



# Canguru Matemático sem Fronteiras 2015

<http://www.mat.uc.pt/canguru/>

Categoria: Júnior

Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos dos 10.º e 11.º anos de escolaridade

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

**Não podes usar calculadora.** Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em  $1/4$  dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

## Problemas de 3 pontos

1. Qual dos seguintes números está mais próximo de  $20,15 \times 51,02$ ?

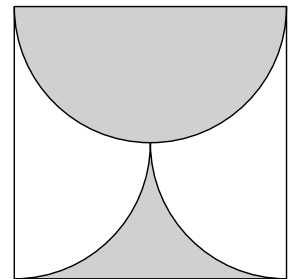
- (A) 100                      (B) 1000                      (C) 10000                      (D) 100000                      (E) 1000000

2. A mãe lavou roupa e pendurou as camisolas, alinhadas, numa corda de estender roupa que não tinha nenhuma peça de roupa pendurada. Depois, ela pediu aos seus filhos para pendurarem as meias colocando exatamente uma meia entre cada duas camisolas consecutivas. Se estiverem 29 peças de roupa (camisolas e meias) na corda da roupa, sendo a primeira e a última peças de roupa camisolas, quantas são as camisolas na corda?

- (A) 10                      (B) 11                      (C) 13                      (D) 14                      (E) 15

3. Na figura, o quadrado tem medida de lado  $a$  e a região sombreada é limitada por uma semicircunferência e por dois quartos de circunferência. Qual é a medida da área da região sombreada?

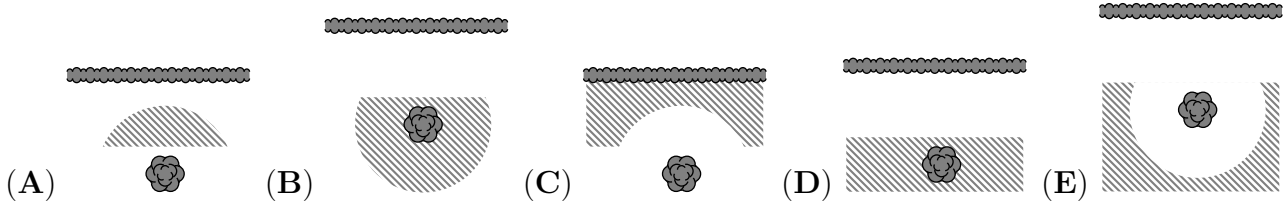
- (A)  $\frac{\pi a^2}{8}$                       (B)  $\frac{a^2}{2}$   
(C)  $\frac{\pi a^2}{2}$                       (D)  $\frac{a^2}{4}$   
(E)  $\frac{\pi a^2}{4}$



4. Três irmãs, Ana, Beta e Célia, compraram uma embalagem com 30 biscoitos, 10 para cada uma delas. A Ana pagou 80 cêntimos, a Beta pagou 50 cêntimos e a Célia 20 cêntimos. Se a repartição dos biscoitos tivesse sido proporcional ao valor que cada uma pagou, com quantos biscoitos mais teria ficado a Ana?

- (A) 10                      (B) 9                      (C) 8                      (D) 7                      (E) 6

5. O senhor Óscar quer desenterrar um tesouro que enterrou no jardim há alguns anos atrás. Ele só se lembra de ter enterrado o tesouro a pelo menos 5 metros de distância da parede da casa e no máximo a 5 metros de distância do tronco do limoeiro. Qual das seguintes imagens mostra a região (a tracejado) onde o senhor Óscar deve procurar o tesouro?



6. Qual é o algarismo das unidades do número  $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$ ?

- (A) 1                      (B) 5                      (C) 6                      (D) 7                      (E) 9

7. Numa turma há 33 alunos. Quando questionados sobre a sua disciplina preferida, as únicas respostas foram Matemática e Português. Três alunos têm igual preferência por ambas as disciplinas. De entre os alunos que só têm uma disciplina favorita, o número de alunos que preferem Matemática é o dobro do número de alunos que preferem Português. Quantos alunos da turma indicaram preferência pela disciplina de Matemática?

- (A) 15                      (B) 18                      (C) 20                      (D) 22                      (E) 23

8. Qual dos seguintes números não é um quadrado perfeito nem um cubo perfeito?

- (A)  $6^{13}$                       (B)  $5^{12}$                       (C)  $4^{11}$                       (D)  $3^{10}$                       (E)  $2^9$

9. O senhor Candeias utiliza velas de cera para iluminação. Todos os dias queima uma vela e sempre que tem sete velas queimadas aproveita a cera derretida para fazer uma nova vela. No máximo, para quantos dias darão 100 velas?

- (A) 112                      (B) 114                      (C) 115                      (D) 116                      (E) 117

10. Seja  $n$  o número de ângulos retos de um pentágono convexo. Qual é a lista dos valores possíveis para  $n$ ?

- (A) 1, 2, 3                      (B) 0, 1, 2, 3, 4                      (C) 0, 1, 2, 3                      (D) 0, 1, 2                      (E) 1, 2

## Problemas de 4 pontos

11. A figura mostra o dado *Decisão* em três posições diferentes. Qual é a probabilidade de sair SIM com este dado?



- (A)  $\frac{1}{3}$                       (B)  $\frac{1}{2}$                       (C)  $\frac{5}{9}$                       (D)  $\frac{2}{3}$                       (E)  $\frac{5}{6}$

12. A medida do lado de cada um dos quadrados na figura é 1. Qual é a medida mínima do percurso que terás de percorrer se quiseres deslocar-te do ponto assinalado com **Início** ao assinalado com **Fim**, se só for possível moveres-te ao longo dos lados ou das diagonais de cada um dos quadrados individuais?



- (A)  $2\sqrt{5}$       (B)  $\sqrt{10} + \sqrt{2}$       (C)  $2 + 2\sqrt{2}$       (D)  $4\sqrt{2}$       (E) 6

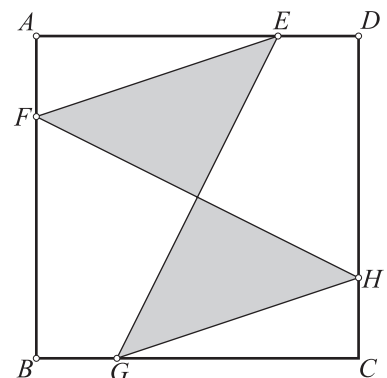
13. Todos os habitantes do planeta Orelhudo têm pelo menos duas orelhas. Três habitantes, chamados Imi, Dimi e Trimi, reuniram-se numa cratera. Imi disse: “Eu vejo oito orelhas.”; Dimi disse: “Eu vejo sete orelhas.”; Trimi respondeu: “Isso é estranho, eu vejo apenas cinco orelhas.”. Nenhum deles podia ver as suas próprias orelhas, mas via todas as orelhas dos outros. Quantas orelhas tem o Trimi?

- (A) 2      (B) 4      (C) 5      (D) 6      (E) 7

14. Um recipiente com a forma de um prisma retangular, cuja base é um quadrado com 10 cm de lado, é preenchido com água até à altura de  $h$  cm. Um sólido com a forma de um cubo com 2 cm de lado é colocado dentro do recipiente. O valor mínimo de  $h$  que permite que nenhuma parte do cubo fique acima do nível da água é

- (A) 1,92 cm      (B) 1,93 cm      (C) 1,90 cm      (D) 1,91 cm      (E) 1,94 cm

15. A medida da área do quadrado  $[ABCD]$  é 80. Os pontos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  pertencem aos lados do quadrado e  $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$ . Se  $\overline{AE} = 3\overline{ED}$ , qual é a medida da área da região a cinzento?



- (A) 20      (B) 25  
(C) 30      (D) 35  
(E) 40

16. Hoje, o produto das idades, em anos, do Pedro e do seu pai é 2015. Qual é a diferença entre as suas idades?

- (A) 26      (B) 29      (C) 31      (D) 34      (E) 36

17. Se as duas soluções da equação  $x^2 - 85x + c = 0$  forem números primos, qual é a soma dos algarismos de  $c$ ?

- (A) 12      (B) 13      (C) 14      (D) 15      (E) 21

18. Quatro pesos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  estavam colocados nas balanças, conforme a Figura 1. Depois, dois pesos foram trocados e as balanças mudaram de posição, como mostra a Figura 2.

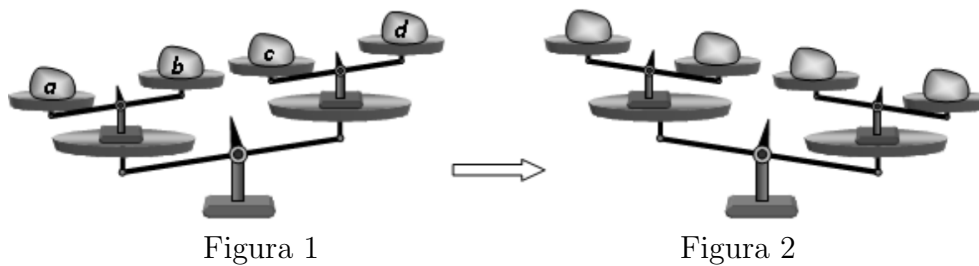


Figura 1

Figura 2

Quais são os pesos que foram trocados?

- (A)  $a$  e  $b$       (B)  $b$  e  $d$       (C)  $b$  e  $c$       (D)  $a$  e  $d$       (E)  $a$  e  $c$

19. A Cristina escreveu no quadro todos os números inteiros positivos de três algarismos que têm a propriedade seguinte: “Quaisquer dois algarismos adjacentes diferem em 3 unidades”. Quantos números escreveu a Cristina?

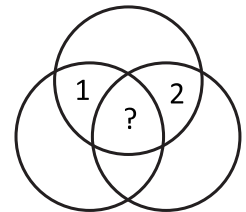
- (A) 12      (B) 14      (C) 16      (D) 20      (E) 27

20. De entre as possibilidades seguintes, qual representa um contra-exemplo para a afirmação “Se  $n$  for primo então exatamente um dos números  $n - 2$  ou  $n + 2$  é primo”?

- (A)  $n = 11$       (B)  $n = 19$       (C)  $n = 21$       (D)  $n = 29$       (E)  $n = 37$

## Problemas de 5 pontos

21. A figura mostra sete regiões delimitadas por três circunferências. Em cada região está escrito um número. Sabe-se que o número em cada uma das regiões é igual à soma dos números nas regiões vizinhas. (Dizemos que duas regiões são vizinhas se as suas fronteiras têm mais do que um ponto comum.) Dois dos números são conhecidos, conforme está indicado na figura. Que número deve estar na região central, assinalada com o ponto de interrogação?



- (A) 0      (B)  $-3$       (C) 3      (D)  $-6$       (E) 6

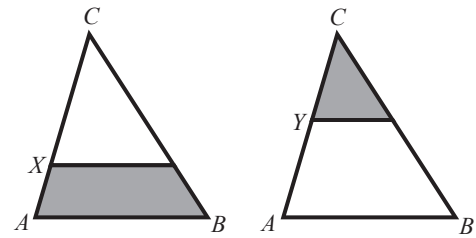
22. A Paula tem três dicionários diferentes e dois romances também diferentes numa prateleira. De quantas maneiras diferentes pode ela dispor os livros na prateleira se quiser manter os dicionários todos juntos e os romances todos juntos?

- (A) 12      (B) 24      (C) 30      (D) 60      (E) 120

23. Quantos números de dois algarismos podem ser escritos como a soma de exatamente seis potências naturais de base 2, incluindo  $2^0$ , e todas diferentes?

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) 4

24. No triângulo  $[ABC]$  podemos desenhar dois segmentos paralelos à sua base  $[AB]$ , a partir do ponto  $X$  e do ponto  $Y$ . As regiões a cinzento na figura têm a mesma área. Se a razão entre  $\overline{CX}$  e  $\overline{XA}$  for 4, qual é a razão entre  $\overline{CY}$  e  $\overline{YA}$ ?



- (A)  $1 \div 1$       (B)  $2 \div 1$       (C)  $3 \div 1$       (D)  $3 \div 2$       (E)  $4 \div 3$

25. Num triângulo retângulo, a bissetriz de um dos ângulos agudos divide o lado oposto em segmentos com medidas de comprimento 1 e 2. Qual é a medida de comprimento da bissetriz?

- (A)  $\sqrt{2}$       (B)  $\sqrt{3}$       (C)  $\sqrt{4}$       (D)  $\sqrt{5}$       (E)  $\sqrt{6}$

26. Representemos por  $\overline{ab}$  o número com 2 algarismos formado pelos algarismos  $a$  e  $b$ . Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  três algarismos diferentes. De quantas maneiras podemos escolher os algarismos  $a$ ,  $b$  e  $c$  de modo a que  $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ ?

- (A) 84      (B) 96      (C) 125      (D) 201      (E) 502

27. Quando retirámos um número da lista: 1, 2, 3, ...,  $n - 1$ ,  $n$ , a média dos restantes números ficou igual a 4,75. Qual foi o número retirado?

- (A) 5      (B) 7      (C) 8      (D) 9  
(E) Não é possível saber

28. A formiga Rabiga está num dos vértices de um cubo cujas arestas têm medida de comprimento 1. Ela quer passar ao longo de cada aresta do cubo e retornar ao seu ponto de partida, fazendo com que o comprimento do seu trajeto seja o mais curto possível. Qual é a medida de comprimento desse trajeto?

- (A) 12      (B) 14      (C) 15      (D) 16      (E) 20

29. Numa folha foram escritos dez números reais diferentes. Depois, qualquer número que fosse igual ao produto dos outros nove números foi sublinhado. No máximo, quantos foram os números sublinhados?

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 9      (E) 10

30. Numa linha reta foram marcados vários pontos distintos, bem como todos os possíveis segmentos de reta entre pares desses pontos. Um dos pontos, designado por  $X$ , encontra-se em 80 desses segmentos que não se iniciam nem terminam em  $X$ . Um outro desses pontos, designado por  $Y$ , encontra-se em 90 desses segmentos que não se iniciam nem terminam em  $Y$ . Quantos pontos foram marcados na reta?

- (A) 20      (B) 22      (C) 80      (D) 90  
(E) Não é possível saber