



## Canguru sem fronteiras 2007

Categoria: Estudante

Duração: 1h15mn

Destinatários: alunos do 12º ano de Escolaridade

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

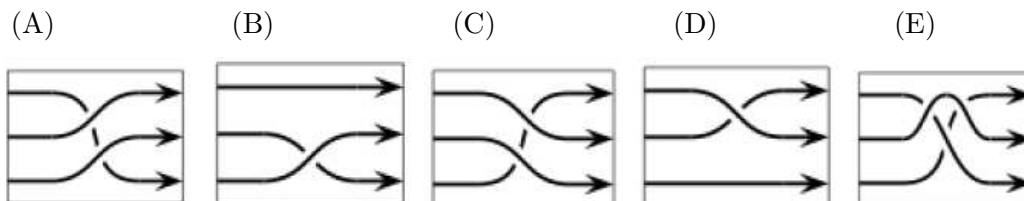
**Não podes usar calculadora.** Há apenas uma resposta correcta em cada questão. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

### Problemas de 3 pontos

1. O Miguel está a construir uma pista de corridas.



Passado algum tempo, ele reparou que a ordem dos carros na partida não é a mesma que a dos carros na chegada. Que peça deverá o Miguel colocar, em vez da peça X, para obter a ordem correcta na chegada?



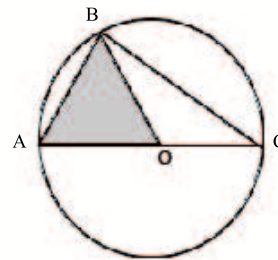
2. O Afonso, o Beto e o Carlos têm em conjunto 30 bolas. Se o Beto der 5 bolas ao Carlos, o Carlos der 4 bolas ao Afonso e o Afonso der 2 bolas ao Beto, eles ficam com o mesmo número de bolas. Quantas bolas tinha o Afonso no início?

(A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 12 (E) 13

3. O valor de  $\frac{\sin 1^\circ}{\cos 89^\circ}$  é igual a

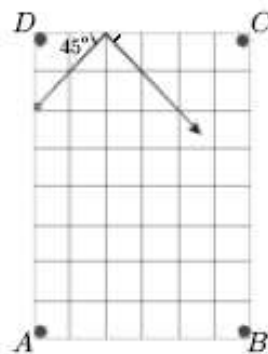
(A) 0 (B)  $\operatorname{tg} 1^\circ$  (C)  $\operatorname{cotg} 1^\circ$  (D)  $\frac{1}{89}$  (E) 1

4. A área da região a sombreado é  $\sqrt{3}$ . Qual é a área do triângulo  $[ABC]$ ?



- (A)  $2\sqrt{3}$       (B) 2      (C) 5      (D) 4      (E)  $4\sqrt{3}$

5. Uma bola de bilhar bate na extremidade da mesa de bilhar (mesa com 4 buracos) fazendo um ângulo com amplitude igual a  $45^\circ$ , como é indicado na figura. Sabendo que a bola irá entrar num buraco, em que buraco é que ela entra?



- (A) Buraco A      (B) Buraco B      (C) Buraco C      (D) Buraco D

6. Alguns historiadores afirmam que no antigo Egipto se usava uma corda com dois nós para se construir um ângulo recto. Se o comprimento da corda, já com os dois nós, for  $12\text{ m}$  e um dos nós estiver na posição  $X$  a  $3\text{ m}$  de uma extremidade, a que distância da outra extremidade se deverá colocar o segundo nó para se obter um ângulo recto em  $X$ ?



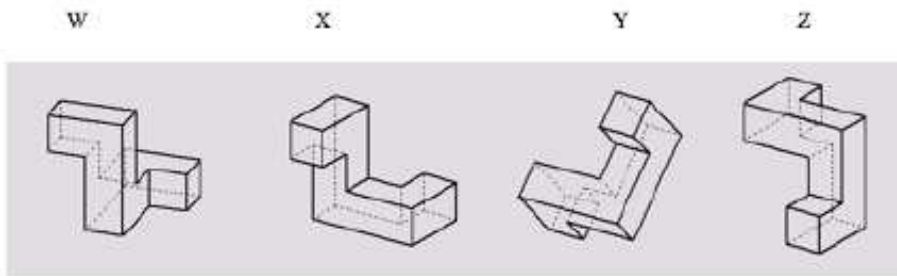
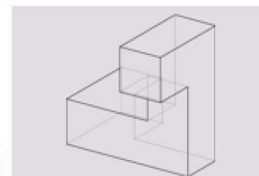
- (A) 3      (B) 4      (C) 5      (D) 6      (E) Outra resposta.

7. No exame de acesso à Universidade, um estudante tem de responder correctamente a pelo menos  $80\%$  das questões. O Pedro trabalhou em 15 questões até ao momento. Ele não sabe a resposta a 5 delas, mas tem a certeza que as outras 10 estão correctas. Se ele responder correctamente às restantes questões do exame, ele passará no teste exactamente com  $80\%$ . Quantas questões tem o exame?

- (A) 20      (B) 25      (C) 30      (D) 35      (E) 40

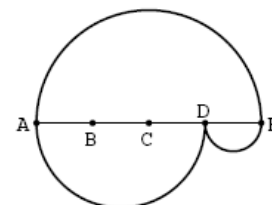
© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados. Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático ®

8. Quais dos seguintes objectos é que podem ser obtidos pela rotação no espaço do objecto representado ao lado?



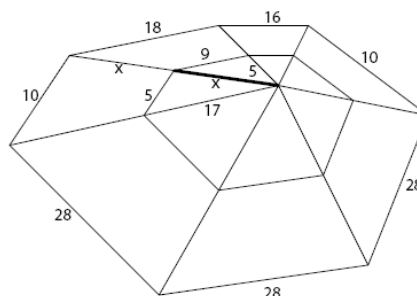
- (A) W e Y      (B) X e Z      (C) Apenas Y      (D) W, X e Y      (E) Nenhum destes objectos.

9. O segmento de recta  $[AE]$  está dividido em quatro partes iguais nos pontos indicados na figura. São desenhadas semi-circunferências com diâmetros  $\overline{AE}$ ,  $\overline{AD}$  e  $\overline{DE}$ , criando caminhos de A a E como mostra a figura. Determina a razão entre os comprimentos do caminho superior e do caminho inferior.



- (A) 1 : 2      (B) 2 : 3      (C) 2 : 1      (D) 3 : 2      (E) 1 : 1

10. Uma aranha talentosa em Matemática teceu a teia representada na figura ao lado. Alguns dos comprimentos das cordas da teia estão marcados. Se o comprimento  $x$  for um número inteiro, determina o valor de  $x$ .



- (A) 11      (B) 13      (C) 15      (D) 17      (E) 19

### Problemas de 4 pontos

11. Dado um quadrado  $[ABCD]$  com medida de lado igual a 1, considera todos os quadrados que partilhem pelo menos dois vértices com  $[ABCD]$ . Então a área da região descrita pelos pontos que pertencem a pelo menos um desses quadrados é:

- (A) 5      (B) 6      (C) 7      (D) 8      (E) 9

12. A amplitude do ângulo  $\beta$  é menor que a amplitude do ângulo  $\gamma$  em 25% e é maior que a amplitude do ângulo  $\alpha$  em 50%. Então, a amplitude do ângulo  $\gamma$  é

- (A) maior do que a amplitude do ângulo  $\alpha$  em 25%;
- (B) maior do que a amplitude do ângulo  $\alpha$  em 50%;
- (C) maior do que a amplitude do ângulo  $\alpha$  em 75%;
- (D) maior do que a amplitude do ângulo  $\alpha$  em 100%;
- (E) maior do que a amplitude do ângulo  $\alpha$  em 125%.

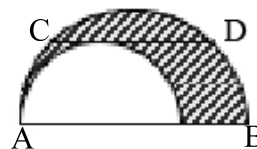
13. Considera a igualdade  $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$ , com  $x$  e  $y$  números inteiros. Então,  $x$  é igual a

- (A) 0
- (B) 3
- (C) -1
- (D) 1
- (E) 2

14. Qual é o valor de  $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ$ ?

- (A) 1
- (B)  $\pi$
- (C) 0
- (D) 10
- (E) -1

15. Considera as duas semi-circunferências da figura ao lado. O segmento  $[CD]$ , de comprimento 4, é paralelo ao segmento  $[AB]$ , de comprimento igual ao diâmetro da maior semi-circunferência, e é tangente à menor semi-circunferência. Então, a área da região a sombreado é igual a:



- (A)  $\pi$
- (B)  $1.5\pi$
- (C)  $2\pi$
- (D)  $3\pi$
- (E) Dados insuficientes.

16. A soma de cinco números inteiros consecutivos é igual à soma dos três números inteiros consecutivos seguintes. Então, o maior destes oito números é:

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 9
- (D) 11
- (E) outro valor.

17. O Tomás nasceu no dia em que a sua mãe fez 20 anos, portanto partilham o dia de aniversário. Quantas vezes é que a idade do Tomás será um divisor da idade da sua mãe, se ambos tiverem uma grande longevidade?

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7
- (E) 8

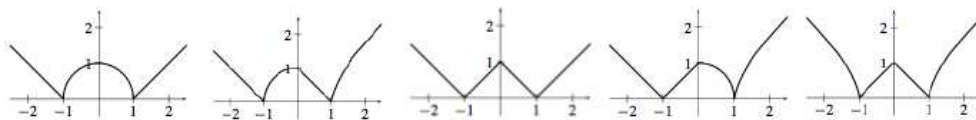
18. Uma ilha é habitada por pessoas honestas e pessoas mentirosas. As pessoas honestas dizem sempre a verdade e as mentirosas mentem sempre. Um certo dia, o habitante  $A$ , quando questionado sobre ele e outro habitante  $B$ , afirmou que pelo menos um dos habitantes  $A$  ou  $B$  é mentiroso. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A)  $A$  não pode afirmar a frase acima;
- (B) Ambos são mentirosos;
- (C) Ambos são honestos;
- (D)  $A$  é mentiroso e  $B$  é honesto;
- (E)  $B$  é mentiroso e  $A$  é honesto.

19. Considera uma esfera de raio 3 centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Quantos pontos da superfície dessa esfera têm coordenadas inteiras?

- (A) 30                      (B) 24                      (C) 12                      (D) 6                      (E) 3

20. A representação gráfica da função definida pela expressão analítica  $\sqrt{|(1+x)(1-|x|)|}$  é:



- (A)                      (B)                      (C)                      (D)                      (E)

**Problemas de 5 pontos**

21. Qual dos seguintes números não pode ser representado por  $x + \sqrt{x}$ , se  $x$  for um número natural?

- (A) 870                      (B) 110                      (C) 90                      (D) 60                      (E) 30

22. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções tais que  $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$  e  $f(g(x)) = x$ , então a expressão analítica da função  $g$  é dada por

- (A)  $g(x) = \frac{3x+4}{2x}$     (B)  $g(x) = \frac{3x}{2x+4}$     (C)  $g(x) = \frac{2x+4}{4x}$     (D)  $g(x) = \frac{4x}{2-3x}$     (E) Outra resposta.

23. A Anita, a Isabel e o António estão a lançar dados. A Anita vence se ao lançar o dado sair 1, 2 ou 3; a Isabel vence se ao lançar o dado sair 4 ou 5; o António vence se ao lançar o dado sair 6. O dado roda da Anita para a Isabel, depois para o António e assim sucessivamente até que um jogador vença. Determina a probabilidade do António vencer.

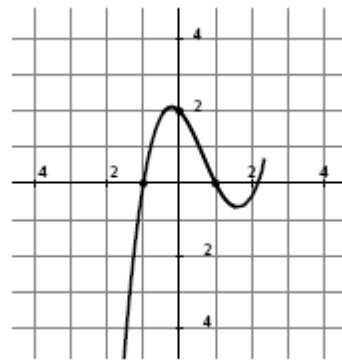
- (A)  $\frac{1}{6}$                       (B)  $\frac{1}{8}$                       (C)  $\frac{1}{11}$                       (D)  $\frac{1}{13}$                       (E) O António nunca vencerá.

24. Qual é a amplitude dos ângulos agudos de um losango, se o comprimento de cada um dos seus lados for igual à média geométrica dos comprimentos das suas diagonais? (**Nota:** Dados os números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a sua média geométrica é dada por  $(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)^{1/n}$ .)

- (A)  $15^\circ$                       (B)  $30^\circ$                       (C)  $45^\circ$                       (D)  $60^\circ$                       (E)  $75^\circ$

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados. Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático ®

25. Na figura ao lado está parte da representação gráfica da função definida pela expressão analítica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Qual é o valor de  $b$ ?



- (A) -4            (B) -2            (C) 0            (D) 2

26. Determina o número de possíveis números reais  $a$  de modo a que a equação quadrática  $x^2 + ax + 2007 = 0$  tenha duas raízes inteiras.

- (A) 3            (B) 4            (C) 6            (D) 8            (E) Outra resposta.

27. A soma

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$$

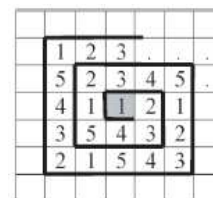
é igual a:

- (A)  $\frac{999}{1000}$             (B)  $\frac{99}{100}$             (C)  $\frac{9}{10}$             (D) 9            (E) 1

28. Na festa da Páscoa, cinco amigos vão trocar prendas de maneira a que cada um deles dê uma prenda e receba uma prenda (claro que ninguém deverá receber o seu próprio presente). De quantas formas é possível fazer esta troca de prendas?

- (A) 5            (B) 10            (C) 44            (D) 50            (E) 120

29. Os algarismos da sucessão 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, ... preenchem em forma de espiral os quadradinhos de uma folha de papel quadriculado com início no quadradinho sombreado (ver figura). Que algarismo ocupa o quadradinho 100 lugares acima do quadradinho sombreado?



- (A) 1            (B) 2            (C) 3            (D) 4            (E) 5

30. A sucessão monótona crescente 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... é construída a partir de todas as potências de 3 e de todos os números que podem ser escritos como soma de diferentes potências de 3. Qual será o centésimo elemento da sucessão?

- (A) 150            (B) 981            (C) 1234            (D) 2410            (E)  $3^{100}$