

Os números reais.

- Sendo $A \subseteq \mathbb{R}$:
 - (a) Um número m é um **majorante** de A se $\forall_{x \in A} x \leq m$.
 - (b) Um número a é o **máximo** de A (notação: $a = \max A$) se $a \in A$ e $\forall_{x \in A} x \leq a$.
 - (c) Um número c é o **supremo** de A (notação: $c = \sup A$) se for o menor dos majorantes de A , isto é, se c for um majorante de A e $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in A} c - \varepsilon < x$.

As definições de **mínimo**, **minorante** e **ínfimo** são análogas, trocando o sentido das desigualdades.

- Propriedade fundamental de $\mathbb{R}$: Se $A \neq \emptyset$ for um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado à direita (isto é, com majorantes), então A tem supremo em $\mathbb{R}$.
- Verifique que $\mathbb{Q}$ não tem esta propriedade.
- Consequência: Uma sucessão em $\mathbb{R}$ que seja limitada e crescente tem limite em $\mathbb{R}$.

Conjuntos.

- Conjuntos definidos **em extensão** (exemplo: $\{a, e, i, o, u\}$) ou **em compreensão** (exemplo: $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$).
- Sendo A e B conjuntos, chamamos:
 - (a) **Intersecção** de A com B (notação: $A \cap B$) ao conjunto $\{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
 - (b) **Reunião** de A com B (notação: $A \cup B$) ao conjunto $\{x : x \in A \vee x \in B\}$.
 - (c) **Complementar** de A (notação: $\setminus A$) ao conjunto $\{x : x \notin A\}$.
O complementar de A também se pode denotar por $X \setminus A$, se quisermos fazer referência a um conjunto X dentro do qual estamos a trabalhar: $X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$.
 - (d) **Produto cartesiano** de A por B (notação: $A \times B$) ao conjunto $\{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$.
- Prove as seguintes propriedades:
 - (a) $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
 - (b) $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
 - (c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 - (d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - (e) $\setminus(A \cap B) = \setminus A \cup \setminus B$.
 - (f) $\setminus(A \cup B) = \setminus A \cap \setminus B$.

- Seja I um conjunto arbitrário de índices. Se a cada $i \in I$ corresponder um conjunto A_i temos o que se chama uma **família de conjuntos**. Definimos então a intersecção e a reunião dos conjuntos da família:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x: \forall_{i \in I} x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x: \exists_{i \in I} x \in A_i\}$$

- Prove as seguintes propriedades, que generalizam algumas das anteriores:

$$(a) \quad A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i).$$

$$(b) \quad A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

$$(c) \quad \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} \setminus A_i.$$

$$(d) \quad \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} \setminus A_i.$$

Funções.

- Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função e sejam $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Definimos

$$f(A) = \{y \in Y: \exists_{x \in A} y = f(x)\} \quad \text{e} \quad f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$$

(a **imagem directa** de A por f e a **pré-imagem** ou **imagem inversa** de B por f).

- Sendo $f: X \rightarrow Y$ uma função, $A, A_1, A_2 \subseteq X$ e $B, B_1, B_2 \subseteq Y$, prove as seguintes propriedades:

$$(a) \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

$$(b) \quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

$$(c) \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

$$(d) \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

$$(e) \quad A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

$$(f) \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

$$(g) \quad f^{-1}(\setminus B) = \setminus f^{-1}(B).$$

Nos casos em que há inclusões, dar exemplos que mostrem que nem sempre há igualdade.

- Nas alíneas (a), (b), (c) e (d) enunciar e provar as generalizações das propriedades para famílias arbitrárias de conjuntos.

- Prove que:

$$(a) \quad \text{Se } f \text{ for injectiva, então } A = f^{-1}(f(A)).$$

$$(b) \quad \text{Se } f \text{ for sobrejectiva, então } f(f^{-1}(B)) = B.$$

- Sendo $f: X \rightarrow Y$ uma função e $A \subseteq X$, a **restrição** de f a A é a função de A para Y que para cada $a \in A$ toma o valor $f(a)$. Notação: $f|_A$.

- Sendo $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ funções, a **composição** de g com f é a função de X para Z que para cada $x \in X$ toma o valor $g(f(x))$. Notação: $g \circ f$.

- Sendo $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ funções e sendo $C \subseteq Z$, encontre e prove uma fórmula para $(g \circ f)^{-1}(C)$ envolvendo imagens inversas por f e por g .

Topologia e Análise Linear

Ano lectivo 2023/2024

Folha 1

Definição. Seja M um conjunto não vazio. Suponhamos que a cada par (x, y) de elementos de M está associado um número real $d(x, y)$ (isto é, temos uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$) de forma que sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$d(x, y) = 0 \quad \text{se e só se} \quad x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{quaisquer que sejam } x, y \in M$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{quaisquer que sejam } x, y, z \in M.$$

Então a d chama-se uma **distância** ou **métrica** em M e a $d(x, y)$ chamamos distância entre x e y .

Ao par (M, d) — ou simplesmente a M — chama-se um **espaço métrico**. Aos elementos de M é habitual chamar **pontos** do espaço.

1. Prove que, sendo (M, d) um espaço métrico, se tem $d(x, y) \geq 0$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. (Sugestão: $d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x)$.)

2. Prove que, sendo (M, d) um espaço métrico, se tem

$$d(x, y) \leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_{n-1}, z_n) + d(z_n, y)$$

quaisquer que sejam $x, y, z_1, z_2, \dots, z_n \in M$.

3. Prove que, sendo (M, d) um espaço métrico, se tem $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$ quaisquer que sejam $x, y, z \in M$.

4. Prove que, sendo (M, d) um espaço métrico, se tem $|d(u, w) - d(v, z)| \leq d(u, v) + d(w, z)$ quaisquer que sejam $u, v, z, w \in M$.

5. Prove que $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico para a função d_2 definida por $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$, onde

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (\text{Esta é a chamada “métrica euclidiana” e é a métrica usual em } \mathbb{R}^n.)$$

6. Prove que $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico para a função d_∞ definida por $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$, onde $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$.

7. Prove que $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico para a função d_1 definida por $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$, onde $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

8. Sendo $x, y \in \mathbb{R}^n$, prove que

$$(a) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \quad \text{e portanto} \quad d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x, y).$$

$$(b) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \quad \text{e portanto} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y).$$

9. Prove que o conjunto das funções reais contínuas no intervalo $[a, b]$, denotado por $C[a, b]$, é um espaço métrico para a função d definida por

$$d(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [a, b]\}.$$

(Esta é a métrica usual em $C[a, b]$.)

10. Prove que $C[a, b]$ é um espaço métrico para d definida por $d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$.
E se usarmos a mesma função d no conjunto das funções integráveis em $[a, b]$?

11. No conjunto das funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$ considere as distâncias definidas nos exercícios 9 e 10. Calcule, para cada uma dessas métricas:

(a) $d(\sin t, \cos t)$; (b) $d(t^2, t)$; (c) $d(1 - t, t^2)$.

12. Prove que, sendo A um conjunto qualquer, o conjunto das funções reais limitadas de A para $\mathbb{R}$, denotado por $L(A)$, é um espaço métrico para a função d definida por

$$d(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in A\}.$$

Um caso particular importante é o de $A = \mathbb{N}$: $L(\mathbb{N})$ é o conjunto das sucessões reais limitadas, que é um espaço métrico com a distância $d((u_n), (v_n)) = \sup\{|u_j - v_j| : j \in \mathbb{N}\}$.

13. Prove que $C[a, b]$ (com a distância definida no exercício 9) é um subespaço de $L[a, b]$.

14. Prove que, sendo A um conjunto qualquer e n um número natural, o conjunto A^n das funções de $\{1, \dots, n\}$ para A é um espaço métrico para a função d definida por

$$d(f, g) = \#\{k : f(k) \neq g(k)\}.$$

(Esta é a “distância de Hamming”, importante em teoria dos códigos.)

15. Prove que, sendo M o conjunto das matrizes $m \times n$ sobre um corpo qualquer, a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(A, B) = \text{car}(A - B)$ é uma métrica em M .

16. Prove que, sendo M um conjunto qualquer não vazio, a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

é uma métrica em M (a chamada “métrica discreta” ou “métrica 0-1”).

17. Para cada uma das seguintes funções $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, verifique se é uma distância em $\mathbb{R}$:

(a) $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 + |x - y| & \text{se } x \neq y \end{cases}$

(b) $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ |x| + |y| & \text{se } x \neq y \end{cases}$

(c) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

(d) $d(x, y) = |x^3 - y^3|$.

18. Seja (M, d) um espaço métrico. Verifique quais das funções $d' : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em seguida são distâncias em M :

(a) $d' = K \cdot d$ onde $K > 0$ é uma constante; (b) $d' = \min\{1, d\}$; (c) $d' = d^2$; (d) $d' = \frac{d}{1 + d}$.

19. Prove que, sendo (M', d') e (M'', d'') espaços métricos, o produto cartesiano $M' \times M''$ é um espaço métrico para a função $d((x', x''), (y', y'')) = \max\{d'(x', y'), d''(x'', y'')\}$.

Definição. Seja (M, d) um espaço métrico. Sejam $x \in M, r > 0$. A **bola aberta de centro x e raio r** é o conjunto $B(x, r) = \{y \in M : d(y, x) < r\}$. A **bola fechada de centro x e raio r** é o conjunto $\overline{B}(x, r) = \{y \in M : d(y, x) \leq r\}$.

20. Prove que: (a) Se $x \neq x'$, existem $r, r' > 0$ tais que $B(x, r) \cap B(x', r') = \emptyset$.
 (b) Se $y \in B(x, r)$, existe $s > 0$ tal que $B(y, s) \subseteq B(x, r)$.
21. Descreva as bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ para cada uma das métricas encontradas nos exs. 5 a 7.
22. Prove que, sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, e sendo $B_2(x, r)$, $B_\infty(x, r)$ e $B_1(x, r)$ as bolas abertas de centro x e raio r referentes à métrica usual e às dos exs. 6 e 7, respectivamente, se tem
 (a) $B_\infty(x, \frac{1}{\sqrt{n}}r) \subset B_2(x, r) \subset B_\infty(x, r)$; (b) $B_1(x, r) \subset B_2(x, r) \subset B_1(x, \sqrt{n}r)$.
23. No espaço métrico $C[0, 1]$ com a métrica vista no ex. 9 considere as funções $f(t) = 0$ e $g(t) = t$. Descreva a região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B(f, 1)$ e a $B(g, 1)$.
24. Descreva as bolas num espaço métrico com a métrica discreta.

Definição. Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M . Diz-se que A é **aberto** se para qualquer ponto x de A existe uma bola aberta de centro x contida em A . Diz-se que A é **fechado** se $M \setminus A$ for aberto.

25. Sendo M um espaço métrico, prove que: (a) $\emptyset$ e M são abertos e fechados.
 (b) Uma bola aberta é um conjunto aberto.
 (c) Uma bola fechada é um conjunto fechado.
26. Verifique se os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^2$ para a métrica usual:
 (a) $]0, 1[\times]0, 1[$; (b) $[0, 1[\times]0, 1[$; (c) $\{(x, y) : x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$; (d) $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$;
 (e) $\{(x, y) : x \neq y\}$; (f) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$; (g) $\{(x, 0) : 0 \leq x < 1\}$; (h) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.
27. Prove que: (a) Qualquer reunião de conjuntos abertos é aberta.
 (b) Qualquer intersecção de um número finito de conjuntos abertos é aberta.
 (c) Uma intersecção arbitrária de conjuntos abertos não é necessariamente aberta.
28. Prove que: (a) Qualquer intersecção de conjuntos fechados é fechada.
 (b) Qualquer reunião de um número finito de conjuntos fechados é fechada.
 (c) Uma reunião arbitrária de conjuntos fechados não é necessariamente fechada.
29. Prove que um conjunto não vazio é aberto se e só se for uma reunião de bolas abertas.
30. Prove que os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ relativamente à métrica usual, à métrica do ex. 6 e à métrica do ex. 7 são precisamente os mesmos (ver ex. 22).
31. Prove que: (a) um conjunto só com um elemento é sempre fechado.
 (b) Prove que um conjunto com um número finito de elementos é sempre fechado.

32. Prove que todos os subconjuntos de um espaço métrico discreto são abertos e fechados.
33. (a) Dados espaços métricos M' e M'' , tomemos em $M' \times M''$ a distância definida no ex. 19. Prove que, se U' for aberto em M' e U'' for aberto em M'' , então $U' \times U''$ é um aberto de $M' \times M''$.
 (b) Mostre que os subconjuntos abertos de $M' \times M''$ não são todos necessariamente dessa forma.
34. Seja S um subespaço de M e $x \in S$. Prove que: (a) A bola em S de centro x e raio r é $B(x, r) \cap S$.
 (b) Se A for um subconjunto aberto de M então $A \cap S$ é aberto em S .
 (c) Reciprocamente, se A_1 for um aberto de S existe A aberto em M tal que $A \cap S = A_1$.

Definição. Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M .

- (a) Diz-se que um ponto $x \in M$ é **interior a** A se existir uma bola aberta de centro x contida em A . O **interior de** A é o conjunto $\text{int}(A)$ dos pontos interiores a A .
 (b) Diz-se que um ponto $x \in M$ é **aderente a** A se não for interior a $M \setminus A$, isto é, se qualquer bola de centro x intersectar A . O **fecho** de A é o conjunto $\overline{A}$ dos pontos aderentes a A .
 (c) Diz-se que um ponto $x \in M$ é **fronteiro a** A se for aderente a A e a $M \setminus A$. A **fronteira** de A é o conjunto $\text{fr}(A)$ dos pontos fronteiros a A .

35. Prove que: (a) $\text{int}(A) \subseteq A$. b) $\text{int}(A)$ é aberto.
 (c) $\text{int}(A)$ é a reunião de todos os conjuntos abertos contidos em A .
 (d) $\text{int}(A)$ é o maior conjunto aberto (no sentido da inclusão) contido em A .
 (e) (a) A é aberto se e só se $A = \text{int}(A)$.
36. Prove que: (a) $\overline{A} = M \setminus \text{int}(M \setminus A)$. (b) $A \subseteq \overline{A}$. (c) $\overline{A}$ é fechado.
 (d) $\overline{A}$ é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm A .
 (e) $\overline{A}$ é o menor conjunto fechado (no sentido da inclusão) que contém A .
 (f) A é fechado se e só se $A = \overline{A}$. (g) $\text{fr}(A) = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$.

Definição. Seja M um espaço métrico e $A \subseteq M$. Diz-se que A é **denso em** M se $\overline{A} = M$.

37. Prove que: A é denso em M se e só se $\forall_{U \subseteq M \text{ aberto}} U \cap A = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset$.
38. Prove que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (para a métrica usual).

Definição. Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M . Sendo x um elemento de M , a **distância** de x a A é $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

39. Prove que $x \in \overline{A}$ se e só se $d(x, A) = 0$.

Definição. Seja M um espaço métrico. Diz-se que $A \subseteq M$ é **limitado** se existir uma bola que o contenha. Sendo S qualquer, uma função $f : S \rightarrow M$ diz-se **limitada** se $f(S)$ for limitado.

40. Prove que se A e B forem conjuntos limitados então $A \cup B$ é um conjunto limitado.

Definição. Seja M um espaço métrico e seja $A \neq \emptyset$ um subconjunto de M . O **diâmetro** de A é $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ (que é um número real ≥ 0 ou então $+\infty$).

41. Prove que: (a) A é limitado se e só se $\text{diam}(A) < +\infty$.
 (b) Prove que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.
 (c) Prove que, se $A \cap B \neq \emptyset$, então $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$.

Definição. Seja M um espaço métrico. Uma **sucessão** de elementos de M é uma aplicação de $\mathbb{N}$ para M . Para apresentar uma sucessão $u : \mathbb{N} \rightarrow M$ é habitual indicar, para um natural genérico n , a sua imagem por u , $u(n)$, que se chama **termo de ordem n** ou **termo geral** da sucessão e que se costuma denotar simplesmente por u_n .

Definição. Sejam M um espaço métrico, c um ponto de M e (u_n) uma sucessão de elementos de M . Diz-se que (u_n) **converge** (ou **tende**) para c , e escreve-se $u_n \rightarrow c$, se qualquer conjunto aberto contendo c contiver todos os termos de (u_n) excepto um número finito.

42. Prove que $u_n \rightarrow c$ se e só se qualquer bola aberta centrada em c contiver todos os termos de (u_n) excepto um número finito, isto é, se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(u_n, c) < \epsilon.$$

43. Prove que $u_n \rightarrow c$ se e só se a sucessão de números reais $d(u_n, c)$ tender para 0.

44. Seja (u_n) uma sucessão num espaço métrico. Prove que se $u_n \rightarrow c$ e $u_n \rightarrow d$ então $c = d$.

Definição. Se $u_n \rightarrow c$ diz-se que c é o **limite** de (u_n) e escreve-se $\lim u_n = c$.

45. Prove que as sucessões em $\mathbb{R}^n$ convergentes (e os respectivos limites) relativamente à métrica usual, à métrica do ex. 6 e à métrica do ex. 7 são precisamente as mesmas (ver ex. 22).
46. No espaço métrico do ex. 19, prove que $(u'_n, u''_n) \rightarrow (c', c'')$ se e só se $u'_n \rightarrow c'$ e $u''_n \rightarrow c''$.
47. Estude a convergência da sucessão (t^n) em $C[0, 1]$ para as duas métricas vistas neste conjunto.
48. Prove que, num espaço métrico discreto, as sucessões convergentes são as sucessões constantes a partir de certa ordem.
49. Prove que se (u_n) for convergente, é limitada (isto é, o conjunto $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ é limitado).
50. Seja M um espaço métrico, c um ponto de M e A um subconjunto de M . Prove que, então, tem-se $c \in \overline{A}$ se e só se existir uma sucessão de elementos de A que converge para c .
51. Prove que um subconjunto A de um espaço métrico é fechado se e só se contiver os limites de todas as sucessões convergentes de elementos de A .
52. Prove que o subconjunto do espaço métrico $C[0, 1]$ (com a métrica do máximo) constituído por todas as funções polinomiais em $[0, 1]$ não é fechado.
53. Seja (f_n) uma sucessão no espaço métrico $L(A)$ (ver ex. 12). Prove que, se $f_n \rightarrow f$, então tem-se, para cada $t \in A$, $f_n(t) \rightarrow f(t)$ (isto é, a convergência uniforme implica a convergência pontual).

Definição. Seja (u_n) uma sucessão num espaço métrico. Uma **subsucessão** de (u_n) é uma sucessão obtida da primeira considerando os termos de índices $m_1, m_2, \dots$ onde $m_1 < m_2 < \dots$.

54. Prove que, se uma sucessão converge para c , então qualquer subsucessão dela converge para c .
55. Dê um exemplo de uma sucessão não convergente mas com várias subsucessões convergentes.

Definição. Seja M um espaço métrico e (u_n) uma sucessão de elementos de M . Diz-se que (u_n) é uma **sucessão de Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m, n \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(u_m, u_n) < \epsilon$$

56. Prove que as sucessões de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ relativamente à métrica usual, à métrica do ex. 6 e à métrica do ex. 7 são precisamente as mesmas.
57. Prove que uma sucessão convergente é de Cauchy, mas a recíproca pode falhar.
58. Prove que uma sucessão de Cauchy é limitada.
59. Prove que uma sucessão de Cauchy que possui uma subsucessão convergente é também convergente (para o mesmo limite, claro).

Definição. Um espaço métrico M diz-se **completo** se qualquer sucessão de Cauchy de elementos de M tiver limite em M . Um subconjunto de um espaço métrico M diz-se completo se for completo como subespaço de M .

60. Prove que um subespaço completo de um espaço métrico qualquer é fechado.
61. Prove que um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é um espaço completo. Dê um exemplo que mostre que a afirmação pode falhar num espaço métrico não completo.
62. Prove que qualquer sucessão (u_n) de números reais possui uma subsucessão monótona. (Sugestão: Um termo u_p diz-se “destacado” se $u_p \geq u_n$ para todo o $n > p$. Seja P o conjunto dos termos destacados. Mostre que, se P for finito, existe uma subsucessão crescente e que, se P for infinito, existe uma subsucessão decrescente.)
63. (a) Prove que $\mathbb{Q}$ não é completo. (b) Prove que $\mathbb{R}$ é completo.
64. Prove que uma sucessão (x_n, y_n) em $\mathbb{R}^2$ é de Cauchy (para as métricas dos exs. 5, 6 e 7) se e só se x_n e y_n forem ambas de Cauchy. Generalize para o espaço métrico $M' \times M''$ do ex. 19.
65. Prove que $\mathbb{R}^2$ é completo (para as métricas dos exs. 5, 6 e 7). Generalize para $\mathbb{R}^n$.
66. Prove que $C[a, b]$ é completo para a métrica do máximo definida no ex. 9.
67. Prove que $C[0, 1]$ não é completo para a métrica do integral definida no ex. 10.
68. Prove que, se M' e M'' forem completos, o espaço $M' \times M''$ (v. ex. 19) é também completo.
69. Prove que todo o espaço métrico discreto é completo.

Definição. Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos. Seja $f : M \rightarrow M'$ uma função e seja $x_0 \in M$. Diz-se que f é **contínua em** x_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

f é **contínua** (em M) se for contínua em todos os pontos de M .

70. Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos. Seja $f : M \rightarrow M'$ uma função e seja $x_0 \in M$. Prove que f é contínua em x_0 se e só se, dada qualquer bola aberta centrada em $f(x_0)$, existir uma bola aberta centrada em x_0 cuja imagem por f está contida na primeira.
71. Prove que, em qualquer espaço métrico, uma função constante é contínua.
72. Prove que qualquer função definida num espaço métrico discreto é contínua.
73. Prove que f é contínua em x_0 se e só se, qualquer que seja a sucessão (u_n) convergente para x_0 , a sucessão $(f(u_n))$ convergir para $f(x_0)$.
74. Sejam M e M' espaços métricos, f e g funções contínuas de M em M' . Seja A um subconjunto não vazio de M . Prove que, se f e g coincidem em A , então coincidem em $\overline{A}$. (Sug.: ex. 50.)
75. Mostre que uma função contínua não transforma necessariamente sucessões de Cauchy em sucessões de Cauchy. (Sugestão: pense na função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1/(t - \sqrt{2})$ e numa sucessão qualquer de números racionais convergente para $\sqrt{2}$.)
76. Mostre que uma função contínua entre espaços métricos não transforma necessariamente
 - (a) conjuntos abertos em conjuntos abertos;
 - (b) conjuntos fechados em conjuntos fechados.
77. Sejam M e M' espaços métricos. Seja $f : M \rightarrow M'$ uma função. Prove que f é contínua em M se e só se, para qualquer aberto A' em M' , o conjunto $f^{-1}(A')$ for aberto em M .

Definição. Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos. Seja $f : M \rightarrow M'$ uma função. Diz-se que f é uma **função de Lipschitz** se existir um número real K tal que

$$\forall x, y \in M \quad d'(f(x), f(y)) \leq K d(x, y).$$

A K chama-se uma **constante de Lipschitz** para f .

78. Prove que uma função de Lipschitz é contínua.
79. Prove que $\frac{1}{t}$, como função de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$ (com a métrica usual) não é de Lipschitz.

Definição. Seja M um espaço métrico e seja $f : M \rightarrow M$ uma função. Diz-se que $x^* \in M$ é um **ponto fixo** de f se $f(x^*) = x^*$.

80. Seja M um espaço métrico e seja $f : M \rightarrow M$ uma função. Seja $x_0 \in M$. Defina-se a sucessão $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos f contínua. Prove que, se (x_n) for convergente, o seu limite é um ponto fixo de f .
81. Seja M um espaço métrico e seja $f : M \rightarrow M$ uma função de Lipschitz com constante de Lipschitz K . Seja $x_0 \in M$. Defina-se a sucessão $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Prove que:
- (a) $d(x_{n+1}, x_n) \leq K d(x_n, x_{n-1})$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) $d(x_{n+1}, x_n) \leq K^n d(x_1, x_0)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) $d(x_m, x_n) \leq K^n \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} d(x_1, x_0)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ (se $K \neq 1$).

Definição. Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos. Seja $f : M \rightarrow M'$ uma função. Diz-se que f é uma **contracção** se for uma função de Lipschitz com uma constante de Lipschitz menor que 1.

82. Mostre que uma contracção $f : M \rightarrow M$ tem no máximo um ponto fixo.
83. Seja M um espaço métrico e seja $f : M \rightarrow M$ uma contracção com constante de Lipschitz K . Seja $x_0 \in M$. Defina-se a sucessão $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Prove que:
- (a) $d(x_m, x_n) \leq \frac{K^n}{1 - K} d(x_1, x_0)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$.
 - (b) (x_n) é uma sucessão de Cauchy.
84. (Teorema do ponto fixo de Banach) Seja M um espaço métrico completo e seja $f : M \rightarrow M$ uma contracção com constante de Lipschitz K . Prove que:
- (a) f tem um único ponto fixo x^* .
 - (b) Para qualquer ponto inicial $x_0 \in M$, a sucessão $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, converge para x^* .
 - (c) $d(x_n, x^*) \leq \frac{K^n}{1 - K} d(x_1, x_0)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
85. Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que f é uma contracção com constante $K < 1$ se e só se, para todo o $t \in I$, se tem $|f'(t)| \leq K$.
86. Mostre que, como funções de $[0, 1]$ em $[0, 1]$, o co-seno é uma contracção mas o seno não é.
87. Sejam g e φ funções reais de variável real, φ nunca nula. Mostre que, sendo f definida por $f(t) = t - \varphi(t)g(t)$, os zeros de g são exactamente os pontos fixos de f .
88. (Método de Newton) Seja g uma função real de variável real. Seja t^* um zero de g . Suponhamos que g possui segunda derivada contínua e g' é não nula. Mostre que, sendo f definida por $f(t) = t - \frac{g(t)}{g'(t)}$, existe um intervalo fechado I contendo t^* onde f é uma contracção. Logo, se $f(I) \subseteq I$, a iteração de f a partir de qualquer $t_0 \in I$ converge para t^* .

Definição. Uma matriz real $n \times n$ $A = [a_{ij}]$ diz-se **diagonalmente dominante** se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

89. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ diagonalmente dominante, e seja D a matriz diagonal de elementos diagonais $a_{11}, \dots, a_{nn}$. Tomemos em $\mathbb{R}^n$ a métrica d_∞ do ex. 6. Seja $b \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Prove que o sistema $Ax = b$ é equivalente à igualdade $x = D^{-1}[b - (A - D)x]$.
 (b) Prove que a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = D^{-1}[b - (A - D)x]$ é uma contracção com constante

$$K = \max \left\{ \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| : i = 1, \dots, n \right\}.$$

À iteração de f (a partir de qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$) para obter a solução aproximada de $Ax = b$ chama-se **algoritmo de Jacobi**.

90. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ diagonalmente dominante, e seja D a matriz diagonal de elementos diagonais $a_{11}, \dots, a_{nn}$. Decomponha-se $A - D$ na forma $L + U$, onde L é estritamente triangular inferior e U é estritamente triangular superior. Tomemos em $\mathbb{R}^n$ a métrica d_∞ do ex. 6. Seja $b \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Prove que o sistema $Ax = b$ é equivalente à igualdade $x = (D + L)^{-1}(b - Ux)$.
 (b) Prove que a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = (D + L)^{-1}(b - Ux)$ é uma contracção com constante

$$K = \max \left\{ \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| : i = 1, \dots, n \right\}.$$

À iteração de f (a partir de qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$) para obter a solução aproximada de $Ax = b$ chama-se **algoritmo de Gauss-Seidel**.

91. Seja $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que $\alpha \leq \frac{\partial f}{\partial y} \leq \beta$, com $\alpha > 0$. Tomemos em $C[a, b]$ a métrica usual (ex. 9). Prove que a aplicação $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ definida por

$$T(\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{f(x, \varphi(x))}{\beta}$$

é uma contracção com constante $K = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$.

92. (Teorema da função implícita) Mostre que, nas condições do ex. anterior, existe uma e só função φ contínua em $[a, b]$ tal que $f(x, \varphi(x)) = 0$.

93. Prove que o conjunto das funções contínuas do intervalo $[a, b]$ para um intervalo $[c, d]$ é um subconjunto fechado do espaço métrico $C[a, b]$, com a métrica usual.

94. Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Seja $f : [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua de duas variáveis reais.

Prove que, se uma função φ contínua satisfizer

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

então

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

95. Reciprocamente, nas mesmas condições, prove que, se

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt,$$

então

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

96. Nas condições dos exercícios anteriores, suponha-se $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínua e sejam L e N , respectivamente, majorantes de $|f|$ e de $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ em $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$.

Seja $h > 0$ satisfazendo $h \leq a$, $hL \leq b$ e $hN < 1$.

Seja M o espaço métrico das funções contínuas de $[x_0 - h, x_0 + h]$ para $[y_0 - b, y_0 + b]$ (com a métrica do ex. 9).

(a) Prove que M é completo.

(b) Sendo T a aplicação T definida em M por

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

prove que $T(M) \subseteq M$.

(c) Prove que T é uma contracção com constante $K = hN$.

97. (Teorema de Cauchy-Picard) Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Sendo $f : [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua.

Prove que existe um intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$, $h \leq a$, para o qual o problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma e uma só solução.

Definição. Seja X um conjunto não vazio e seja $\mathcal{T}$ uma família de subconjuntos de X . $\mathcal{T}$ diz-se uma **topologia em X** se:

- (a) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathcal{T}$
- (b) Qualquer reunião de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$
- (c) Qualquer intersecção de um número finito de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

Se $\mathcal{T}$ for uma topologia em X , ao par $(X, \mathcal{T})$ chama-se um **espaço topológico**.

Aos conjuntos da família $\mathcal{T}$ chama-se **abertos** do espaço topológico.

Diz-se que um subconjunto A de X é **fechado** se $X \setminus A$ for aberto.

98. Seja X um espaço topológico. Prove que:
- (a) $\emptyset$ e X são conjuntos fechados.
 - (b) Qualquer intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
 - (c) Qualquer reunião de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
99. Prove que todo o espaço métrico é um espaço topológico, com a topologia constituída pelos conjuntos abertos do espaço métrico. Diz-se que essa topologia **provém da métrica**.
100. Seja $X = \{a, b, c\}$ e seja $\mathcal{T}$ a topologia $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$. Usando a definição vista no início da Folha 3, mostre que a sucessão $a, a, a, \dots$ converge para todos os elementos de X . Conclua que esta topologia não provém de uma métrica.
101. Sendo X um conjunto não vazio qualquer, prove que cada uma das seguintes famílias de subconjuntos de X é uma topologia:
- (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ (a “topologia grosseira”)
 - (b) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (a “topologia discreta”)
 - (c) $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A : X \setminus A \text{ é finito}\}$ (a “topologia co-finita”). Mostre que se X for infinito esta topologia não provém de uma métrica (quaisquer abertos $\neq \emptyset$ intersectam-se).
102. Verifique quais das seguintes famílias de subconjuntos são topologias em $X = \{a, b, c, d, e\}$:
- (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$
 - (b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$
 - (c) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$
 - (d) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$.
103. Verifique quais das seguintes famílias de subconjuntos são topologias em $\mathbb{R}$:
- (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$
 - (b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$.
104. Mostre que as métricas vistas nos exs. 5, 6 e 7 originam a mesma topologia em $\mathbb{R}^n$.
105. Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ forem topologias em X , será $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ também uma topologia em X ? E $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$?

Definição. Sejam X e X' espaços topológicos. Seja $f : X \rightarrow X'$ uma função. Diz-se que f é **contínua em** X se, para qualquer aberto A' em X' , o conjunto $f^{-1}(A')$ for aberto em X .

106. Sejam X e X' espaços topológicos. Seja $f : X \rightarrow X'$ uma função. Prove que f é contínua em X se e só se, para qualquer fechado A' em X' , o conjunto $f^{-1}(A')$ for fechado em X .
107. Prove que são contínuas: (a) Qualquer função constante entre espaços topológicos.
(b) A função identidade em qualquer espaço topológico.
108. Sejam X e X' espaços topológicos. Prove que:
(a) Se a topologia de X for a discreta, então qualquer função $f : X \rightarrow X'$ é contínua.
(b) Se a topologia de X' for a grosseira, então qualquer função $f : X \rightarrow X'$ é contínua.
109. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual. Mostre que, se todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ forem contínuas, então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X .
110. Sejam X , X' e X'' espaços topológicos. Prove que, se $f : X \rightarrow X'$ e $g : X' \rightarrow X''$ são funções contínuas, então $g \circ f : X \rightarrow X''$ também é contínua.
111. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia definida no ex. 103(b). Verifique se as funções t , t^2 , t^3 e $\sin t$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são contínuas.

Definição. Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias num mesmo conjunto X . Diz-se que $\mathcal{T}'$ é **mais forte** (ou **mais fina**) do que $\mathcal{T}$ se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

112. Verifique que a topologia definida no ex. 103(b) é mais fraca do que a topologia usual em $\mathbb{R}$.
113. Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias num mesmo conjunto X . Prove que $\mathcal{T}'$ é mais fina do que $\mathcal{T}$ se e só se a função identidade de $(X, \mathcal{T}')$ em $(X, \mathcal{T})$ for contínua.

Definição. Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X . O **fecho** de A é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm A . Notação: $\overline{A}$.

114. Prove que: (a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$; (b) $\overline{X} = X$; (c) $A \subseteq \overline{A}$; (d) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$; (e) $\overline{A}$ é fechado;
(f) A é fechado se e só se $\overline{A} = A$; (g) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; (h) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; (i) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
115. Sejam A, U subconjuntos de um espaço topológico. Prove que, se U for aberto, então
$$U \cap \overline{A} \neq \emptyset \implies U \cap A \neq \emptyset.$$
116. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e seja Y um subconjunto de X não vazio. Prove que Y é um espaço topológico para a família $\{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$. Chama-se a Y um **subespaço** de X e à topologia indicada chama-se a **topologia induzida** por $\mathcal{T}$ em Y .
117. Sejam X e X' espaços topológicos e seja $f : X \rightarrow X'$ uma função contínua. Se Y for um subespaço de X , mostre que a restrição de f a Y é uma função contínua.
118. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos. No produto cartesiano $X \times Y$ considere-se a família $\mathcal{R}$ de conjuntos que são reuniões de conjuntos da forma $U \times V$, onde $U \in \mathcal{T}$ e $V \in \mathcal{S}$. Prove que $\mathcal{R}$ é uma topologia em $X \times Y$. (A chamada **topologia produto** em $X \times Y$.)
119. Sejam X e Y espaços topológicos e considere-se em $X \times Y$ a topologia produto. Mostre que as projecções $p : X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, e $q : X \times Y \rightarrow Y$, $(x, y) \mapsto y$, são funções contínuas.

Definição. Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X . Uma família G_i , $i \in I$, de subconjuntos de X diz-se uma **cobertura aberta** de A se todos os G_i forem abertos e a sua reunião contiver A . Diz-se que A é **compacto** se dada qualquer cobertura aberta de A existir um número finito de conjuntos da cobertura cuja reunião contém A .

120. Mostre usando a definição que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, com a topologia usual, não são compactos: (a) $\mathbb{N}$ (b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (c) $]0, 1[$ (d) $[1, +\infty[$
121. Prove usando a definição que qualquer intervalo fechado $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, com a topologia usual, é compacto.
122. Sendo $[a, b]$ um intervalo real e $n \in \mathbb{N}$, prove que o “ n -cubo” $[a, b]^n$ é compacto, com a topologia usual em $\mathbb{R}^n$.
123. Mostre que um conjunto finito num espaço topológico é necessariamente compacto.
124. Mostre que, se A e B forem conjuntos compactos num espaço topológico, então a reunião $A \cup B$ é necessariamente um conjunto compacto. Generalize para um número finito de conjuntos compactos.
125. Mostre que, num espaço topológico X , um subconjunto fechado A de um conjunto compacto C é também compacto.
(Sugestão: se G_i , $i \in I$, for uma cobertura aberta de A , então $X \setminus A$ e os G_i , $i \in I$, constituem uma cobertura aberta de C .)
126. Mostre que, num espaço topológico, um conjunto compacto não é necessariamente fechado.
(Sugestão: pense num espaço com a topologia grosseira.)
127. Mostre que, num espaço métrico, um conjunto compacto A é necessariamente limitado.
(Sugestão: $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, 1)$.)
128. Mostre que, num espaço métrico M , um conjunto compacto A é necessariamente fechado.
(Sugestão: Supondo $A \neq \bar{A}$, seja $x \in \bar{A} \setminus A$. Mostre que $M \setminus \bar{B}(x, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, é uma cobertura aberta de A , pois $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}(x, \frac{1}{n}) = \{x\}$.)
129. Tomemos em $\mathbb{R}^n$ a métrica usual. Prove que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se e só se for fechado e limitado (Teorema de Heine-Borel).
(Sugestão: sendo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado, A está contido em algum n -cubo $[a, b]^n$.)
130. Mostre que um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}$ (com a métrica usual) possui um elemento máximo e um elemento mínimo.

131. Sejam X e X' espaços topológicos e seja $f: X \rightarrow X'$ uma função contínua. Prove que, se $A \subseteq X$ for compacto, então $f(A)$ é compacto.
132. Tomemos em $\mathbb{R}$ a métrica usual. Seja X um espaço topológico e seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que, se $A \subseteq X$ for compacto, f atinge em A um máximo e um mínimo.
133. (a) Dê um exemplo de um espaço métrico (M, d) , de um subconjunto A de M limitado e fechado e de uma função contínua $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (onde no conjunto de chegada $\mathbb{R}$ tomamos a métrica usual) tal que f não atinge em A um máximo nem um mínimo.
- (b) Conclua que um conjunto limitado e fechado num espaço métrico não é necessariamente compacto.

Exercícios facultativos:

Definição. Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M . Diz-se que um ponto $x \in M$ é **ponto de acumulação de** A se qualquer bola de centro x intersectar $A \setminus \{x\}$.

134. Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M . Prove que, se A for compacto, qualquer subconjunto infinito S de A tem pelo menos um ponto de acumulação em A . (Sugestão: suponhamos que S não tem nenhum ponto de acumulação em A . Então, para todo $x \in A$, existe r_x tal que $B(x, r_x) \cap (S \setminus \{x\}) = \emptyset$. As bolas $B(x, r_x)$ formam uma cobertura aberta de A .)
135. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M . Prove que, se A for compacto, qualquer sucessão de elementos de A tem uma subsucessão convergente com limite em A . (Sugestão: Seja (u_n) uma sucessão de elementos de A e seja S o conjunto dos seus termos. Se S for finito, a conclusão é imediata. Se S for infinito, aplicamos o exercício anterior.)

A propriedade de qualquer sucessão de elementos de A ter uma subsucessão convergente com limite em A costuma resumir-se dizendo que A é **sequencialmente compacto**.

Observação. A afirmação recíproca da anterior também é verdadeira, isto é, num espaço métrico um conjunto sequencialmente compacto é compacto.

136. Teorema de Tychonoff. Sejam X e Y espaços topológicos e considere-se em $X \times Y$ a topologia produto (v. ex. 118). Seja A um subconjunto compacto de X e seja B um subconjunto compacto de Y . Prove que, então, $A \times B$ é um subconjunto compacto de $X \times Y$.

Sendo $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de $A \times B$, justifique os seguintes passos:

- (a) Seja $x \in A$. Para cada $y \in B$ existe $W_{(x,y)} \in \mathcal{C}$ tal que $(x, y) \in W_{(x,y)}$.
- (b) Existem abertos $U_{(x,y)}$ em X e $V_{(x,y)}$ em Y tais que $(x, y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subseteq W_{(x,y)}$.
- (c) Existe uma cobertura finita $\{V_{(x,y)} : y \in B_x\}$ de B .
- (d) O conjunto $U_x = \bigcap_{y \in B_x} U_{(x,y)}$ é um aberto a que x pertence.
- (e) Existe uma cobertura finita $\{U_x : x \in A_0\}$ de A .
- (f) A família $\{W_{(x,y)} \in \mathcal{C} : x \in A_0, y \in B_x\}$ é uma cobertura finita de $A \times B$.

Definição. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **conexo** se for impossível escrevê-lo na forma $X = V \cup W$ com V e W abertos disjuntos não vazios. Um subconjunto $A \neq \emptyset$ de X é conexo se o for como espaço topológico. X diz-se **desconexo** se não for conexo.

137. Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto não vazio de X . Prove que A é desconexo se e só se existirem abertos V e W tais que $A \subseteq V \cup W$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \cap W \neq \emptyset$ e $A \cap V$ e $A \cap W$ são disjuntos. (Ao par V, W chama-se uma **desconexão** de A .)
138. Seja X um espaço topológico. Prove que X é conexo se e só se os únicos subconjuntos de X que são simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e X .
139. Prove que os conjuntos singulares são conexos.
140. Prove que, num espaço métrico, um conjunto finito com mais de um elemento é desconexo.
141. Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X . Prove que, se A for conexo e $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B também é conexo. Em particular, $\overline{A}$ é conexo. (Sugestão: ex. 115.)
142. Seja X um espaço topológico e sejam A e B subconjuntos não vazios de X . Prove que se A e B forem conexos e $A \cap B \neq \emptyset$, então $A \cup B$ é conexo.
143. Prove que, se X for um espaço topológico discreto, qualquer par de subconjuntos de X não vazios, disjuntos e cuja reunião é X é uma desconexão de X .
144. Sejam X e X' espaços topológicos e seja $f: X \rightarrow X'$ uma função contínua. Prove que, se $A \subseteq X$ for conexo, então $f(A)$ é conexo.

Definição. Sejam X e X' espaços topológicos. Seja $f: X \rightarrow X'$ uma função. Diz-se que f é um **homeomorfismo** se for bijectiva e tanto f como f^{-1} forem contínuas. Se existir um homeomorfismo entre X e X' dizemos que X é **homeomorfo** a X' .

145. Prove que a relação “ser homeomorfo a” é uma relação de equivalência na classe dos espaços topológicos.
146. Mostre que, com a topologia usual em $\mathbb{R}$:
- (a) Qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é homeomorfo a $[0, 1]$;
 - (b) Qualquer intervalo aberto $]a, b[$ é homeomorfo a $]0, 1[$;
 - (c) $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $]0, 1[$;
 - (d) Qualquer intervalo $]a, +\infty[$ é homeomorfo a $]0, 1[$;
 - (e) Qualquer intervalo $[a, +\infty[$ é homeomorfo a $[0, 1[$;
 - (f) $\mathbb{R}$ não é homeomorfo a $[0, 1]$.

Definição. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que A é um **intervalo** se tiver a propriedade de que, quaisquer que sejam $x, y \in A$, se $x < z < y$ então $z \in A$. Por outras palavras, se A contém dois números então contém todos os valores intermédios.

147. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual.

- (a) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Prove que, se A for conexo, então é um intervalo.
- (b) Prove que $\mathbb{R}$ é conexo.
- (c) Prove que, mais geralmente, qualquer intervalo é conexo.

148. (Teorema de Bolzano-Cauchy) Seja X um espaço topológico e seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde em $\mathbb{R}$ tomamos a topologia usual. Suponhamos que X é conexo. Prove que, se f toma dois valores quaisquer, então toma todos os valores intermédios.

149. Mostre que, com a topologia usual em $\mathbb{R}$, qualquer intervalo $[a, +\infty[$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}$. (Sugestão: Supondo que $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo, considere os subconjuntos $]a, +\infty[$ e $\mathbb{R} \setminus \{f(a)\}$.)

150. Seja X um espaço topológico e seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que, se X for conexo e $f(X) \subseteq \mathbb{Q}$, então f é constante.

Definição. Seja X um espaço topológico. Um **caminho** (ou **arco**) em X é uma função contínua $\varphi: [a, b] \rightarrow X$. (Diz-se que o caminho φ **une** os pontos $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$.)

Um subconjunto A de X diz-se **conexo por caminhos** se dados dois quaisquer pontos de A existir um caminho em A que os une.

151. Prove que um conjunto conexo por caminhos é conexo.

152. Prove que $\mathbb{R}^n$, com a topologia usual, é conexo.

153. Prove que as bolas em $\mathbb{R}^n$, com a topologia usual, são conjuntos conexos.

154. Prove que o subconjunto de $\mathbb{R}^2$, com a topologia usual,

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$$

é conexo mas não é conexo por caminhos.

155. Prove que se um subconjunto A de $\mathbb{R}^2$, com a topologia usual, for aberto e conexo, então é conexo por caminhos.

(Sugestão: Tome um elemento u qualquer em A e considere o conjunto

$$G = \{v \in A : \text{existe um caminho em } A \text{ que une } u \text{ a } v\}.$$

Prove que G e $A \setminus G$ são ambos abertos.) Generalize este resultado a $\mathbb{R}^n$.

Definição. Seja V um espaço vectorial real ou complexo. Uma **norma** em V é uma função $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$):

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Um espaço vectorial em que está definida uma norma diz-se um **espaço vectorial normado**.

156. Prove que qualquer espaço vectorial normado é um espaço métrico, com a distância definida por $d(x, y) = \|x - y\|$. (Diz-se que d **provém** da norma.)

157. (a) Mostre que, se uma métrica d num espaço vectorial V provier de uma norma, então tem-se, para todos os vectores x, y, z e números α ,

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad (\text{invariância por translação})$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \cdot d(x, y) \quad (\text{homogeneidade}).$$

(b) Reciprocamente, mostre que, se num espaço vectorial V existir uma métrica d satisfazendo as duas condições indicadas na alínea anterior, então d provém de uma norma em V .

(c) Mostre que a métrica discreta num espaço vectorial $\neq \{0\}$ nunca pode provir de uma norma.

Definição. Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vectorial normado. A **bola unitária aberta** de V é o conjunto $\{x \in V : \|x\| < 1\}$. A **bola unitária fechada** de V é o conjunto $\{x \in V : \|x\| \leq 1\}$. A **esfera unitária** de V é o conjunto $\{x \in V : \|x\| = 1\}$.

158. Mostre que, num espaço vectorial normado, se tem $B(x, r) = x + r \cdot B(0, 1)$ (explique a notação).

159. Prove que, num espaço vectorial normado, um conjunto é limitado se e só se existir uma bola centrada na origem que o contém.

160. Prove que as funções seguintes são normas em $\mathbb{R}^n$ (e em $\mathbb{C}^n$):

$$(a) \|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}; \quad (b) \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (c) \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Nota: A segunda e a terceira norma são casos particulares de “normas de Hölder”, definidas por $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, para $1 \leq p < \infty$.

Exercício: prove que, para todo o x , se tem $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Definição. Seja V um espaço vectorial real ou complexo. Sejam $u, v \in V$. O **segmento** que une u e v é o conjunto $\{(1-t)u + tv : t \in [0, 1]\}$. Um subconjunto A de V diz-se **convexo** se, quaisquer que sejam $u, v \in A$, o segmento que os une está totalmente contido em A .

161. Prove que, num espaço vectorial normado, qualquer bola é um conjunto convexo.
162. Mostre que $\left(x_1^{1/2} + x_2^{1/2}\right)^2$ (a função de Hölder com $p = \frac{1}{2}$) não é uma norma em $\mathbb{R}^2$.
163. Prove que, num espaço vectorial normado, qualquer conjunto convexo é conexo.
164. Prove que as aplicações seguintes são normas em $C[a, b]$:
- (a) $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$;
 - (b) $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$;
 - (c) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.
165. (a) Prove que $\|(u_n)\|_\infty = \sup\{|u_j| : j \in \mathbb{N}\}$ é uma norma no espaço vectorial ℓ_∞ das sucessões (reais ou complexas) limitadas.
- (b) Prove que $\|(u_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é uma norma no espaço vectorial ℓ_2 das sucessões (u_n) (reais ou complexas) tais que $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 < \infty$.
- (c) Prove que $\|(u_n)\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$ é uma norma no espaço vectorial ℓ_1 das sucessões (u_n) (reais ou complexas) tais que $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| < \infty$.
- Note que se tem $\ell_1 \subset \ell_2 \subset \ell_\infty$.
166. Sejam $(V', \|\cdot\|')$ e $(V'', \|\cdot\|'')$ espaços vectoriais normados. Mostre que $V' \times V''$ é um espaço vectorial normado para a norma definida por $\|(x', x'')\| = \max\{\|x'\|', \|x''\|''\}$.
167. Prove que, num espaço vectorial normado, as operações de adição e de multiplicação por um escalar são contínuas (para a norma definida no ex. anterior). (Sugestão: para provar o segundo facto use a igualdade $\alpha_n v_n - \alpha v = \alpha(v_n - v) + (\alpha_n - \alpha)v + (\alpha_n - \alpha)(v_n - v)$.)
168. Mostre que, num espaço vectorial normado, se tem, para todos os vectores x e y ,
- $$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||.$$
169. Prove que, num espaço vectorial normado, a função $x \mapsto \|x\|$ é contínua. (Sugestão: ex. 168.)

Definição. Sejam $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ duas normas num espaço vectorial V . Diz-se que $\|\cdot\|$ é **equivalente** a $\|\cdot\|'$ se existirem constantes positivas c e d tais que, para todo o $v \in V$, se tem $c\|v\| \leq \|v\|' \leq d\|v\|$.

170. Prove que a equivalência de normas satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.
171. Sejam $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ duas normas num espaço vectorial V e sejam B e B' bolas com centro na origem e o mesmo raio definidas à custa das duas normas, respectivamente. Mostre que $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ são equivalentes se e só se existirem constantes positivas c e d tais que $cB' \subseteq B \subseteq dB'$.
172. Prove que, se duas normas num espaço vectorial forem equivalentes, então:
- Um conjunto é aberto (resp. fechado, resp. limitado) relativamente a uma delas se e só se for aberto (resp. fechado, resp. limitado) relativamente à outra.
 - Uma sucessão é convergente (resp. de Cauchy) relativamente a uma delas se e só se for convergente (resp. de Cauchy) relativamente à outra.
 - O espaço é completo relativamente a uma delas se e só se o for relativamente à outra.
173. Mostre que, em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), todas as normas são equivalentes (e portanto todas as normas induzem a mesma topologia), justificando os seguintes passos:
- Basta mostrar que qualquer norma φ é equivalente à norma $\|\cdot\|_1$.
 - Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se $\varphi(x) \leq K\|x\|_1$, onde $K = \max\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$.
 - A função em $\mathbb{R}^n$ definida por $x \mapsto \varphi(x)$ é contínua tomando a norma $\|\cdot\|_1$ em $\mathbb{R}^n$.
 - O conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ é compacto tomando a norma $\|\cdot\|_1$ em $\mathbb{R}^n$.
 - Sendo c e d o mínimo e o máximo de φ em S , tem-se $c\|v\|_1 \leq \varphi(v) \leq d\|v\|_1$ para todo o $v \in \mathbb{R}^n$. (Porque é que $c > 0$?)
174. Seja V um espaço vectorial real com dimensão n e seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V .
- Seja φ uma norma em V . Prove que, sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$, a função $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \varphi(x_1v_1 + \dots + x_nv_n)$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.
 - Prove que todas as normas em V são equivalentes.
 - Sendo $T: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ o isomorfismo linear habitual, $T(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = (x_1, \dots, x_n)$, mostre que, para $v = \sum x_j v_j$ e $w = \sum y_j v_j$, se tem

$$g(T(v) - T(w)) = g(x - y) = \varphi(v - w) \quad \text{e} \quad \varphi(T^{-1}(x) - T^{-1}(y)) = \varphi(v - w) = g(x - y).$$
 - Conclua que T e T^{-1} são funções contínuas e portanto V e $\mathbb{R}^n$ são homeomorfos.
175. Dê exemplo de duas normas não equivalentes num espaço vectorial de dimensão infinita.
- (Sugestão: Mostre que não existe nenhuma constante d tal que, qualquer que seja $x \in \ell_1$, se tem $\|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty$.
- Outro exemplo, desta vez em $C[0, 1]$. Mostre que não existe nenhuma constante d tal que, qualquer que seja $f \in C[0, 1]$, se tem $\|f\|_\infty \leq d\|f\|_1$.

176. (a) Prove que os subespaços de $\mathbb{R}^n$ são fechados.
 (b) Mais geralmente, prove que todos os subespaços de dimensão finita de um espaço vectorial normado são fechados. (Sugestão: ex. 60.)
177. Seja V o subespaço de ℓ_∞ formado pelas sucessões que só têm um número finito de termos não nulos. Mostre que V não é fechado.
178. Prove que, se F for um subespaço vectorial de um espaço vectorial normado, $\overline{F}$ também é.

Definição. Uma série $\sum u_n$ num espaço vectorial normado V diz-se **convergente** se a sucessão das suas somas parciais tiver limite em V . A série diz-se **absolutamente convergente** se a série de termos reais não-negativos $\sum \|u_n\|$ for convergente.

179. Seja V o espaço vectorial normado referido no ex. 177. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja v_n a sucessão em V cujos termos são todos nulos excepto o n -ésimo que é igual a $\frac{1}{n^2}$. Mostre que a série $\sum v_n$ é absolutamente convergente mas não é convergente.

Definição. Um **espaço de Banach** é um espaço vectorial normado completo.

180. Mostre que todo o espaço vectorial normado de dimensão finita é um espaço de Banach.
181. Prove que, num espaço de Banach, se uma série for absolutamente convergente é convergente.
182. Dê um exemplo de um espaço vectorial normado que não é um espaço de Banach.
183. Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M . Mostre que, se A for compacto, então, qualquer que seja $\epsilon > 0$, é possível cobrir A com um número finito de bolas de raio ϵ .
184. (Teorema de Riesz) Seja V um espaço vectorial normado. Prove que V tem dimensão finita se e só se a bola unitária fechada $C = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$ for compacta.

A implicação $(\Rightarrow)$ já é conhecida. Para a recíproca, justifique os seguintes passos:

- (a) Seja $B(v_i, \frac{1}{2})$, $i = 1, \dots, n$ uma cobertura finita de C (ex. 183). Seja $F = \text{ger}\{v_1, \dots, v_n\}$.
- (b) Vamos ver que $V = F$. Suponhamos que não. Seja $x \in V \setminus F$. Então $d(x, F) > 0$ (pelos exercícios 39 e 176).
- (c) Ponhamos $d(x, F) = \alpha$. Existe $v \in F$ tal que $\alpha \leq \|x - v\| \leq \frac{3}{2}\alpha$.
- (d) Ponhamos $z = \frac{x-v}{\|x-v\|}$. Então $\|z\| = 1$, logo $z \in C$ e existe i tal que $\|z - v_i\| < \frac{1}{2}$.
- (e) Tem-se $x = v + \|x - v\|z = v + \|x - v\|v_i + \|x - v\|(z - v_i)$.
- (f) $v + \|x - v\|v_i$ pertence a F e portanto $\|x - v - \|x - v\|v_i\| \geq \alpha$.
- (g) Então $\|x - v\| \|z - v_i\| \geq \alpha$. Mas $\|x - v\| \|z - v_i\| < \frac{1}{2}\|x - v\| \leq \frac{1}{2} \frac{3}{2}\alpha = \frac{3}{4}\alpha$, contradição.

Definição. Seja V um espaço vectorial real. Um **produto interno** em V é uma operação que a cada par de vectores x, y de V faz corresponder um número real, denotado por $\langle x, y \rangle$ (isto é, uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$), de forma que, para quaisquer $x, x', y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \neq 0 &\Rightarrow \langle x, x \rangle > 0; \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle; \\ \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle; \\ \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Se V for um espaço vectorial complexo, a 2.^a condição deve ser substituída por $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$. Um espaço em que está definido um produto interno diz-se um **espaço com produto interno** ou um **espaço euclidiano**.

Num espaço vectorial com produto interno,

$$\text{a } \mathbf{norma} \text{ ou } \mathbf{comprimento} \text{ de } x \text{ é } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle};$$

x e y são **ortogonais** (ou perpendiculares) se $\langle x, y \rangle = 0$.

185. Prove que qualquer espaço com produto interno é um espaço vectorial normado, com a norma definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. (Sugestão: Recorde factos estudados em Álgebra Linear.)

186. Mostre que $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$. (Em $\mathbb{C}^n$ toma-se $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$.)

187. Mostre que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ é um produto interno no espaço real $C[a, b]$.

188. Mostre que $\langle (u_n), (v_n) \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} u_j v_j$ é um produto interno no espaço real ℓ_2 .

189. Sejam x, y vectores arbitrários num espaço vectorial com produto interno. Mostre que se tem

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{"lei do paralelogramo"})$$

190. Usando o ex.189, mostre que as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_{\infty}$ em $\mathbb{R}^n$ não provêm de um produto interno.

191. Verifique se as normas $\|\cdot\|_{\infty}$ e $\|\cdot\|_1$ no espaço real $C[0, 1]$ provêm de um produto interno.

192. Verifique se as normas no espaço real ℓ_{∞} e no espaço real ℓ_1 provêm de um produto interno.

193. Sejam x, y vectores arbitrários num espaço vectorial com produto interno. Mostre que se tem

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (\text{"identidade de polarização"})$$

194. Mostre que uma norma que satisfaz a lei do paralelogramo provém de um produto interno. (Sugestão: Tome $\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.)

Parte da solução está em <http://www.mat.uc.pt/~jfqqueiro/194.pdf>

195. Considere $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Seja F o subespaço $\mathbb{R} \times \{0\}$ e seja $x = (2, 1)$. Mostre que há uma infinidade de elementos de F que estão à distância mínima de x .
196. (Teorema da melhor aproximação) Seja V um espaço com produto interno e seja F um subconjunto convexo de V . Seja $x \in V$, $x \notin F$. Prove que, se F for completo, existe um e um só elemento de F que está à distância mínima de x .

Justifique os seguintes passos:

- (a) Seja $\alpha = d(x, F)$. Então $\alpha > 0$ (exs. 60 e 39).
- (b) Por definição de α , existe uma sucessão (y_n) de elementos de F tal que $\|x - y_n\| \rightarrow \alpha$.
- (c) Vamos ver que (y_m) é uma sucessão de Cauchy. Para $\epsilon > 0$ qualquer, sejam m, n tais que $\|x - y_m\|^2 < \alpha^2 + \epsilon$ e $\|x - y_n\|^2 < \alpha^2 + \epsilon$.
- (d) $\|y_m - y_n\|^2 = \|y_m - x + x - y_n\|^2 = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|2x - y_m - y_n\|^2$ (ex. 189).
- (e) Logo, $\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2$.
- (f) Como F é convexo, $\frac{y_m + y_n}{2} \in F$ e portanto $\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 \geq \alpha^2$.
- (g) Logo, $\|y_m - y_n\|^2 < 4\epsilon$ e (y_m) é uma sucessão de Cauchy.
- (h) Então, como F é completo, existe $x_1 \in F$ tal que $y_n \rightarrow x_1$ e $\|x - x_1\| = \alpha$.
- (i) Para provar a unicidade, suponhamos que também $\|x - x'_1\| = \alpha$ com $x'_1 \in F$.
- (j) Tem-se $\|x_1 - x'_1\|^2 = 2\|x - x_1\|^2 + 2\|x - x'_1\|^2 - 4\|x - \frac{x_1 + x'_1}{2}\|^2$.
- (k) Logo, $\|x_1 - x'_1\|^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4\|x - \frac{x_1 + x'_1}{2}\|^2 \leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0$ e portanto $x_1 = x'_1$.

Definição. Um espaço com produto interno diz-se um **espaço de Hilbert** se for completo.

197. Prove que, se V for um espaço de Hilbert e F for um subespaço fechado de V , então, qualquer que seja $x \in V$, $x \notin F$, existe um e um só elemento de F que está à distância mínima de x .
198. Seja V um espaço de Hilbert e seja F um subespaço fechado de V . Seja $x \in V$, $x \notin F$. Designemos por x_1 o elemento de F que está à distância mínima de x . Prove que $x - x_1$ é ortogonal a todos os elementos de F . (A x_1 chama-se **projectção ortogonal** de x sobre F .)

Justifique os seguintes passos:

- (a) Seja $\alpha = d(x, F) > 0$ e seja $x_2 = x - x_1$.
- (b) Tem-se $\|x_2\| = \alpha$. Suponhamos que existe $z \in F$ tal que $\langle x_2, z \rangle \neq 0$.
- (c) Seja γ um número qualquer. Tem-se $\|x_2 - \gamma z\|^2 = \|x_2\|^2 - 2\gamma\langle x_2, z \rangle + \gamma^2\|z\|^2$.
- (d) Escolha-se $\gamma = \frac{\langle x_2, z \rangle}{\|z\|^2}$. Então $\|x_2 - \gamma z\|^2 = \|x_2\|^2 - \frac{\langle x_2, z \rangle^2}{\|z\|^2} < \alpha^2$.
- (e) Mas isto não pode ser, porque $x_2 - \gamma z = x - (x_1 + \gamma z)$ e $x_1 + \gamma z \in F$.

Nota: Tem-se portanto $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in F$ e x_2 ortogonal a todos os elementos de F . Designando por $F^\perp$ o subespaço de V constituído pelos vectores ortogonais a todos os elementos de F (a que se chama o **complemento ortogonal** de F), isto significa que $V = F + F^\perp$. Como obviamente $F \cap F^\perp = \{0\}$, tem-se $V = F \oplus F^\perp$.

199. (a) Seja V um espaço de Hilbert. Seja $z \in V$ fixo. Seja $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \langle x, z \rangle$. Prove que φ é uma transformação linear contínua.
- (b) Reciprocamente, sendo $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear contínua, prove que existe $z \in V$ tal que, para todo o $x \in V$, se tem $\varphi(x) = \langle x, z \rangle$ (teorema da representação de Riesz).

Ver <http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/199.pdf>

Definição. Sejam V e W espaços vectoriais normados sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Seja $T: V \rightarrow W$ um operador linear. T diz-se **limitado** se transformar subconjuntos limitados de V em subconjuntos limitados de W .

200. Sejam V e W espaços vectoriais normados e seja $T: V \rightarrow W$ um operador linear. Prove que T é limitado se e só se existir uma constante real c tal que

$$\forall x \in V \quad \|T(x)\| \leq c \|x\| \quad (\text{Sugestão: ex. 159.})$$

201. Sejam V e W espaços vectoriais normados e seja $T: V \rightarrow W$ um operador linear. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

- (a) T é contínuo em V . (b) T é limitado.

202. Sejam V e W espaços vectoriais normados e seja $T: V \rightarrow W$ um operador linear. Prove que, se T for contínuo num ponto x_0 de V , então é contínuo em qualquer outro ponto x_1 de V , isto é, é contínuo em todo o V . (Sugestão: $x - x_1 = x + x_0 - x_1 - x_0$.)

Definição. Sejam V e W espaços vectoriais normados sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$. Seja $T: V \rightarrow W$ um operador linear limitado. A **norma** de T é o número real

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

203. Sendo V e W espaços vectoriais normados e $T: V \rightarrow W$ um operador linear limitado, prove que:

- (a) $\forall x \in V \quad \|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$. (b) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

204. Sejam V e W e.v.n. Prove que o conjunto dos operadores lineares limitados de V para W é um espaço vectorial e que a norma de operadores definida satisfaz os axiomas de definição de norma.

205. Sejam U , V e W espaços vectoriais normados. Sejam $S: U \rightarrow V$ e $T: V \rightarrow W$ operadores lineares limitados. Prove que $T \circ S$ também é limitado e tem-se $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$.

206. Seja $A = [a_{jk}]$ uma matriz real $m \times n$ e seja $x = [x_1 \dots x_n]^T$ arbitrário. Prove que

$$\|Ax\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty} \cdot \left(\max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right)$$

e portanto o operador linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definido por $T(x) = Ax$ é limitado.

Conclua que todos os operadores lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ — ou, mais geralmente, entre dois quaisquer espaços de dimensão finita — são limitados, e portanto contínuos.

207. Seja $T: \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}$ o operador linear definido por $T(u_1, u_2, u_3, \dots) = (0, u_1, u_2, u_3, \dots)$ (o “operador-deslocamento”). Prove que T é limitado e que $\|T\| = 1$.

208. Seja V o espaço vectorial das funções polinomiais em $[0, 1]$ com a norma $\|p\| = \max_{t \in [0, 1]} |p(t)|$. Seja $T: V \rightarrow V$ o operador diferenciação. Prove que T não é limitado.

Definição. Seja V um espaço vectorial. Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que um número λ é um **valor próprio** de T se existir $v \in V$, $v \neq 0$, such that $T(v) = \lambda v$. A v chamamos um **vector próprio** de T associado ao valor próprio λ .

209. Seja $V = C^\infty[a, b]$ o espaço vectorial real das funções reais infinitamente diferenciáveis em $[a, b]$ (trata-se de um subespaço de $C[a, b]$). Seja $T: V \rightarrow V$ o operador diferenciação. Mostre que todos os números reais são valores próprios deste operador.

(Sugestão: Qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $T(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$.)

210. Sejam a e b números reais, com $a < b$. Seja $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ o operador linear definido por $T(f)(t) = tf(t)$, para quaisquer $f \in C[a, b]$, $t \in [a, b]$. Mostre que T não tem nenhum valor próprio.

Definição. Seja V um espaço vectorial. Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear e I o operador identidade em V . Chamamos **espectro** de T ao conjunto

$$\sigma(T) = \{\lambda: T - \lambda I \text{ não é invertível}\}.$$

O **espectro pontual** de T é o conjunto $\sigma_P(T)$ dos valores próprios de T , ou seja

$$\sigma_P(T) = \{\lambda: \text{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

211. Seja V um espaço vectorial e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Mostre que o espectro pontual de T está contido no espectro de T .

212. Seja $T: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ o operador-deslocamento definido no ex. 207. Mostre que:

- (a) $\text{Ker}(T) = \{0\}$.
- (b) $0 \notin \sigma_P(T)$.
- (c) $\text{Im}(T) \neq \ell_\infty$.
- (d) T não é invertível.
- (e) $0 \in \sigma(T)$.

Definição. Sejam V e W espaços vectoriais normados sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Seja A um subconjunto aberto de V . Seja $f: A \rightarrow W$ uma função. Seja $x_0 \in A$. A função f diz-se **diferenciável em** x_0 se existir uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

com a definição óbvia de limite.

Se existir a transformação linear T , ela é única e chamamos-lhe **derivada** de f em x_0 .

Se V e W tiverem dimensão finita e se usarmos coordenadas, T dá lugar à chamada matriz jacobiana de f em x_0 .

Se V e W forem espaços reais com dimensão 1 (isto é, se forem essencialmente $\mathbb{R}$), estamos na Análise do 1.º ano (ou do Secundário) e T é simplesmente a multiplicação pelo número $f'(x_0)$.