Canguru Matemático sem Fronteiras 2019

Categoria: Júnior | Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos dos 10.º e 11.º anos de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: ____________

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Qual é o valor de $20 \times 19 + 20 + 19$?

(**A**) 389 (**B**) 399 (**C**) 409 (**D**) 419 (**E**) 429

2. Um comboio de brincar demora exatamente 1 minuto e 11 segundos a percorrer uma pista. Quanto tempo demora a percorrer seis vezes a mesma pista?

(**A**) 6 minutos e 56 segundos (**B**) 7 minutos e 6 segundos (**C**) 7 minutos e 16 segundos
(**D**) 7 minutos e 26 segundos (**E**) 7 minutos e 36 segundos

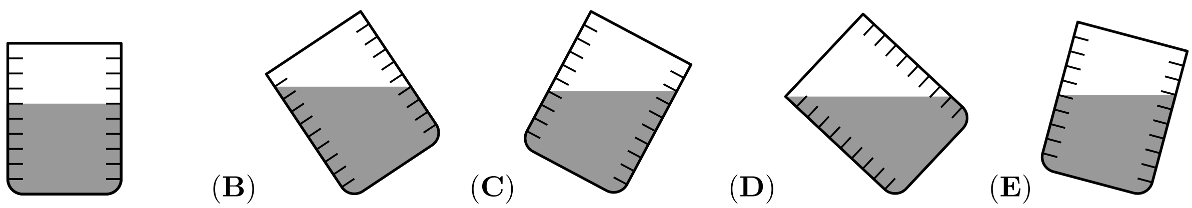
3. Um barbeiro quer escrever a palavra CORTE num quadro de tal modo que, quando um cliente olhar para o espelho, possa ler a palavra corretamente. Como deve o barbeiro escrever a palavra no quadro?

(**A**) CORTE (**B**) CORTƎ (**C**) ƎTЯOC (**D**) ETЯOↃ (**E**) ƎTЯOↃ

4. Lançando simultaneamente três dados cúbicos, com as faces numeradas de 1 a 6, e adicionando os pontos das faces voltadas para cima, quantas somas diferentes se podem obter?

(**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 17 (**E**) 18

5. Os cinco copos idênticos, representados abaixo, têm água. Quatro deles contêm a mesma quantidade de água. Qual deles contém uma quantidade diferente de água ?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

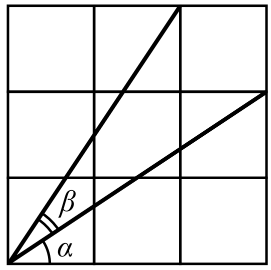
6. Um parque tem cinco acessos que são simultaneamente locais de entrada e de saída. A Mónica quer entrar por um acesso e sair por outro. De quantas maneiras diferentes pode ela entrar e sair do parque?

(**A**) 25 (**B**) 20 (**C**) 16 (**D**) 15 (**E**) 10

7. O peso de cada um de três cangurus é um número inteiro e os três cangurus têm pesos diferentes. O peso total deles é 97 kg. Quanto pode, no máximo, pesar o mais leve?

(**A**) 1 kg (**B**) 30 kg (**C**) 31 kg (**D**) 32 kg (**E**) 33 kg

8. Na figura ao lado estão marcados nove quadrados geometricamente iguais. Relativamente aos ângulos assinalados, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

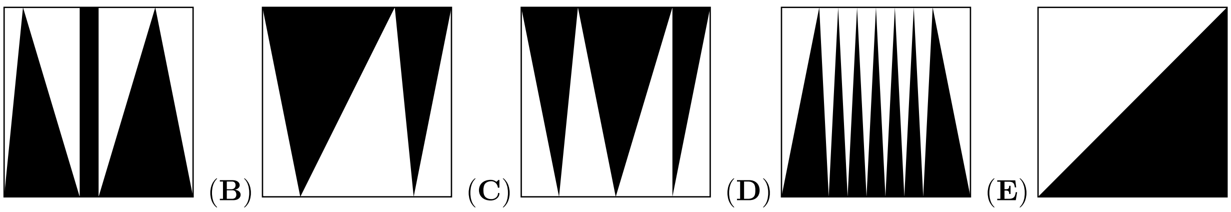


(**A**) $\alpha = \beta$ (**B**) $2\alpha + \beta = 90°$

(**C**) $\alpha + \beta = 60°$ (**D**) $2\beta + \alpha = 90°$

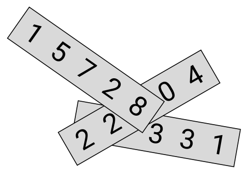
(**E**) $\alpha + \beta = 45°$

9. Em cada um de cinco quadrados brancos de lado unitário foram pintadas, de preto, regiões triangulares ou retangulares. Em qual dos cinco quadrados a região pintada tem a maior área?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

10. Em cada um de três pedaços de papel foi escrito um número de cinco algarismos, conforme a figura ao lado mostra. Três dos algarismos estão cobertos. Sabendo que a soma dos três números é 57263, quais são os algarismos cobertos?



(**A**) 0, 2 e 2 (**B**) 1, 2 e 9 (**C**) 2, 4 e 9

(**D**) 2, 7 e 8 (**E**) 5, 7 e 8

Problemas de 4 pontos

11. Um quadrado tem vértices A, B, C e D, assinalados no sentido horário. Constrói-se um triângulo equilátero de vértices A, E e C, com os vértices indicados no sentido horário. Qual é a amplitude do ângulo CBE?

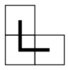
(**A**) 30° (**B**) 45° (**C**) 135° (**D**) 145° (**E**) 150°

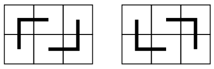
12. As letras a, b, c e d representam quatro números inteiros distintos escolhidos entre 1 e 10, inclusive. Qual é o menor valor possível para a expressão $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

(**A**) $\frac{2}{10}$ (**B**) $\frac{3}{19}$ (**C**) $\frac{14}{45}$ (**D**) $\frac{29}{90}$ (**E**) $\frac{25}{72}$

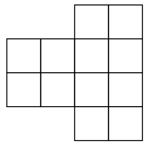
13. A bandeira de Canguria, representada na figura ao lado, é um retângulo com as medidas laterais na proporção $3 \div 5$. A bandeira está dividida em quatro retângulos de igual área. Qual é a proporção entre as medidas laterais do retângulo branco?

(**A**) $1 \div 3$ (**B**) $1 \div 4$ (**C**) $2 \div 7$ (**D**) $3 \div 10$ (**E**) $4 \div 15$

14. Um retângulo de dimensões 3×2 pode ser coberto por peças em L, da forma , exatamente de duas maneiras diferentes, como se pode ver na figura abaixo.



De quantos modos diferentes pode ser coberta a figura ao lado, usando peças da forma indicada?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 48

15. O triatlo é uma modalidade que consiste na combinação de natação, corrida e ciclismo. A parte do ciclismo corresponde a três quartos da distância total percorrida na prova e a da corrida a um quinto. A distância a ser percorrida na natação é de 2 km. Qual é a distância total percorrida nesta prova?

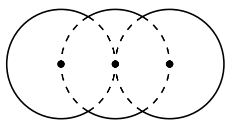
(**A**) 10 km (**B**) 20 km (**C**) 38 km (**D**) 40 km (**E**) 60 km

16. Para obter um certo sumo de laranja diluído devemos juntar sumo concentrado de laranja e água na proporção de $1 \div 7$ por unidade de volume. O concentrado de laranja está num frasco de 1 litro, que está cheio até meio. Que fração deste sumo concentrado deve ser utilizada para obter 2 litros de sumo de laranja diluído?

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{2}{7}$ (**D**) $\frac{4}{7}$

(**E**) Todo o sumo concentrado

17. A figura ao lado é constituída por partes de três círculos de raio R, cujos centros estão sobre uma reta. O círculo do meio passa pelos centros dos outros dois, como se pode ver. Qual é a medida do perímetro da figura?



(**A**) $\frac{10\pi R}{3}$ (**B**) $\frac{5\pi R}{3}$ (**C**) $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ (**D**) $2\pi R\sqrt{3}$ (**E**) $4\pi R$

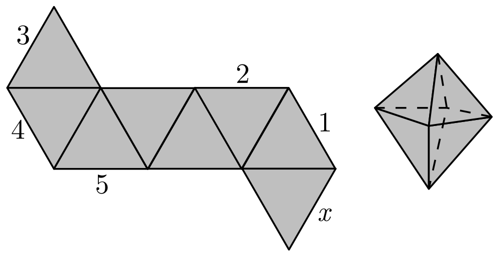
18. A soma dos sete algarismos de um certo número de telefone da forma $aaabbbb$ é igual ao número ab (constituído pelos algarismos a e b). Qual é o valor de $a + b$?

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

19. Foram embaladas 60 maçãs e 60 peras em caixas, de modo a que cada caixa contenha o mesmo número de maçãs e a que não haja duas caixas contendo o mesmo número de peras. Qual é o maior número possível de caixas que podem ter sido utilizadas para acondicionar a fruta desta forma?

(**A**) 20 (**B**) 15 (**C**) 12 (**D**) 10 (**E**) 6

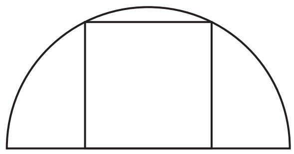
20. Na figura ao lado está representada uma planificação de um octaedro. Quando esta é dobrada para formar o octaedro, qual dos segmentos de reta, assinalados com os números 1, 2, 3, 4 e 5, coincidirá com o segmento de reta assinalado com x?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3
(**D**) 4 (**E**) 5

Problemas de 5 pontos

21. Um quadrado tem dois dos seus vértices sobre uma semicircunferência e os outros dois no diâmetro da semicircunferência, como se pode ver na figura ao lado. Se o raio da semicircunferência é 1 cm, qual é a área do quadrado?



(**A**) $\frac{4}{5}$ cm^2 (**B**) $\frac{\pi}{4}$ cm^2 (**C**) 1 cm^2 (**D**) $\frac{4}{3}$ cm^2 (**E**) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm^2

22. Dois pontos estão marcados sobre um disco circular que está a rodar em torno de seu centro a uma velocidade constante. Um deles está 3 cm mais longe do centro do disco do que o outro. O ponto mais afastado do centro move-se a uma velocidade que é 2,5 vezes a velocidade do outro ponto. Qual é a distância do centro do disco ao ponto mais afastado?

(**A**) 10 cm (**B**) 9 cm (**C**) 8 cm (**D**) 6 cm (**E**) 5 cm

23. Os números inteiros de 1 a 99 estão escritos por ordem crescente e sem espaços entre eles. Esta sequência de algarismos foi dividida em ternos de três algarismos:

$$123456789101112\ldots979899 \longrightarrow (123)(456)(789)(101)(112)\ldots(979)(899).$$

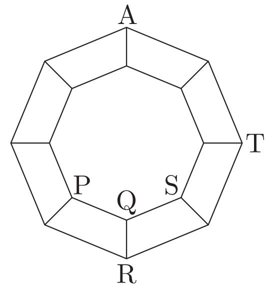
Qual dos seguintes não pode ser um destes ternos?

(**A**) (222) (**B**) (444) (**C**) (464) (**D**) (646) (**E**) (888)

24. Quantos planos passam exatamente por três dos vértices de um dado cubo?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 8 (**E**) 12

25. Na figura ao lado temos um grafo com 16 vértices e algumas arestas que os unem. Uma formiga está no vértice assinalado com A. Ela pode movimentar-se ao longo do grafo do seguinte modo: em cada movimento pode deslocar-se para um vértice vizinho seguindo por uma das arestas que os une. Depois de 2019 movimentos em qual dos vértices P, Q, R, S ou T pode estar a formiga?



(**A**) Só no P, R ou S, mas não no Q, nem no T (**B**) Só no P, R, S ou T, mas não no Q

(**C**) Só no Q (**D**) Só no T

(**E**) Em qualquer um desses vértices

26. As letras a, b e c representam números inteiros positivos. Cada um destes números tem três algarismos e, em cada um deles, o primeiro algarismo é igual ao último. Se $b = 2a + 1$ e $c = 2b + 1$, quantas possibilidades existem para o número a?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) Mais de 3

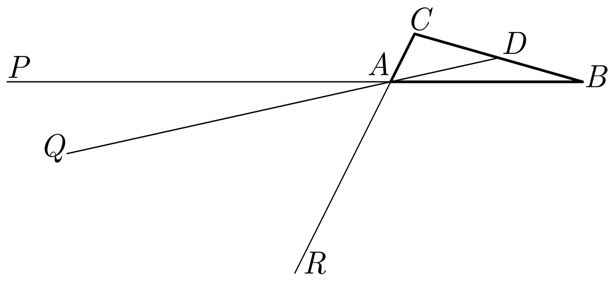
27. Em cada vértice de um quadrado é marcado um número inteiro positivo. Para quaisquer dois números unidos por um lado do quadrado, um deles é múltiplo do outro. No entanto, para quaisquer dois números diagonalmente opostos, nenhum é múltiplo do outro. Qual é a menor soma possível dos quatro números?

(**A**) 12 (**B**) 24 (**C**) 30 (**D**) 35 (**E**) 60

28. Qual é o menor número de elementos que temos de retirar ao conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ de modo a que o produto dos elementos que ficam seja um quadrado perfeito?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

29. Seja $[ABC]$ um triângulo cuja medida da área é S e seja D o ponto médio do segmento $[BC]$. Se P, Q e R são pontos das retas AB, AD e AC, respetivamente, conforme a figura abaixo mostra, tais que $\overline{AP} = 2\,\overline{AB}$, $\overline{AQ} = 3\,\overline{AD}$ e $\overline{AR} = 4\,\overline{AC}$, qual é a medida da área do triângulo $[PQR]$?



(**A**) S (**B**) $2S$ (**C**) $3S$ (**D**) $\frac{1}{2}S$

(**E**) 0 (i.e. P, Q, R são colineares)

30. Se for retirado um qualquer algarismo a um certo número natural de quatro algarismos, obtém-se um número de três algarismos que é um divisor do número original. Quantos números de quatro algarismos têm esta propriedade?

(**A**) 5 (**B**) 9 (**C**) 14 (**D**) 19 (**E**) 23