola  $B(z, \rho)$  esteja dentro da coroa circular definida por  $r_1 < |z - z_0| < r_2$ . Pela fórmula integral de Cauchy tem-se

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z, \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw .$$

Unamos um ponto  $P$  de  $C_2$  a um ponto de  $C_1$  por um caminho  $\tau$  e consideremos o caminho fechado  $C_2 \cup \tau \cup \overleftarrow{C_1} \cup \overleftarrow{\tau}$  (começando e acabando em  $P$ ).



Pelo Teorema da deformação do caminho, tem-se

$$\int_{C(z,\rho)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{C_2 \cup \tau \cup \overleftarrow{C_1} \cup \overleftarrow{\tau}} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Mas

$$\int_{C_2 \cup \tau \cup \overleftarrow{C_1} \cup \overleftarrow{\tau}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

donde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Repetimos agora o raciocínio do primeiro teorema da secção anterior para estes dois integrais. No primeiro, a analogia é completa: escrevemos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{(w-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}$$

e aparece-nos a soma de uma série geométrica de razão  $\frac{z-z_0}{w-z_0}$ , que tem módulo  $< 1$  porque  $|z-z_0| < r_2$  e para  $w \in C_2$  se tem  $|w-z_0| = r_2$ .

No segundo integral escrevemos

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)} = -\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)}$$

e aparece-nos a soma de uma série geométrica de razão  $\frac{w-z_0}{z-z_0}$ , que tem módulo  $< 1$  porque  $|z-z_0| > r_1$  e para  $w \in C_1$  se tem  $|w-z_0| = r_1$ .

O resto do raciocínio decorre de forma totalmente análoga, obtendo-se no final para os coeficientes  $\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$  as expressões

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad (n \in \mathbb{Z})$$

onde  $r$  não depende de  $z$  e pode ser qualquer entre  $R_1$  e  $R_2$ . Em particular, tem-se  $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} f(w) dw$ . Note-se que estes coeficientes só dependem de  $f$  e de  $z_0$ . ■

**Definição.** A soma de séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  (por vezes abreviada para  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ) chama-se a **série de Laurent** de  $f$  na coroa circular dada.

**Observação.** Neste contexto não fazem sentido as expressões  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  para os coeficientes, porque  $z_0$  é uma singularidade de  $f$ . Ainda assim, a série de Laurent de  $f$  numa dada coroa circular centrada em  $z_0$  é única.

Suponhamos que também se tinha

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

ou, destacando uma parcela na primeira série,

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{b_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n.$$

É simples ver que estas duas séries são primitiváveis na coroa circular, pelo que os seus integrais ao longo de  $C(z_0, r)$  são nulos (onde  $R_1 < r < R_2$ ). Logo, temos

$$\int_{C(z_0, r)} f(z) dz = \int_{C(z_0, r)} \frac{b_{-1}}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot b_{-1}$$

e portanto  $b_{-1} = a_{-1}$  (apenas mudámos a letra usada para a variável de integração). Para os outros índices basta multiplicar  $f(z)$  por potências de  $z - z_0$  e repetir este procedimento.

Por exemplo, com  $f(z)(z - z_0)$  obtemos  $b_{-2} = a_{-2}$ . Com  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  obtemos  $b_0 = a_0$ . Etc.

---

## Exercícios

115. Ache as séries de Laurent das seguintes funções nas coroas circulares indicadas:

(a)  $\frac{z+1}{z}$ ,  $0 < |z| < \infty$ ;      (b)  $\frac{1}{(z-3)^5}$ ,  $0 < |z-3| < \infty$ ;

(c)  $\frac{1}{z^2+1}$ ,  $0 < |z+i| < 2$ ;      (d)  $\frac{e^z}{z^3}$ ,  $0 < |z| < \infty$ ;

(e)  $e^{1/z}$ ,  $0 < |z| < \infty$ ;      (f)  $\frac{1}{z(1-z)}$ ,  $0 < |z| < 1$  e  $0 < |z-1| < 1$ .

116. Determine as quatro primeiras parcelas da série de Laurent da função  $\frac{e^z}{z^2-1}$  na coroa circular  $0 < |z-1| < 2$ .

## 14 Classificação das singularidades isoladas. Resíduos

**Definição.** Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ . Se na série de Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  houver apenas um número finito de coeficientes  $a_n$  com  $n < 0$  que sejam não nulos,  $z_0$  diz-se um **pólo** de  $f$ .

Se

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

com  $a_{-m} \neq 0$ , diz-se que  $z_0$  é um pólo de **ordem**  $m$ . Os pólos de ordem 1, 2, 3 chamam-se **simples**, **duplos**, **triplos**.

**Teorema.**  $z_0$  é um pólo de ordem  $m$  de  $f$  se e só se, nas vizinhanças de  $z_0$ , for possível escrever

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

com  $g$  uma função diferenciável em  $z_0$  e suas vizinhanças, e satisfazendo  $g(z_0) \neq 0$ .

**Demonstração.** Isto é consequência de que uma função é diferenciável em  $z_0$  e suas vizinhanças se e só se for soma de uma série de potências de  $z - z_0$  (com expoentes não negativos). ■

**Definição** Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ . Se na série de Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  todos os coeficientes  $a_n$  com  $n < 0$  forem iguais a zero,  $z_0$  diz-se uma **singularidade removível** ou **aparente** de  $f$ .

**Observação.** Se  $z_0$  for uma singularidade removível de  $f$ , a singularidade pode ser “removida” definindo  $f$  em  $z_0$  por  $f(z_0) = a_0$ .

**Definição.** Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ . Se na série de Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  houver um número infinito de coeficientes  $a_n$  com  $n < 0$  que sejam não nulos,  $z_0$  diz-se uma **singularidade essencial** de  $f$ .

**Definição.** Sendo  $z_0$  uma singularidade isolada de  $f$ , o coeficiente  $a_{-1}$  de  $\frac{1}{z-z_0}$  na série de Laurent de  $f$  chama-se **resíduo de  $f$  em  $z_0$**  e denota-se por  $\text{Res}(f; z_0)$ .

**Observações.**

1. Se  $z_0$  for uma singularidade removível de  $f$ , é óbvio que  $\text{Res}(f; z_0) = 0$ .

2. Se  $z_0$  for um pólo simples de  $f$  tem-se

$$\text{Res}(f; z_0) = [(z - z_0) \cdot f(z)]_{z=z_0}$$

isto é, escrevendo

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0} \quad (\text{com } g(z_0) \neq 0),$$

tem-se

$$\text{Res}(f; z_0) = g(z_0).$$

3. Mais geralmente, se  $z_0$  for um pólo de ordem  $m$  de  $f$  tem-se

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} [(z - z_0)^m \cdot f(z)]_{z=z_0}^{(m-1)}$$

isto é, escrevendo

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad (\text{com } g(z_0) \neq 0),$$

tem-se

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

---

## Exercícios

117. Cada uma das seguintes funções tem uma singularidade isolada em  $z_0 = 0$ . Em cada caso, diga se se trata de um pólo e, se for, indique a sua ordem.

- (a)  $\frac{z}{z}$ ;      (b)  $\frac{1}{z}$ ;      (c)  $\frac{z^2}{z}$ ;      (d)  $\frac{z}{z^2}$ ;      (e)  $\frac{1}{z^2}$ ;  
(f)  $\frac{\sin z}{z}$ ;      (g)  $\frac{\cos z}{z}$ ;      (h)  $\frac{1 - \cos z}{z}$ ;      (i)  $e^{1/z}$ ;      (j)  $\frac{\sin z}{z^4}$ ;  
(k)  $\frac{1}{e^z - 1}$ ;      (l)  $\frac{z^2}{e^z - 1}$ ;      (m)  $\frac{\cos z}{z^2}$ ;      (n)  $z^7 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ;      (o)  $\frac{e^z - 1}{z^3}$ .

118. Calcule:

- (a)  $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2 - 1}; -1\right)$ ;      (b)  $\text{Res}\left(\frac{1}{z - 1}; 1\right)$ ;      (c)  $\text{Res}\left(\frac{1}{z^4}; 0\right)$ ;  
(d)  $\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z}; 0\right)$ ;      (e)  $\text{Res}\left(\frac{e^z}{z - 1}; 1\right)$ ;      (f)  $\text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1 + z^2}; i\right)$ ;  
(g)  $\text{Res}\left(\frac{e^z}{(z - 1)^2}; 1\right)$ ;      (h)  $\text{Res}(e^{1/z}; 0)$ ;      (i)  $\text{Res}\left(\frac{e^z}{z^m}; 0\right) \quad (m \in \mathbb{N})$ ;  
(j)  $\text{Res}\left(\frac{z^5 + z + 3}{(z - 2)^4}; 2\right)$ ;      (k)  $\text{Res}\left(\frac{\cos z}{z - \pi/4}; \pi/4\right)$ ;      (l)  $\text{Res}\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right); 0\right)$ ;  
(m)  $\text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)}; ia\right) \quad (0 \neq a \in \mathbb{R})$ ;      (n)  $\text{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}; ia\right) \quad (0 \neq a \in \mathbb{R})$ .  
(o)  $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2 \sin z}; 0\right)$ .

119. Se  $z_0$  for singularidade isolada de  $f_1$  e de  $f_2$ , prove que também o é de  $f_1 + f_2$  e tem-se  $\text{Res}(f_1 + f_2; z_0) = \text{Res}(f_1; z_0) + \text{Res}(f_2; z_0)$ .

120. Prove que, se  $z_0$  for pólo simples de  $f_1$ , e  $f_2$  for diferenciável numa bola  $B(z_0, R)$ , então  $\text{Res}(f_1 f_2; z_0) = f_2(z_0) \cdot \text{Res}(f_1; z_0)$ . Mostre que o mesmo não se passa necessariamente se  $z_0$  for pólo de  $f_1$  de ordem  $> 1$ .
121. Sejam  $f_1$  e  $f_2$  diferenciáveis em  $B(z_0, R)$  e suponhamos que  $f_1(z_0) \neq 0$  e que  $f_2(z_0) = 0$  e  $f_2'(z_0) \neq 0$ . Prove que, então,  $\text{Res}\left(\frac{f_1}{f_2}; z_0\right) = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$ .

## 15 Teorema dos resíduos

De onde vem a importância dos resíduos? Recorde-se que, na série de Laurent de uma função  $f(z)$  num conjunto do tipo  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ , temos as seguintes expressões para os coeficientes:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

onde  $0 < r < R$ . Estas expressões não são úteis para calcular os coeficientes. Pelo contrário, são mais úteis lidas da direita para a esquerda, como forma de calcular integrais (no caso de conhecermos a série de Laurent por outros meios). Em particular, no caso  $n = -1$ , somos conduzidos ao seguinte resultado.

**Teorema.** *Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ , isto é,  $f$  é diferenciável em  $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  para certo  $R > 0$ . Então, sendo  $r < R$ , tem-se*

$$\int_{C(z_0, r)} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f; z_0).$$

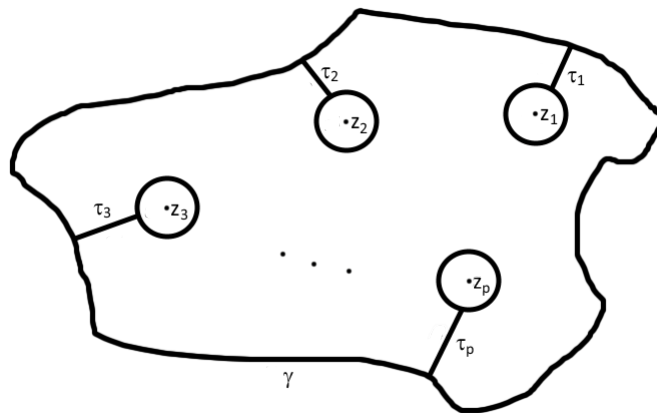
Daqui deduzimos o teorema mais geral sobre integração estudado nesta disciplina.

**Teorema.** (Teorema dos resíduos.) *Seja  $f$  uma função diferenciável num conjunto aberto  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Seja  $\gamma$  um caminho fechado em  $A$ . Suponhamos que as singularidades que  $f$  tem, dentro de  $\gamma$ , são  $z_1, z_2, \dots, z_p$ . Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^p \text{Res}(f; z_k).$$

**Demonstração.** Tracemos  $p$  pequenas circunferências dentro de  $\gamma$  centradas nas singularidades  $z_1, z_2, \dots, z_p$ . Chamemos  $C_1, C_2, \dots, C_p$  a estas circunferências.

Unamos  $\gamma$  a estas circunferências por caminhos  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ , conforme indicado na figura. Consideremos o caminho fechado  $\gamma \cup \tau_1 \cup \overleftarrow{C_1} \cup \overleftarrow{\tau_1} \cup \tau_2 \cup \overleftarrow{C_2} \cup \overleftarrow{\tau_2} \cup \dots \cup \tau_p \cup \overleftarrow{C_p} \cup \overleftarrow{\tau_p}$ .



Pelo Teorema de Cauchy, o integral de  $f$  ao longo deste caminho fechado é 0. Mas o mesmo integral é igual a

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^p \int_{C_k} f(z) dz$$

ou seja, pelo teorema anterior, é igual a

$$\int_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^p \text{Res}(f; z_k)$$

o que prova o teorema. ■

---

## Exercícios

122. Calcule:

(a)  $\int_{C(1,3)} \frac{z^3 + 1}{(z + 1)(z - 1)^3} dz;$

(b)  $\int_{C(0,2)} \frac{\sin z}{z^2(z - 1)} dz;$

(c)  $\int_{C(i,1)} \frac{z}{z^2 + 1} dz;$

(d)  $\int_{C(-1,1)} \frac{1}{(z + 1)(z - 1)^3} dz;$

(e)  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z - 1)^3} dz$  onde  $\gamma$  é, sucessivamente,  $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ,  $C\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ;

(f)  $\int_{C(0,r)} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz$  para todos os valores possíveis de  $r$ ,  $0 < r < 2$  e  $2 < r < \infty$ ;

(g)  $\int_{C(0,5)} \frac{1}{\sin z} dz;$

(h)  $\int_{C(-1, \frac{1}{2})} \frac{1}{(1 - z)^3} dz;$

(i)  $\int_{C(0,1)} \frac{z}{z^2 + 2z + 5} dz;$

(j)  $\int_{C(0,r)} (1 + z)e^{1/z} dz \ (r > 0);$

(k)  $\int_{\gamma} \frac{1}{1 + z^2} dz$ , onde  $\gamma$  é a curva constituída pelo segmento  $[-r, r]$  seguido da semicircunferência  $re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  ( $r > 1$ ).

## 16 Aplicações do Teorema dos resíduos ao cálculo de integrais de funções de variável real

Definimos o integral de  $f$  ao longo de um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  como sendo o número complexo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Mas, para caminhos fechados, aprendemos um resultado tão forte (o teorema dos resíduos) que podemos ler a igualdade ao contrário

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz$$

e usá-la para calcular integrais de funções de uma variável real, desde que consigamos escrever a função integranda na forma  $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  para algum caminho fechado  $\gamma$  definido em  $[a, b]$ .

Um exemplo interessante é o de uma função integranda que contenha  $\cos t$  e/ou  $\sin t$ , sendo o intervalo de integração  $[0, 2\pi]$ . Como se tem

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{e} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

tomando para  $\gamma$  o caminho fechado  $e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  conseguimos transformar o integral pedido num integral ao longo da circunferência  $C(0, 1)$ , que podemos calcular usando o teorema dos resíduos.

Concretamente, tem-se o seguinte:

Se  $\psi(x, y)$  for uma função racional, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi(\cos t, \sin t) dt &= \int_0^{2\pi} \psi\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) \frac{1}{ie^{it}} ie^{it} dt \\ &= \int_{C(0,1)} \psi\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz \\ &= 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^p \text{Res}(f; z_k) \end{aligned}$$

onde  $z_1, z_2, \dots, z_p$  são as singularidades que a função

$$f(z) = \psi\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz}$$

tem dentro da circunferência  $C(0, 1)$ .

Outra aplicação interessante do teorema dos resíduos encontra-se no cálculo de certos integrais impróprios. Vamos ver apenas dois exemplos muito simples.

O primeiro exemplo é o de uma função racional  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , onde  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinómios numa variável real  $x$ , com  $q(x)$  sem raízes reais e  $\text{grau } q(x) - \text{grau } p(x) \geq 2$ . Nesta situação sabemos que o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

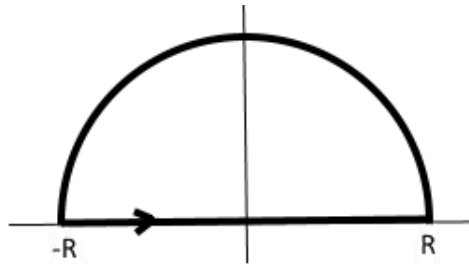
é convergente e é igual a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{p(x)}{q(x)} dx .^2$$

Estendamos a função integranda ao plano complexo e calculemos o integral

$$\int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz$$

onde  $\gamma$  é o caminho indicado na figura:



Como  $\frac{p(z)}{q(z)}$  é uma função racional, tem um número finito de singularidades. Sendo  $R$  suficientemente grande para que  $\gamma$  deixe do lado de dentro todas as singularidades que estão no semi-plano acima do eixo real, temos

$$\int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^p \text{Res} \left( \frac{p(z)}{q(z)} ; z_k \right)$$

onde  $z_1, z_2, \dots, z_p$  são as singularidades que a função  $\frac{p(z)}{q(z)}$  tem no semi-plano  $\{z : \text{Im} z > 0\}$ .

---

<sup>2</sup> Note-se que este tipo de limite (às vezes chamado “valor principal de Cauchy” do integral impróprio) pode existir sem o integral impróprio ser convergente. Pense-se por exemplo no integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ .

Mas tem-se

$$\int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{p(x)}{q(x)} dx + \int_{\sigma} \frac{p(z)}{q(z)} dz ,$$

onde  $\sigma$  é a semi-circunferência  $Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . O valor do integral  $\int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz$  não depende de  $R$ , desde que este seja escolhido suficientemente grande, como indicado atrás.

Como grau  $q(x) - \text{grau } p(x) \geq 2$ , quando  $|z|$  aumenta a função  $\frac{z^2 p(z)}{q(z)}$  aproxima-se de uma constante. Logo, para  $|z|$  suficientemente grande, tem-se  $\left| \frac{z^2 p(z)}{q(z)} \right| \leq K$  para alguma constante  $K > 0$ . Assim, para  $z$  sobre o caminho  $\sigma$  e  $R$  suficientemente grande, tem-se

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{K}{R^2} .$$

Segue-se que

$$\left| \int_{\sigma} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \pi R \frac{K}{R^2} = \frac{\pi K}{R} ,$$

que  $\rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow +\infty$ . Logo,

$$\int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx .$$

Em conclusão:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^p \text{Res} \left( \frac{p(z)}{q(z)} ; z_k \right)$$

onde  $z_1, z_2, \dots, z_p$  são as singularidades que a função  $\frac{p(z)}{q(z)}$  tem no semi-plano  $\{z : \text{Im } z > 0\}$ .

Exactamente da mesma forma prova-se que, se  $p(x)$  e  $q(x)$  forem polinómios, com  $q(x)$  sem raízes reais e grau  $q(x) - \text{grau } p(x) \geq 2$ , tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^p \text{Res} \left( e^{iz} \frac{p(z)}{q(z)} ; z_k \right)$$

onde, tal como atrás,  $z_1, z_2, \dots, z_p$  são as singularidades que a função  $e^{iz} \frac{p(z)}{q(z)}$  tem no semi-plano  $\{z : \text{Im } z > 0\}$ . Tomando a parte real e a parte imaginária, podemos assim calcular integrais impróprios do tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \frac{p(x)}{q(x)} dx .$$

Há muito mais exemplos de aplicação do teorema dos resíduos ao cálculo de integrais impróprios.

---

## Exercícios

123. Usando o teorema dos resíduos, calcule:

(a)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos t} dt;$

(b)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos t)^2} dt;$

(c)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4 \cos t} dt;$

(d)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \sin t} dt;$

(e)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 - \sin t)^2} dt.$

124. Calcule:

(a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx;$

(b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2ix - 2} dx;$

(c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)} dx;$

(d)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx;$

(e)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx;$

(f)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$

## 17 A transformada- $z$

**Definição.** Seja  $u_0, u_1, u_2, \dots$  uma sucessão qualquer de números reais ou complexos. Define-se a **transformada- $z$**  da sucessão  $(u_n)$  como sendo a função de variável complexa

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n} = u_0 + \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{z^2} + \dots$$

Notação:  $U(z) = \mathcal{Z}[(u_n)]$ .

**Observação.** A função  $U$  está definida e é diferenciável para os valores de  $z$  para os quais a série – que é uma série de Laurent – converge. É simples ver (considerando a variável  $w = \frac{1}{z}$ ) que o conjunto de tais valores de  $z$  é, salvo casos extremos, necessariamente da forma  $\{z : |z| > R\}$  para algum  $R \geq 0$ , mais eventualmente pontos da fronteira.

**Exemplos.** (a)  $\mathcal{Z}[(1, a, a^2, a^3, \dots)] = \frac{z}{z-a}$  (para  $|z| > |a|$ ), onde  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

(b)  $\mathcal{Z}[(0, 1, 2, 3, \dots)] = \frac{z}{(z-1)^2}$  (para  $|z| > 1$ ).

**Propriedades simples.** 1 - A transformação  $(u_n) \rightarrow \mathcal{Z}[(u_n)]$  é linear, como função entre espaços vectoriais de sucessões e de funções.

2 - Sendo  $U(z)$  a transformada- $z$  da sucessão  $(u_n)$ , é simples ver que

$$\mathcal{Z}[(u_{n+1})] = zU(z) - u_0z$$

$$\mathcal{Z}[(u_{n+2})] = z^2U(z) - u_0z^2 - u_1z$$

etc.

**Observação.** Usando o teorema dos resíduos, é possível inverter a transformada- $z$ , isto é, achar a sucessão  $(u_n)$  a partir da função  $U(z)$ , como se vê a seguir.

**Teorema.** Para qualquer  $n \in \mathbb{N}_0$ , tem-se, pela expressão vista atrás para os coeficientes das séries de Laurent, que

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^{n-1} U(z) dz$$

onde  $\gamma$  é um caminho fechado dentro do qual estão as singularidades de  $U(z)$ . Logo,  $u_n$  é igual à soma dos resíduos da função  $z^{n-1}U(z)$  nas suas singularidades.

**Observação.** A transformada- $z$  pode ser usada para achar o termo geral de sucessões definidas por recorrência linear. A técnica consiste em aplicar  $\mathcal{Z}$  à relação de recorrência e usar a linearidade e as propriedades relativas a  $\mathcal{Z}[(u_{n+p})]$ . Obtém-se uma equação algébrica em  $U(z)$ , que se resolve para obter  $U(z)$ , e no fim inverte-se a transformada para obter a sucessão desejada.

Vejamos esta técnica aplicada à sucessão de Fibonacci, definida por  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 1$  e  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Vamos determinar  $U(z)$ , a transformada- $z$  da sucessão de Fibonacci.

Aplicando a segunda propriedade acima vista à relação de recorrência que define a sucessão de Fibonacci, e usando a linearidade, obtemos

$$z^2 U(z) - z^2 - z = zU(z) - z + U(z),$$

uma vez que  $u_0 = 1$  e  $u_1 = 1$ . Segue-se que

$$U(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{z^2}{(z - \Phi)(z - \Psi)},$$

onde  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $\Psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  são as raízes do denominador. Ambas são pólos simples de  $z^{n-1}U(z)$ . Calculemos os respectivos resíduos:

$$\text{Res}(z^{n-1}U(z); \Phi) = \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi - \Psi}, \quad \text{Res}(z^{n-1}U(z); \Psi) = \frac{\Psi^{n+1}}{\Psi - \Phi}.$$

Como  $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$ , tem-se

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}),$$

que é o termo geral da sucessão de Fibonacci.

---

## Exercícios

125. Prove que se tem  $\mathcal{Z}[(a^n)] = \frac{z}{z-a}$  (para  $|z| > |a|$ ). Em particular,  $\mathcal{Z}[(1)] = \frac{z}{z-1}$  (para  $|z| > 1$ ).

126. Prove que  $\mathcal{Z}[(n)] = \frac{z}{(z-1)^2}$  (para  $|z| > 1$ ).

127. Usando resíduos, calcule a transformada- $z$  inversa das seguintes funções:

(a)  $\frac{1}{z^2-1}$ ;    (b)  $\frac{1}{z^2+1}$ ;    (c)  $\frac{1}{z^3+1}$ ;    (d)  $\frac{z^2}{(z^2-1)^2}$ ;    (e)  $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ .

128. Usando transformadas- $z$ , determine  $(u_n)$  sabendo que

(a)  $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$ ,  $u_0 = u_1 = 1$  (sucessão de Fibonacci).

(b)  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 4$ .

129. (a) Sendo  $(u_n)$  e  $(v_n)$  sucessões, a sua **convolução**  $(u_n) * (v_n)$  é a sucessão  $(w_n)$  definida por

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Prove que  $\mathcal{Z}[(u_n) * (v_n)] = \mathcal{Z}[(u_n)] \cdot \mathcal{Z}[(v_n)]$ .

(b) Sendo  $W(z) = \frac{z^2}{z^2-4}$ , determine  $(w_n)$  tal que  $\mathcal{Z}[(w_n)] = W(z)$  por dois processos:

i. usando o teorema dos resíduos;

ii. calculando a convolução  $(u_n) * (v_n)$ , onde  $\mathcal{Z}[(u_n)] = \frac{z}{z-2}$ ,

$$\mathcal{Z}[(v_n)] = \frac{z}{z+2}.$$

## 18 A transformada de Laplace

**Definição.** Seja  $f$  uma função de variável real contínua em  $[0, +\infty[$ . Define-se a **transformada de Laplace** de  $f$  como sendo a função

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Notação:  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

**Observações.** 1.  $F$  é definida para os valores de  $s$  para os quais o integral converge. O conjunto de tais valores é geralmente definido por uma condição da forma  $s > s^*$  para algum  $s^*$  (ou  $\operatorname{Re} s > s^*$ , se quisermos admitir valores complexos para  $s$ ).

2. Supomos que  $f$  e as suas derivadas têm as propriedades necessárias para cada raciocínio.

**Propriedades simples.** 1 - A transformação  $f \rightarrow \mathcal{L}[f]$  é linear, como função entre espaços vectoriais de funções.

2 - Sendo  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , tem-se

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

etc.

**Exemplos.** (a)  $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$  (para  $s > a$ ), onde  $a$  é um número real.

(b)  $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$  (para  $s > 0$ ).

**Observação.** Usando o teorema dos resíduos, é possível inverter a transformada de Laplace, isto é, achar a função  $f$  a partir da função  $F$ , como se vê a seguir, omitindo os pormenores.

**Teorema.** Estenda-se a função  $F$  ao plano complexo e suponhamos que  $F(z)$  é uma função diferenciável em  $\mathbb{C}$  excepto num número finito de singularidades. Então tem-se

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{zt} F(z) dz$$

onde  $\gamma$  é um caminho fechado dentro do qual estão as singularidades de  $F(z)$ . Logo,  $f(t)$  é igual à soma dos resíduos da função  $e^{zt}F(z)$  nas suas singularidades.

Omitimos a demonstração deste teorema.

**Observação.** A transformada de Laplace pode ser usada para resolver equações diferenciais lineares (problemas de valor inicial). A técnica consiste em aplicar  $L$  à equação, usar a linearidade e as propriedades relativas a  $\mathcal{L}[f^{(p)}]$ . Obtém-se uma equação algébrica em  $F(s)$ , que se resolve, e no fim inverte-se a transformada para obter a função desejada.

**Observação facultativa.** O resultado sobre a inversão da transformada de Laplace obtém-se a partir da relação entre esta e a **transformada de Fourier**: sendo  $f(t)$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , a sua transformada de Fourier é

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

supondo que o integral existe qualquer que seja  $\omega \in \mathbb{R}$ . Escrevemos  $\mathcal{F}[f(t)] = \varphi(\omega)$ . A transformação  $\mathcal{F}$  é linear, tem propriedades análogas a  $\mathcal{L}$  e pode também ser usada para resolver certos tipos de equações diferenciais.

Seja agora  $f(t)$  definida em  $[0, +\infty[$  e consideremos a sua transformada de Laplace  $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$  mas com  $s \in \mathbb{C}$ . Estendamos  $f$  a  $\mathbb{R}$  definindo  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ . Escrevendo  $s = \sigma + i\omega$ , é óbvio, tendo em conta a definição da transformada de Fourier, que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}]$$

e portanto a transformada de Laplace pode descrever-se em termos da transformada de Fourier.

É possível inverter a transformada de Fourier, isto é, achar a função  $f(t)$  a partir da função  $\varphi(\omega)$ . O teorema fundamental sobre essa questão afirma que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Este resultado, tendo em conta a relação entre a transformada de Fourier e a transformada de Laplace, permite inverter esta última, obtendo-se

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{i\omega t} d\omega$$

donde, recordando que  $s = \sigma + i\omega$ ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{st} d\omega.$$

Este integral impróprio calcula-se usando o teorema dos resíduos de forma análoga à dos integrais referidos na secção 16, obtendo-se finalmente a fórmula acima referida

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z)e^{zt} dz.$$

---

## Exercícios

130. Sendo  $a \in \mathbb{R}$ , prove que  $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$  (para  $s > a$ )
131. Prove que  $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$  (para  $s > 0$ ).
132. Usando resíduos, calcule a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:
- (a)  $\frac{1}{s^2-1}$ ;    (b)  $\frac{1}{s^2+1}$ ;    (c)  $\frac{1}{s^3+1}$ ;    (d)  $\frac{s^2}{(s^2-1)^2}$ ;    (e)  $\frac{s}{(s+1)(s+2)}$ .
133. Usando transformadas de Laplace, determine  $f$  satisfazendo:
- (a)  $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 6e^{-t}$ ,  $f'(0) = 3$ ,  $f(0) = 3$ .
- (b)  $f'(t) + 2f(t) = e^{3t}$ ,  $f(0) = 1$ .
- (c)  $f''(t) + 4f'(t) + 3f(t) = 6e^{-t}$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(0) = 0$ .
- (d)  $f''(t) - 4f(t) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(0) = 2$ .
- (e)  $f'(t) + f(t) = e^t$ ,  $f(0) = 0$ .
134. Sendo  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $[0, +\infty[$ , a sua **convolução**  $f * g$  é a função  $h$  definida por
- $$h(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx.$$
- Prove que  $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]$ .
135. Sendo  $H(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$ , determine  $h(t)$  tal que  $\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$  por dois processos:
- (a) usando o teorema dos resíduos;
- (b) calculando a convolução  $f * g$ , onde  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$ ,  $\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s-1}$ .

## 19 Zeros de funções diferenciáveis

**Definição.** *Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$  seja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Seja  $u$  um ponto de  $A$ . Dizemos que  $u$  é um **zero** de  $f$  se  $f(u) = 0$ .*

Seja  $u$  um zero de  $f$  e suponhamos que  $f$  é diferenciável e não nula numa bola aberta centrada em  $u$ . Então, nessa bola,  $f(z)$  é a soma de uma série de potências de  $z - u$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - u)^n.$$

O coeficiente  $a_0$  é igual a  $f(u)$  e portanto é igual a 0. Designemos por  $m$  o índice do primeiro coeficiente que é não nulo (como  $f$  não é a função nula, os coeficientes não são todos nulos).

**Definição.** *Seja  $u$  um zero de  $f$ . Se na série  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - u)^n$  se tiver*

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0 \quad e \quad a_m \neq 0$$

*dizemos que  $u$  é um **zero de ordem  $m$**  de  $f$  (também se usa a palavra **multiplicidade**). Se  $m = 1, 2, 3$ ,  $u$  diz-se um zero simples, duplo, triplo de  $f$ .*

A ordem de um zero de  $f$  pode caracterizar-se de várias maneiras.

**Teorema.** *As três condições seguintes são equivalentes:*

- (a)  $u$  é um zero de ordem  $m$  de  $f$ .
- (b) Nas vizinhanças de  $u$ ,  $f$  pode factorizar-se na forma  $f(z) = (z - u)^m h(z)$ , com  $h$  diferenciável nessas vizinhanças e  $h(u) \neq 0$ .
- (c)  $f(u) = f'(u) = f''(u) = \dots = f^{(m-1)}(u) = 0$  e  $f^{(m)}(u) \neq 0$ .

**Demonstração.** Se  $u$  for um zero de ordem  $m$  de  $f$ , tem-se, na bola em causa,

$$f(z) = a_m (z - u)^m + a_{m+1} (z - u)^{m+1} + \dots = (z - u)^m [a_m + a_{m+1} (z - u) + \dots]$$

isto é,  $f(z) = (z - u)^m h(z)$  com  $h$  diferenciável na mesma bola e  $h(u) \neq 0$ , porque  $h(u) = a_m$ .

Reciprocamente, se  $f(z) = (z - u)^m h(z)$ , com  $h$  diferenciável numa bola centrada em  $u$ , e  $h(u) \neq 0$ , então  $u$  é obviamente um zero de ordem  $m$  de  $f$ .

Como os coeficientes na série  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - u)^n$  são dados por  $a_n = \frac{f^{(n)}(u)}{n!}$ , temos a equivalência entre (a) e (c). ■

Da factorização  $f(z) = (z - u)^m h(z)$  tiramos uma consequência importante.

**Teorema.** *Designemos por  $Z_f$  o conjunto dos zeros de  $f$ . Se  $f$  não for a função nula e  $u$  for um zero de  $f$ , então  $u$  é um ponto isolado de  $Z_f$ , isto é, nas vizinhanças de  $u$  não há nenhum outro zero de  $f$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que a ordem de  $u$  é  $m$ . Temos  $f(z) = (z - u)^m h(z)$  com  $h$  diferenciável nas vizinhanças de  $u$  e  $h(u) \neq 0$ . Como  $h$  é diferenciável, é contínua. Logo, como  $h(u) \neq 0$ , existe uma vizinhança de  $u$  onde  $h(z) \neq 0$ . Logo, nessa vizinhança de  $u$ ,  $f$  não tem nenhum outro zero. ■

Isto tem uma consequência imediata:

**Corolário.** *Se  $u$  for ponto de acumulação de  $Z_f$  (e portanto também um zero de  $f$ ) numa bola centrada em  $u$ ,  $f$  tem de ser a função nula nessa bola.*

Esta observação pode ser generalizada com o resultado seguinte.

**Teorema.** *Seja  $A$  um subconjunto aberto conexo de  $\mathbb{C}$ . Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função diferenciável. Se  $Z_f$  tiver um ponto de acumulação em  $A$ , então  $f$  tem de ser a função nula em  $A$ .*

**Demonstração.** Seja  $u \in A$  um ponto de acumulação do conjunto dos zeros de  $f$  em  $A$ . Como  $A$  é aberto, existe uma bola  $B(u, R)$  contida em  $A$ . Pelo corolário anterior,  $f$  tem de ser a função nula nessa bola e, portanto todas as derivadas de  $f$  se anulam em  $u$ . Denotemos por  $G$  o conjunto dos pontos de  $A$  onde todas as derivadas de  $f$  se anulam. Vamos ver que  $G = A$ , o que implicará que  $f$  é a função nula em  $A$ .

Como vimos,  $G \neq \emptyset$ , pois  $u \in G$ . Suponhamos que  $G \neq A$ . Vamos ver que  $G$  e  $A \setminus G$  são ambos abertos. Começemos por  $G$ . Seja  $v$  um ponto qualquer de  $G$ . Como  $A$  é aberto, existe uma bola  $B(v, R)$  contida em  $A$ . Nessa bola,  $f(z)$  é a soma de uma série de potências de  $z - v$  e os coeficientes são  $\frac{1}{n!} f^{(n)}(v)$ , logo são todos zero porque  $v \in G$ . Logo  $f$  é a função nula em  $B(v, R)$  e portanto essa bola está contida em  $G$ , que é assim aberto. Passemos a  $A \setminus G$ . Seja  $w$  um ponto qualquer de  $A \setminus G$ . Então existe  $k$  tal que  $f^{(k)}(w) \neq 0$ . Como  $f^{(k)}(w)$  é contínua, existe uma vizinhança de  $w$  onde  $f^{(k)}(z) \neq 0$ . Isto é, existe uma bola centrada em  $w$  totalmente contida em  $A \setminus G$ . Logo,  $A \setminus G$  é aberto. Como  $G$  e  $A \setminus G$  são abertos e são não vazios e disjuntos, formam uma desconexão de  $A$ , o que contradiz a hipótese de que  $A$  é conexo. ■

**Corolário.** (Teorema da unicidade.) *Se duas funções  $f$  e  $g$  diferenciáveis num aberto conexo  $A$  tiverem os mesmo valores num conjunto que tem um ponto de acumulação em  $A$ , então têm de ser a mesma função.*

**Demonstração.** Basta aplicar o teorema anterior à função  $f - g$ . ■

Estes resultados são falsos para funções de uma variável real. Pense-se por exemplo na seguinte função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

A função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e  $Z_f = \mathbb{R}_0^-$ . Todos os pontos de  $Z_f$  são pontos de acumulação mas  $f$  não é a função nula.

O teorema de unicidade diz uma coisa extraordinária. Sendo  $A \subseteq \mathbb{C}$  aberto conexo, uma função diferenciável  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  é determinada pelos valores que toma num conjunto que tenha um ponto de acumulação em  $A$ . Esse conjunto pode ser por exemplo uma curva, ou uma bola.

---

## Exercícios

136. Determine a ordem de todos os zeros da função  $\sin z$ .
137. Determine a ordem do zero  $u = 0$  para as funções  $z^2(e^{z^2} - 1)$  e  $6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$ .
138. Determine a ordem de todos os zeros das seguintes funções:
- (a)  $z^2 + 9$ ;      (b)  $z \sin z$ ;      (c)  $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$ ;      (d)  $1 - \cos z$ ;  
(e)  $(z^2 - \pi^2)^2 \sin z$ ;      (f)  $\sin^3 z$ ;      (g)  $\sin z^3$ ;      (h)  $(z - 1)(1 - e^{z-1})$ .
139. Determine todas as funções  $f$  diferenciáveis em  $\mathbb{C}$  tais que  $f(x) = e^x$  para  $x \in \mathbb{R}$ .
140. Usando o teorema da unicidade, prove que  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$  para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ .
141. Existe alguma função  $f$  diferenciável nas vizinhanças de 0 que satisfaça  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ?
142. A função  $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$  tem uma sucessão infinita de zeros que se acumulam no ponto 0 mas não é a função nula. Porque é que isto não contradiz o teorema da unicidade?
143. Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis num aberto conexo  $A$ . Prove que, se  $f(z)g(z) = 0$  para todo o  $z \in A$ , então  $f$  ou  $g$  tem de ser a função nula.  
(Na linguagem da Álgebra, isto significa que o anel das funções diferenciáveis em  $A$  é um domínio de integridade.)

## 20 Teorema de Rouché

Nesta secção vamos ver aplicações interessantes de resultados anteriores.

Suponhamos que  $u$  é um zero de ordem  $m$  de uma função diferenciável  $f$ . Então, como vimos na secção anterior, tem-se, nas vizinhanças de  $u$ ,  $f(z) = (z - u)^m h(z)$ , com  $h$  diferenciável nessas vizinhanças e  $h(u) \neq 0$ . Segue-se que

$$f'(z) = m(z - u)^{m-1}h(z) + (z - u)^m h'(z)$$

donde

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - u} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

e  $\frac{h'(z)}{h(z)}$  é diferenciável em  $u$  e nas suas vizinhanças. Logo,

$$\text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}; u \right) = m.$$

Com um raciocínio análogo concluímos que, se  $u$  for um pólo de ordem  $m$  de  $f$ , então

$$\text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}; u \right) = -m.$$

Daqui tira-se imediatamente, usando o teorema dos resíduos, o seguinte:

**Teorema.** *Seja  $A$  um conjunto aberto e seja  $\gamma$  um caminho fechado em  $A$ . Seja  $f$  uma função diferenciável em  $A$ , não nula em  $\{\gamma\}$  e cujas singularidades dentro de  $\gamma$  são todas pólos. Designemos por  $N_f$  o número de zeros de  $f$  dentro de  $\gamma$  e por  $P_f$  o número de pólos de  $f$  dentro de  $\gamma$  (todos contados com as suas multiplicidades). Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f.$$

**Corolário.** (Teorema de Rouché) *Seja  $A$  um conjunto aberto e seja  $\gamma$  um caminho fechado em  $A$ . Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis em  $A$  e dentro de  $\gamma$ . Se, para todos os pontos  $z$  de  $\{\gamma\}$ , se tiver*

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|,$$

*então  $f$  e  $g$  têm o mesmo número de zeros dentro de  $\gamma$ .*

**Demonstração.** Ponhamos  $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ . Então os zeros de  $F$  são os zeros de  $g$  e os pólos de  $F$  são os zeros de  $f$ . Portanto, tem-se

$$N_F - P_F = N_g - N_f.$$

Assim, para provar o Teorema de Rouché, bastará, conforme o teorema anterior, mostrar que  $\int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0$ . Calculemos então esse integral, supondo o caminho  $\gamma$  definido no intervalo  $[a, b]$ . Tem-se

$$\int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))}{F(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{(F \circ \gamma)'(t)}{(F \circ \gamma)(t)} dt.$$

A hipótese diz que, para todos os pontos  $z$  de  $\{\gamma\}$ , se tem

$$|F(z) - 1| < 1, \quad \text{ou seja} \quad |F(\gamma(t)) - 1| < 1 \quad \text{para todos os } t \in [a, b].$$

Logo, a imagem do caminho  $F \circ \gamma$  está contida na bola  $B(1, 1)$ . Continuando, temos

$$\int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \int_{F \circ \gamma} \frac{1}{z} dz$$

e este último integral é nulo, pelo Teorema de Cauchy, porque, como vimos, 0 está fora de  $F \circ \gamma$ . ■

O Teorema de Rouché permite determinar o número de zeros de funções diferenciáveis dentro de caminhos fechados, comparando-as com outras mais simples. Nesse espírito, conseguimos obter uma nova prova do Teorema Fundamental da Álgebra:

**Teorema.** *Seja  $g(z)$  um polinômio de grau  $n$  (com  $n \geq 1$ ) de coeficientes complexos. Então  $g(z)$  tem  $n$  raízes em  $\mathbb{C}$ .*

**Demonstração.** Ponhamos, sem perda de generalidade,  $g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . Vamos aplicar o Teorema de Rouché às funções  $g(z)$  e  $f(z) = z^n$ . Temos

$$|g(z) - f(z)| = |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n|$$

donde, para  $z \neq 0$ ,

$$\frac{|g(z) - f(z)|}{|f(z)|} = \left| \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right|.$$

Ora isto tende para 0 quando  $|z|$  aumenta. Assim, para  $|z|$  suficientemente grande, digamos  $|z| \geq R$ , tem-se

$$\left| \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| < 1,$$

isto é,  $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$ . Logo, pelo Teorema de Rouché,  $g(z)$  tem o mesmo número de zeros que  $z^n$  em  $B(0, R)$  e esse número é  $n$ . ■

---

## Exercícios

144. Para cada um dos seguintes polinômios, determine, usando o Teorema de Rouché, o número de zeros que tem na região indicada:

(a)  $z^4 - 3z + 1$  ( $|z| < 1$ )

(b)  $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$  ( $|z| < 1$ )

(c)  $z^3 - 12z + 2$  ( $|z| < 2$ )

(d)  $z^4 + z^3 - 4z + 1$  ( $1 < |z| < 2$ )

## 21 Soluções de alguns dos exercícios

1. a)  $24 - 16i$   
b)  $51 + 32i$   
c)  $\frac{6}{25} - i\frac{17}{25}$   
d)  $-\frac{72}{325} + i\frac{321}{325}$   
e)  $-9 + 5i$   
f)  $-4$
2.  $\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}$  e  $\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}$
8. b) A primeira condição é equivalente a  $|z - 1|^2 < |z + 1|^2$ . Agora use-se o ex. 6.a e b.
9. a)  $5 \operatorname{cis}(\pi)$   
b)  $5 \operatorname{cis}(\pi/2)$   
c)  $\sqrt{2.2} \operatorname{cis}(-3\pi/4)$   
d)  $2 \operatorname{cis}(\pi/3)$   
e)  $6 \operatorname{cis}(\pi/6)$   
f)  $\sqrt{2.2} \operatorname{cis}(5\pi/12)$
10.  $-1/2 - i\sqrt{3}/2$
11. Consequência de que  $(1 + i)/(1 - i) = i = \operatorname{cis}(\pi/2)$
12. a)  $1, \operatorname{cis}(2\pi/3), \operatorname{cis}(-2\pi/3)$   
b)  $-1, \operatorname{cis}(\pi/3), \operatorname{cis}(-\pi/3)$   
c)  $\operatorname{cis}(\pi/4), \operatorname{cis}(-3\pi/4)$   
d)  $\operatorname{cis}(\pi/4), \operatorname{cis}(3\pi/4), \operatorname{cis}(-\pi/4), \operatorname{cis}(-3\pi/4)$   
e)  $2^{1/4}\operatorname{cis}(\pi/8), 2^{1/4}\operatorname{cis}(5\pi/8), 2^{1/4}\operatorname{cis}(9\pi/8), 2^{1/4}\operatorname{cis}(13\pi/8)$   
f)  $\operatorname{cis}(2k\pi/n), k = 0, 1, \dots, n - 1$
13.  $\sqrt{2.2}\operatorname{cis}(3\pi/12), \sqrt{2.2}\operatorname{cis}(11\pi/12), \sqrt{2.2}\operatorname{cis}(19\pi/12)$
15. a)  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$   
b)  $z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$   
c)  $z^2 - 2z + 5 = (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$
16.  $z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$

17.  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

$\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$

$\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$

$\cos 6\theta = 32 \cos^6 \theta - 48 \cos^4 \theta + 18 \cos^2 \theta - 1$

24.  $B(2i, 3\sqrt{5})$

34. a) Desconexo. As duas bolas indicadas formam uma desconexão.

b) Desconexo. As duas bolas indicadas formam uma desconexão.

c) Conexo (é conexo por caminhos).

42. c)  $\mathbf{C}$

50. a)  $8 + 3i$

b)  $-12$

51. a) Domínio:  $\mathbf{C} \setminus \{-1, \operatorname{cis}(\pi/3), \operatorname{cis}(-\pi/3)\}$

Derivada:  $(-4z^3 + 2)/(z^3 + 1)^2$

b) Domínio:  $\mathbf{C} \setminus \{1, \operatorname{cis}(2\pi/3), \operatorname{cis}(-2\pi/3), i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$

Derivada:  $-(5z^4 + 6z^2 - 2z)/[(z^3 - 1)^2(z^2 + 2)^2]$

57. Ponhamos  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Se o contradomínio de  $f$  estiver contido no eixo real, então  $v(x, y) = 0$  para todos os  $x, y$ . Logo, as duas derivadas parciais de  $v$  são ambas nulas para todos os  $x, y$  e, portanto, as de  $u$  também (pelas condições de Cauchy-Riemann). Portanto,  $f'$  é nula em todo  $\mathbf{C}$  e  $f$  é constante.

58. a)  $f(z) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy - x^2/2 + y^2/2) = (1 - i/2)z^2$

59.  $f(z) = -5x^2/2 + 5y^2/2 - y + i(x - 5xy) = -5z^2/2 + iz$

$$64. \frac{z}{1-z}$$

$$65. \frac{-1+2i}{5}$$

$$66. \text{ a) } \frac{1}{3-z} \quad (\text{convergência se } |z-2| < 1)$$

$$\text{ b) } \frac{1}{2+i+z} \quad (\text{convergência se } |z+i| < 2)$$

$$67. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

$$\text{ b) } \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \quad |z| < 1$$

$$\text{ c) } \sum_{n=0}^{\infty} z^n / 2^{n+1}, \quad |z| < 2$$

$$\text{ d) } \sum_{n=0}^{\infty} (1+2^n)z^n, \quad |z| < 1/2$$

$$68. e^0 = 1$$

$$e^{2\pi i} = 1$$

$$e^{\pi i} = -1$$

$$e^{-\pi i} = -1$$

$$e^{\pi i/2} = i$$

$$e^{\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{k\pi i} = (-1)^k$$

$$69. |e^i| = 1, \quad \text{argumento principal: } 1$$

$$|e^{2+i}| = e^2, \quad \text{argumento principal: } 1$$

$$|e^{3+4i}| = e^3, \quad \text{argumento principal: } 4 - 2\pi$$

84. a) 1

b) 1

c) 1

d) 1

e) 2

f) 0

g) 1

h) 0

$$86. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}, \quad R=3$$

$$\begin{aligned} 87. \frac{e^z}{z+4} &= \left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\cdots\right) \left(\frac{1}{4}-\frac{z}{16}+\frac{z^2}{64}-\frac{z^3}{256}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3z}{16} + \frac{5z^2}{64} + \frac{17z^3}{768} + \cdots, \quad R=4 \end{aligned}$$

89. a)  $R=1$

$$b) \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$90. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

91. a)  $2 + i$

b)  $-\pi/2$

92. a) O integral ao longo de  $\gamma$  é  $i$ , ao longo de  $\sigma$  é  $2i$

b) Ambos são iguais a  $-1$

94. b)  $-22 + (101/6)i$

100. Por exemplo  $\pi$

101. a)  $2\pi i$

b)  $2\pi i \sin 4$

c)  $\pi/e$

112. Primeiro caminho:  $-2\pi i$ ; segundo caminho:  $\pi i e$

113.  $\pi i/12$

114. a)  $0$

b)  $-2\pi$

c)  $0$

d)  $2\pi i[1 + (-1)^{n-1}]/(n-1)!$

e)  $2\pi i/(n-2)!$

115. a)  $\frac{1}{z+1}$

b)  $\frac{1}{(z-3)^5}$

c)  $-\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1} (z+i)^{n-1} = -\frac{1}{2i}(z+i) - \left(\frac{1}{2i}\right)^2 - \left(\frac{1}{2i}\right)^3 (z+i) - \dots$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots$

e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!z^n}\right) = \dots + \left(\frac{1}{2!z^2}\right) + \frac{1}{z} + 1$

f)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^{n-1}$

116.  $\frac{e^z}{z^2-1} = \frac{e/2}{z-1} + e/4 + (e/8)(z-1) + (e/48)(z-1)^2 + \dots$

117. a) Singularidade removível

b) Pólo de ordem 1

c) Singularidade removível

d) Pólo de ordem 1

e) Pólo de ordem 2

f) Singularidade removível

g) Pólo de ordem 1

h) Singularidade removível

i) Não é um pólo

j) Pólo de ordem 3

k) 0 é um pólo de ordem 1 desta função

l) Singularidade removível

m) Pólo de ordem 2

n) Não é um pólo

o) Pólo de ordem 2

118. a)  $-1/2$

b)  $1$

c)  $0$

d)  $0$

e)  $e$

f)  $1/2ie$

g)  $e$

h)  $1$

i)  $1/(m-1)!$

j)  $40$

l)  $\sqrt{2}/2$

m)  $1$

n)  $-1/2a^2e^a$

o)  $1/4ia$

122. a)  $2\pi i$  (note-se que  $(z^3 + 1)/(z + 1) = z^2 - z + 1$  e portanto  $-1$  é singularidade removível)

b)  $2\pi i(-1 + \sin 1)$

c)  $\pi i$

d)  $-\pi i/4$

e)  $-2\pi i, \pi ie, \pi i(e - 2)$

f)  $\pi i/2, 0 < r < 2; -2\pi i, r > 2$

g)  $-2\pi i$

h) 0

i) 0

j)  $3\pi i$

k)  $\pi$

123. a)  $2\pi/\sqrt{3}$

b)  $4\pi/(3\sqrt{3})$

c)  $\pi/12$

d)  $\pi/\sqrt{2}$

e)  $3\pi/(8\sqrt{2})$

124. a)  $\pi/\sqrt{2}$

b) 0

c) 0

d)  $\pi/8$

e)  $\pi/e$

f)  $\pi/(2e)$

126.  $Z[n] = 1/z + 2/z^2 + 3/z^3 + \dots$

Ponhamos  $w = 1/z$ . Então  $Z[n] = w + 2w^2 + 3w^3 + \dots = w(1 + 2w + 3w^2 + \dots)$ . Para  $|w| < 1$ , a série entre parênteses tem soma  $1/(1-w)^2$ . Logo  $Z[n] = w/(1-w)^2 = z/(z-1)^2$  para  $|z| > 1$ .

128. a)  $u_n = (a^{n+1} - b^{n+1})/(a - b)$ , onde  $a = (1 + \sqrt{5})/2$ ,  $b = (1 - \sqrt{5})/2$

b)  $u_n = 2(3^n - 1)$

129. b-i).  $w_n = \text{Res}[z^{n+1}/(z^2 - 4); 2] + \text{Res}[z^{n+1}/(z^2 - 4); -2] = 2^{n-1} + (-1)^n 2^{n-1}$ , isto é,  $w_n = 0$  se  $n$  for ímpar e  $w_n = 2^n$  se  $n$  for par

b-ii).  $u_n = 2^n$ ,  $v_n = (-2)^n$ , seja  $w_n = u_n * v_n$ , usando a definição de convolução de sucessões, vem que  $w_n = 0$  se  $n$  for ímpar e  $w_n = 2^n$  se  $n$  for par

133. a)  $e^{-t} + 2e^{2t}$

b)  $\frac{1}{5}.e^{3t} + \frac{4}{5}.e^{-2t}$

c)  $e^{-3t} + 3te^{-t} - e^{-t}$

d)  $\frac{5}{4}.e^{2t} + \frac{3}{4}.e^{-2t}$

e)  $\operatorname{sh} t$

137. Ordem 4 e ordem 15, respectivamente.

138. a)  $3i$  e  $-3i$  são ambos zeros simples

b) 0 é um zero duplo,  $k\pi$  (com  $k$  inteiro não nulo) são zeros simples.

c) 2 e  $-2$  são zeros triplos,  $2k\pi i$  (com  $k$  inteiro) são zeros simples.

e)  $\pi$  e  $-\pi$  são zeros triplos,  $k\pi$  (com  $k$  inteiro diferente de 1 e  $-1$ ) são zeros simples.

f)  $k\pi$  (com  $k$  inteiro) são zeros triplos.

h) 1 é um zero duplo,  $1 + 2k\pi i$  (com  $k$  inteiro não nulo) são zeros simples.

139. Só a função  $\exp z$ .

141. Não.

144. a) Um.

b) Três.

c) Um.

d) Três.