



Canguru Matemático sem Fronteiras 2015

<http://www.mat.uc.pt/canguru/>

Categoria: Estudante
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Duração: 1h 30min

Nome: _____ Turma: _____

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. A Andreia nasceu em 1997 e a sua irmã Carlota nasceu em 2001. Relativamente à diferença das suas idades, podemos dizer com toda a certeza que:

- (A) é inferior a 4 anos (B) é pelo menos de 4 anos
(C) é exatamente de 4 anos (D) é superior a 4 anos
(E) não é inferior a 3 anos

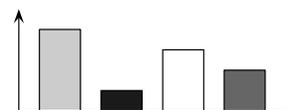
2. Sejam a e b dois números reais. Então $(a - b)^5 + (b - a)^5$ é igual a:

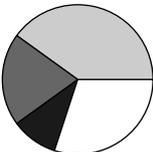
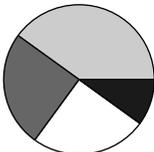
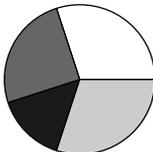
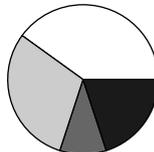
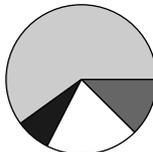
- (A) 0 (B) $2(a - b)^5$
(C) $2a^5 - 2b^5$ (D) $2a^5 + 2b^5$
(E) $2a^5 + 10a^4b + 20a^3b^2 + 20a^2b^3 + 10ab^4 + 2b^5$

3. Quantas soluções tem a equação $2^{2x} = 4^{x+1}$?

- (A) 0 (B) Infinitas (C) 2 (D) 1 (E) 3

4. A Constança desenhou um gráfico de barras representando o número de árvores de quatro espécies encontradas durante uma visita ao jardim botânico. O Gonçalo acha que uma representação gráfica circular, em percentagem, representará melhor as quantidades das quatro espécies. Qual será o aspeto da representação gráfica circular?

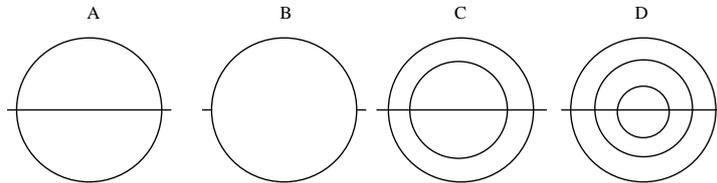


- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Se adicionarmos os 31 números inteiros de 2001 a 2031 e dividirmos a soma por 31, que número obtemos?

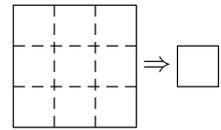
- (A) 2012 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2496

6. Quantas das seguintes figuras podem ser desenhadas com um traço contínuo sem se desenharem um segmento duas vezes?



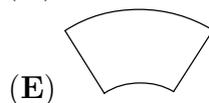
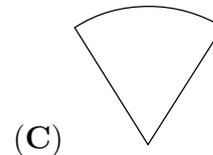
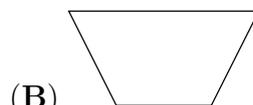
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7. O Henrique dobrou uma folha de papel quadrada várias vezes ao longo das linhas a tracejado indicadas na figura, em qualquer direção ou ordem, de modo a obter um quadrado. Depois cortou um canto desse quadrado e desdobrou a folha de papel. Quantos buracos existem na folha de papel?

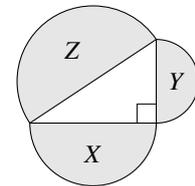


- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

8. Um copo tem a forma de um cone truncado (ver a figura à direita). O Dinis quer revestir a parte exterior do copo, excluindo a base, com papel. Qual das seguintes formas deverá ter o papel de modo a revestir completamente o copo sem sobreposições?



9. Os diâmetros de três semicírculos são os lados de um triângulo retângulo (ver a figura). As áreas dos semicírculos são $X \text{ cm}^2$, $Y \text{ cm}^2$ e $Z \text{ cm}^2$, como indicado na figura. Qual das seguintes proposições é verdadeira?



(A) $X + Y < Z$

(B) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$

(C) $X + Y = Z$

(D) $X^2 + Y^2 = Z^2$

(E) $X^2 + Y^2 = Z$

10. Qual das seguintes é a lista completa do número de ângulos agudos que um quadrilátero convexo pode ter?

- (A) 0, 1, 2 (B) 0, 1, 2, 3 (C) 0, 1, 2, 3, 4 (D) 0, 1, 3 (E) 1, 2, 3

Problemas de 4 pontos

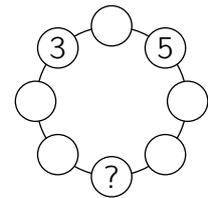
11. O valor de $\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \times 2015) + (2015 \div 2015)}$ é:

- (A) $\sqrt{2015}$ (B) 2015 (C) 2016 (D) 2017 (E) 4030

12. Num referencial cartesiano ortonormado xOy , o eixo dos xx e os gráficos das funções f e g , definidas por $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$, dividem o plano cartesiano em:

- (A) 7 regiões (B) 8 regiões (C) 9 regiões (D) 10 regiões (E) 11 regiões

13. A Rita quer escrever um número em cada círculo da figura de modo a que cada número seja a soma dos dois números dos círculos adjacentes. Dois círculos já estão preenchidos com os números indicados. Que número deverá a Rita escrever no círculo com o ponto de interrogação?



- (A) -5 (B) -16 (C) -8
(D) -3 (E) É impossível

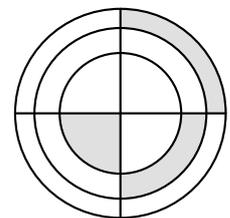
14. Dados cinco números naturais diferentes a, b, c, d, e , sabemos que $c \div e = b$, $a + b = d$ e $e - d = a$. Qual dos números a, b, c, d ou e é o maior?

- (A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

15. A média geométrica de n números positivos é definida como a raiz de índice n do produto desses n números. Se a média geométrica de 3 números for 3 e a média geométrica de outros 3 números for 12, qual é a média geométrica dos 6 números?

- (A) 4 (B) 6 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{15}{6}$ (E) 36

16. Na figura podemos ver 3 círculos concêntricos e dois diâmetros perpendiculares. Se as três regiões a sombreado tiverem a mesma área e o raio do círculo menor for um, qual é o produto dos raios dos três círculos?



- (A) $\sqrt{6}$ (B) 3 (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(D) $2\sqrt{2}$ (E) 6

17. Um vendedor de automóveis comprou dois carros. Ele vendeu o primeiro carro com um lucro de 40% e o segundo com um lucro de 60%. O lucro que teve com os dois carros foi de 54%. A razão entre o preço que o vendedor pagou pelo primeiro carro e o preço que pagou pelo segundo é:

- (A) $10 \div 13$ (B) $20 \div 27$ (C) $3 \div 7$ (D) $7 \div 12$ (E) $2 \div 3$

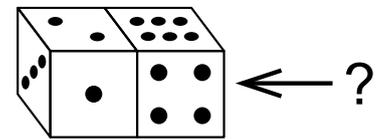
18. O Gonçalo tem um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. A Constança tem outro dado, cúbico e equilibrado, mas especial: três das seis faces têm o número 2 e as outras três faces têm o número 5. Cada um lança o seu dado e vence o que tiver maior número na face superior. Se os dois números forem iguais há um empate. Qual é a probabilidade de a Constança vencer?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{7}{18}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{11}{18}$

19. Dentro de uma caixa existem 2015 berlindes, numerados de 1 a 2015. O Martim decidiu pintar da mesma cor os berlindes em que a soma dos algarismos do seu número é igual. Os berlindes cuja soma dos algarismos do seu número seja diferente terão cores diferentes. De quantas cores diferentes vai precisar o Martim?

- (A) 10 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 2015

20. Num dado normal, a soma das pintas em faces opostas é 7. O Ivo tem dois dados normais idênticos, representados na figura. Quantas pintas poderão estar na face (não visível) à direita, assinalada na figura pelo ponto de interrogação?



- (A) Apenas 5 (B) Apenas 2 (C) 2 ou 5
(D) 1, 2, 3 ou 5 (E) 2, 3 ou 5

Problemas de 5 pontos

21. Na tabela ao lado está representada a multiplicação dos números de 1 a 10. Qual é a soma dos 100 produtos da tabela completa?

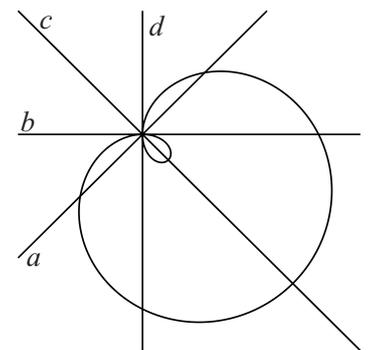
×	1	2	3	...	10
1	1	2	3	...	10
2	2	4	6	...	20
⋮	⋮				⋮
10	10	20	30	...	100

- (A) 1000 (B) 2025
(C) 2500 (D) 3025
(E) 5500

22. Num referencial cartesiano ortonormado xOy , a curva da figura é descrita pela equação

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Qual das retas a , b , c ou d representa o eixo dos yy ?



- (A) a (B) b
(C) c (D) d
(E) Nenhuma delas

23. Quando se lêem as afirmações seguintes, pela ordem (A), (B), (C), (D) e (E), qual é a primeira afirmação verdadeira?

- (A) (C) é verdadeira (B) (A) é verdadeira (C) (E) é falsa
 (D) (B) é falsa (E) $1 + 1 = 2$

24. Quantos polígonos regulares existem de modo a que a amplitude de cada um dos seus ângulos (em graus) seja um número inteiro?

- (A) 17 (B) 18 (C) 22 (D) 25 (E) 60

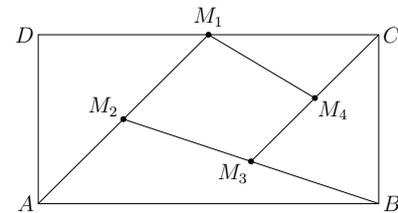
25. Quantos números inteiros positivos de 3 algarismos podem ser representados como a soma de exatamente nove potências naturais diferentes de base 2?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Quantos triângulos $[ABC]$ com $\widehat{ABC} = 90^\circ$ e $\overline{AB} = 20$ existem de modo a que as medidas de todos os lados sejam números inteiros?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

27. No retângulo $[ABCD]$ da figura, M_1 é o ponto médio de $[DC]$, M_2 é o ponto médio de $[AM_1]$, M_3 é o ponto médio de $[BM_2]$ e M_4 é o ponto médio de $[CM_3]$. Então, a razão entre as áreas do quadrilátero $[M_1M_2M_3M_4]$ e do retângulo $[ABCD]$ é:



- (A) $\frac{7}{16}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{7}{32}$ (D) $\frac{9}{32}$ (E) $\frac{1}{5}$

28. A Maria desenhou no quadro da escola retângulos azuis e vermelhos. Exatamente 7 dos retângulos são quadrados. Existem mais três retângulos vermelhos do que quadrados azuis. Existem mais 2 quadrados vermelhos do que retângulos azuis. Quantos retângulos azuis é que a Maria desenhou no quadro?

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 10

29. Os 96 membros do clube de contagem do Canguru estão sentados à volta de uma grande mesa circular. À vez, todos eles começam a contar os números 1, 2, 3, etc., de forma sequencial. Os membros que disserem um número par têm de sair da mesa e os restantes continuam a contar. Assim, na segunda volta a contagem começa no número 97. Eles continuam desta forma até restar apenas um membro na mesa. Qual foi o número que este membro disse na primeira volta?

- (A) 1 (B) 17 (C) 33 (D) 65 (E) 95

30. Na palavra “KANGAROO”, o Pedro e o João substituem as letras por algarismos, de modo a que os números resultantes tenham 8 algarismos ($K \neq 0$) e sejam múltiplos de 11. Cada um deles substitui letras diferentes por algarismos diferentes e letras iguais pelos mesmos algarismos. O Pedro obtém o maior número possível e o João o menor número possível. Uma das letras foi substituída pelo mesmo algarismo, por ambos os rapazes. Que algarismo é esse?

- (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6