

Canguru Matemático sem Fronteiras 2019

Categoria: Estudante

Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: _____ Turma: _____

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. A bandeira da Cangurulândia é um retângulo dividido em três retângulos mais pequenos, geometricamente iguais, como se mostra na figura. No retângulo branco, qual é a razão entre o comprimento do lado menor e o comprimento do lado maior?



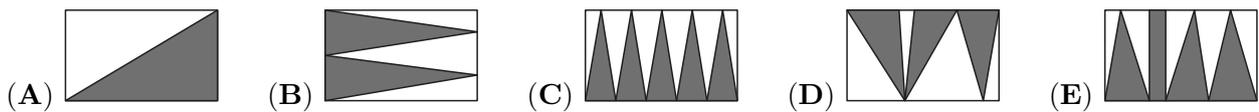
- (A) $1 \div 2$ (B) $2 \div 3$ (C) $2 \div 5$ (D) $3 \div 7$ (E) $4 \div 9$

2. Os números 1, 2, 3 e 4 foram escritos, um por célula, nas diferentes células de uma tabela 2×2 . Depois disso, foi calculada a soma dos números em cada linha e em cada coluna da tabela. Duas dessas somas são 4 e 5. Quais são as outras duas somas?

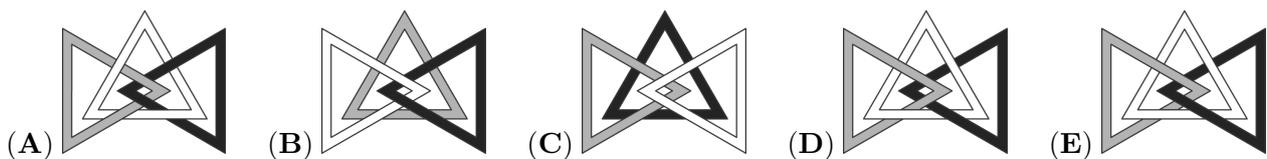
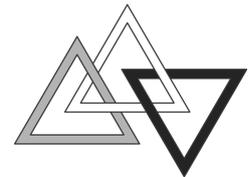


- (A) 6 e 6 (B) 3 e 5 (C) 4 e 5 (D) 4 e 6 (E) 5 e 6

3. No interior de cinco retângulos, geometricamente iguais, foram sombreadas regiões triangulares ou retangulares, conforme se mostra nas figuras seguintes. Em qual das figuras é que a parte sombreada tem maior área?



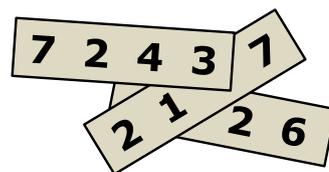
4. Três peças triangulares estão ligadas como se indica na figura à direita. Qual das seguintes figuras mostra essas três peças triangulares ligadas da mesma forma?



5. Uma pirâmide tem 23 faces triangulares. Quantas arestas tem essa pirâmide?

- (A) 23 (B) 24 (C) 46 (D) 48 (E) 69

6. Três números de quatro algarismos estão escritos em três tiras de papel, como se mostra na figura. A soma dos três números é 11126, mas três dos algarismos não estão visíveis. Quais são os algarismos escondidos?

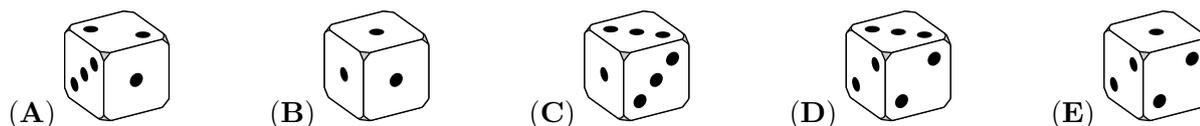


- (A) 1, 4 e 7 (B) 1, 5 e 7 (C) 3, 3 e 3 (D) 4, 5 e 6 (E) 4, 5 e 7

7. Qual é o primeiro algarismo (mais à esquerda) do menor número inteiro positivo cujos algarismos somam 2019?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. Cada uma das faces de um dado é marcada com 1, 2 ou 3 pintas, de tal modo que, quando o dado é lançado, a probabilidade de sair uma face com 1 pinta é $\frac{1}{2}$, a probabilidade de sair uma face com 2 pintas é $\frac{1}{3}$ e a probabilidade de sair uma face com 3 pintas é $\frac{1}{6}$. Qual das seguintes figuras não pode representar esse dado?



9. O Miguel inventou uma nova operação, “ \diamond ”, no conjunto dos números reais, definida por $x \diamond y = y - x$. Se a , b e c satisfazem $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$, qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) $a = b$ (B) $b = c$ (C) $a = c$ (D) $a = 0$ (E) $c = 0$

10. Quantos dos números inteiros de 2^{10} a 2^{13} , inclusive, são divisíveis por 2^{10} ?

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

Problemas de 4 pontos

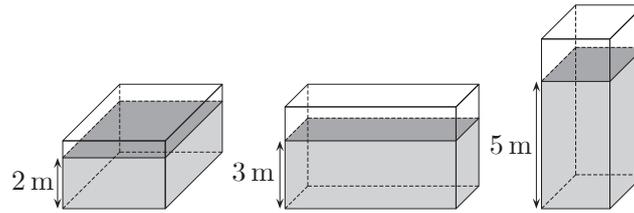
11. Qual é a maior potência de base 3 que divide o número $7! + 8! + 9!$?

- (A) 3^2 (B) 3^4 (C) 3^5 (D) 3^6
 (E) Uma potência de base 3 superior a 3^6

12. Este ano, o número de rapazes da minha turma aumentou em 20% e o número de raparigas diminuiu em 20%. Temos agora mais um estudante (que pode ser rapaz ou rapariga) do que antes. Qual dos seguintes é o número de estudantes da minha turma neste momento?

- (A) 22 (B) 26 (C) 29 (D) 31 (E) 34

13. Um recipiente com a forma de um paralelepípedo está parcialmente cheio com 120 m^3 de água. A altura da água no recipiente é de 2 m ou 3 m ou 5 m, dependendo da face do recipiente que está assente no chão, conforme é ilustrado na figura, que não está à escala. Qual é o volume do recipiente?



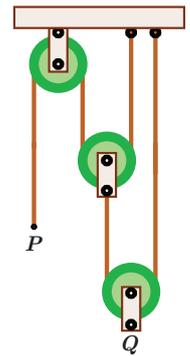
- (A) 160 m^3 (B) 180 m^3 (C) 200 m^3 (D) 220 m^3 (E) 240 m^3

14. Três cangurus, Alex, Bob e Carl, saem todos os dias para passear. Se o Alex não usa chapéu, então o Bob usa chapéu. Se o Bob não usa chapéu, então o Carl usa chapéu. Hoje o Carl não está a usar chapéu. Quem é que hoje está, de certeza, a usar chapéu?

- (A) Somente o Alex e o Bob (B) Somente o Alex
(C) O Alex, o Bob e o Carl (D) Nem o Alex nem o Bob
(E) Somente o Bob

15. O sistema de roldanas na figura é constituído por três roldanas ligadas verticalmente por cordas. A extremidade P é movida 24 centímetros para baixo. Quantos centímetros sobe a extremidade assinalada com Q ?

- (A) 24 cm (B) 12 cm
(C) 8 cm (D) 6 cm
(E) $\frac{24}{5}$ cm



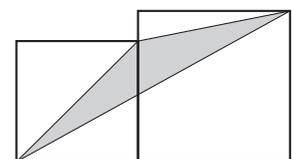
16. Um número natural n é dito “Bom” se o seu maior divisor (excluindo n) é igual a $n - 6$. Quantos números naturais “Bons” existem?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) Uma infinidade

17. Numa caixa estão quatro chocolates e uma goma. O João e a Maria vão tirar, à vez e sem reposição, uma guloseima da caixa, até que um deles tire a goma. O João é o primeiro a tirar uma guloseima da caixa. Qual é a probabilidade da Maria tirar a goma?

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

18. Na figura estão representados dois quadrados adjacentes cujos lados têm medidas de comprimento a e b , com $a < b$. Qual é a medida da área do triângulo sombreado?



- (A) \sqrt{ab} (B) $\frac{1}{2}a^2$ (C) $\frac{1}{2}b^2$ (D) $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ (E) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

19. Qual é a parte inteira de $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}}$?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 20 (E) 25

20. Para calcular o resultado de $\frac{a+b}{c}$, onde a , b e c são números naturais, a Sara digita $a + b \div c =$ numa calculadora e o resultado é 11. A seguir, ela digita $b + a \div c =$ e fica surpreendida ao ver que o resultado é 14. A Sara apercebe-se então que a calculadora está programada para calcular as divisões antes das adições. Qual é o resultado correto de $\frac{a+b}{c}$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Problemas de 5 pontos

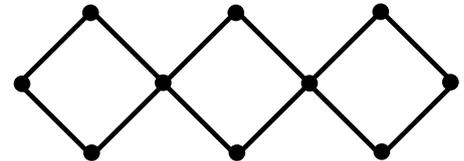
21. Seja a a soma de todos os divisores positivos de 1024 e seja b o produto de todos os divisores positivos de 1024. Então:

- (A) $(a - 1)^5 = b$ (B) $(a + 1)^5 = b$ (C) $a^5 = b$ (D) $a^5 - 1 = b$ (E) $a^5 + 1 = b$

22. Qual é o conjunto de todos os valores do parâmetro a para o qual a equação $2 - |x| = ax$ tem duas soluções?

- (A) $] -\infty, -1]$ (B) $] -1, 1[$ (C) $[1, +\infty[$ (D) $\{0\}$ (E) $\{-1, 1\}$

23. Os vértices do grafo representado na figura ao lado são rotulados com os números inteiros de 1 a 10. A soma dos quatro números associados aos vértices é a mesma nos três quadrados. Qual é o menor valor possível para essa soma?



- (A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

24. Quantos planos contêm pelo menos três dos vértices de um dado cubo?

- (A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

25. Quatro retas distintas passam pela origem do sistema de coordenadas. Elas intersectam a parábola de equação $y = x^2 - 2$ em oito pontos. Qual pode ser o produto das abcissas desses oito pontos?

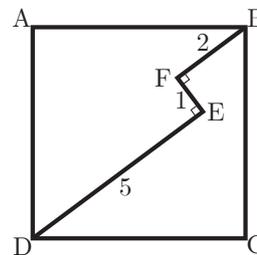
- (A) Somente 16 (B) Somente -16 (C) Somente 8 (D) Somente -8
(E) Existem vários produtos possíveis

26. Para quantos números inteiros n é que $|n^2 - 2n - 3|$ é um número primo?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(E) Para uma infinidade deles

27. Dentro do quadrado $[ABCD]$ está marcada uma linha poligonal que une os pontos D, E, F e B , com $DE \perp EF$ e $EF \perp FB$, como se mostra na figura. Sabendo que $\overline{DE} = 5$, $\overline{EF} = 1$ e $\overline{FB} = 2$, qual é o comprimento do lado do quadrado?



- (A) $3\sqrt{2}$ (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

- (C) $\frac{11}{2}$ (D) $5\sqrt{2}$

(E) Nenhum dos valores anteriores

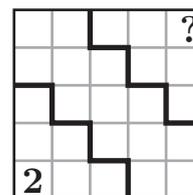
28. A sucessão de termo geral a_n tem por primeiro termo $a_1 = 49$. Para $n \geq 1$, o número a_{n+1} é obtido adicionando 1 à soma dos algarismos de a_n e, em seguida, tomando o quadrado do resultado. Assim, $a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 196$. Qual é o valor de a_{2019} ?

- (A) 121 (B) 25 (C) 64 (D) 400 (E) 49

29. Três números diferentes são escolhidos aleatoriamente no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Qual é a probabilidade de um deles ser a média dos outros dois?

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

30. Em cada quadrícula do quadrado na figura ao lado vai ser colocado um número, de forma que cada linha e cada coluna do quadrado contenha os números 1, 2, 3, 4 e 5. Além disso, a soma dos números em cada uma das três regiões com fronteira a negrito é igual. Que número deverá estar no canto superior direito?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5