

Canguru Matemático sem Fronteiras 2020

Categoria: Estudante

Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: _____ Turma: _____

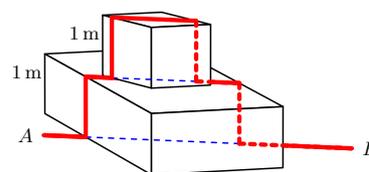
Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Qual é a soma dos dois últimos algarismos do produto $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$?

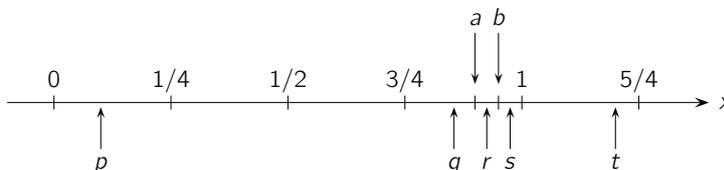
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

2. Uma formiga caminhava todos os dias ao longo de uma linha reta do ponto A para o ponto B , pontos esses que distam 5 m um do outro. Um dia, alguém colocou no seu caminho dois obstáculos, com forma paralelepédica, cada um dos quais com 1 m de altura. Agora, a formiga caminha ao longo ou acima da mesma linha reta, embora necessite de subir e descer verticalmente sobre os dois obstáculos, como se mostra na figura. Qual é agora o comprimento do seu caminho de A para B ?



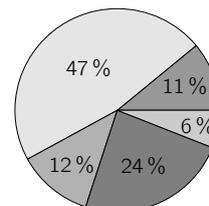
- (A) 7 m (B) 9 m (C) $5 + 4\sqrt{2}$ m (D) $9 - 2\sqrt{2}$ m
(E) A resposta depende dos ângulos entre a reta AB e os lados dos paralelepípedos

3. Na figura abaixo está representada a reta real, onde o Renato marcou, com a maior precisão possível, os números reais a e b . O Renato marcou também os pontos p , q , r , s e t , sendo que um deles representa o produto ab . Qual desses pontos representa o produto ab ?



- (A) p (B) q (C) r (D) s (E) t

4. O gráfico circular mostra como os alunos da minha escola se deslocam até à escola. Há aproximadamente duas vezes mais alunos que usam bicicleta do que aqueles que usam um transporte público e há aproximadamente tantos alunos a irem a pé como os que vão de carro. Os restantes alunos vão de motorizada. Qual é a percentagem dos alunos que se deslocam para a escola de motorizada?



- (A) 6 % (B) 11 % (C) 12 % (D) 24 % (E) 47 %

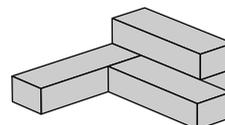
© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados. Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático®



12. Em cima de uma mesa estão cinco moedas, todas elas com a face “cara” voltada para cima. Efetuando uma série de etapas, cada uma das quais consiste em virar exatamente três moedas, qual é o menor número de etapas necessárias para que todas as moedas fiquem com a face “coroa” voltada para cima?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
 (E) Não é possível obter todas as moedas com a face “coroa” voltada para cima

13. A forma na figura ao lado foi construída com quatro caixas paralelepípedicas idênticas, coladas entre si. É necessário um litro de tinta para pintar o exterior de cada uma dessas caixas. Quantos litros de tinta são necessários para pintar o exterior da construção na figura?

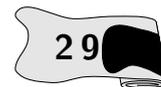


- (A) 2,5 (B) 3 (C) 3,25 (D) 3,5 (E) 4

14. Sejam a , b e c números inteiros. Qual dos seguintes números não é, com toda a certeza, igual a $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$?

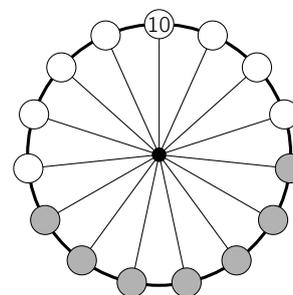
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 6 (E) 8

15. Os dois primeiros algarismos de um número inteiro com 100 algarismos são 2 e 9. Quantos algarismos tem o quadrado desse número?



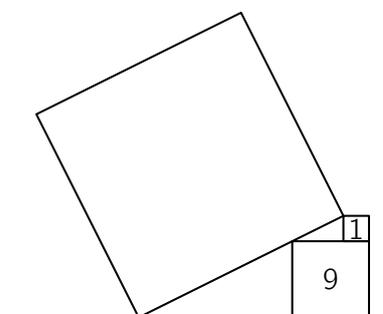
- (A) 101 (B) 199 (C) 200 (D) 201
 (E) Não é possível saber

16. O Matias colocou 15 números numa roda. Apenas é visível o número 10, como se mostra na figura ao lado. A soma dos números em quaisquer 7 posições consecutivas na roda, tal como as que estão sombreadas a cinzento, é sempre a mesma. Quando todos os 15 números são adicionados, exatamente quantos dos números 75, 216, 365 e 2020 é possível obter como total?



- (A) Zero (B) Um (C) Dois (D) Três (E) Quatro

17. A figura ao lado mostra um quadrado maior que toca noutros dois quadrados. Os números indicados em cada um dos quadrados mais pequenos indicam a medida da sua área. Qual é a medida da área do quadrado maior?



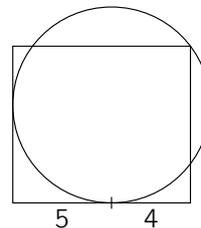
- (A) 49 (B) 80
 (C) 81 (D) 82
 (E) 100

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados. Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático®

18. A sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é definida por: $f_1 = 1$, $f_2 = 3$ e $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Dos primeiros 2020 termos da sucessão, quantos são números pares?

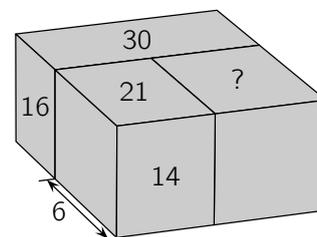
- (A) 673 (B) 674 (C) 1010 (D) 1011 (E) 1347

19. Uma circunferência e um retângulo foram desenhados de tal maneira que dois lados do retângulo são tangentes à circunferência e esta contém um dos vértices do retângulo. As distâncias de dois vértices do retângulo a um dos pontos de tangência medem 5 e 4, como se mostra na figura. Qual é a medida da área do retângulo?



- (A) 27π (B) 25π (C) 72 (D) 63
 (E) Nenhum dos valores anteriores

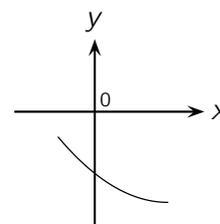
20. Três paralelepípedos retângulos estão dispostos de modo a formar um paralelepípedo retângulo maior, como se mostra na figura. A largura de um deles mede 6 e as áreas de algumas das faces medem 14, 21, 16 e 30, conforme é indicado na figura. Qual é a medida da área da face assinalada com o ponto de interrogação?



- (A) 18 (B) 24 (C) 28 (D) 30
 (E) Não é possível saber

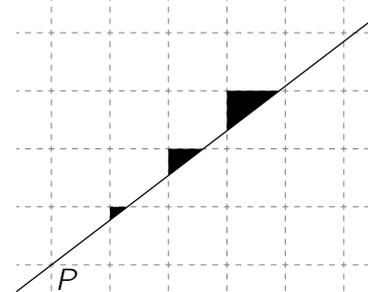
Problemas de 5 pontos

21. A figura mostra parte da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$. Qual dos seguintes números é positivo?



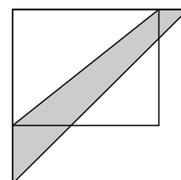
- (A) c (B) $b + c$ (C) ac
 (D) bc (E) ab

22. Num papel quadriculado, um pequeno canguru desenhou uma linha reta que passa pelo ponto P , no canto inferior esquerdo da grelha, e pintou três triângulos, como se mostra na figura ao lado. Qual das opções seguintes pode ser a razão entre as áreas dos triângulos?



- (A) $1 \div 2 \div 3$ (B) $1 \div 2 \div 4$
 (C) $1 \div 3 \div 9$ (D) $1 \div 4 \div 8$
 (E) Nenhuma das opções anteriores está correta

23. O comprimento de um dos lados de um jardim retangular foi aumentado em 20% e o comprimento do outro lado foi aumentado em 50%, como se mostra na figura. A área da região sombreada, entre a diagonal do novo jardim e a diagonal do jardim original, é 30 m^2 . Qual era a área do jardim original?



- (A) 60 m^2 (B) 65 m^2 (C) 70 m^2 (D) 75 m^2 (E) 80 m^2

24. Um número natural N é divisível por todos os números inteiros de 2 a 11, com exceção de dois deles. Qual dos seguintes pares de números inteiros pode ser essa exceção?

- (A) 2 e 3 (B) 4 e 5 (C) 6 e 7 (D) 7 e 8 (E) 10 e 11

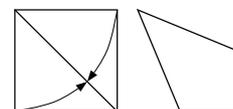
25. De manhã, a gelataria Canguru tinha à disposição 16 sabores e a Ana escolheu um gelado de dois sabores. Agora, vários sabores estão esgotados e a Bela quer um gelado de três sabores, escolhendo entre os sabores que restam. O número de possibilidades de escolha dos sabores que a Bela tem para o seu gelado é igual ao número de possibilidades de escolha que a Ana teve. Quantos sabores esgotaram?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

26. O António tem à sua disposição 71 berlindes dentro de uma caixa. Ele pode efetuar, de cada vez, uma das seguintes operações: ou tira 30 berlindes da caixa ou coloca 18 berlindes na caixa. O António pode efetuar cada uma destas operações quantas vezes quiser. Qual é o menor número de berlindes que podem ficar na caixa?

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

27. A Margarida pegou num pedaço de papel com a forma de um quadrado de lado 1 e dobrou dois dos lados sobre a diagonal, como se mostra na figura ao lado. Qual é a medida da área do quadrilátero resultante?

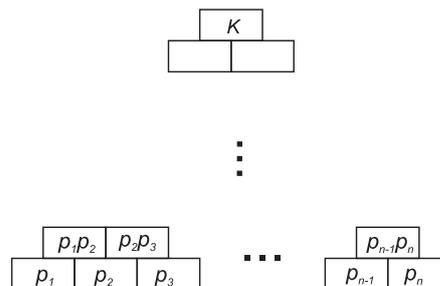


- (A) $2 - \sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\frac{7}{10}$ (E) $\frac{3}{5}$

28. Um iceberg com a forma de um cubo está parcialmente submerso. Sabe-se que 90% do seu volume está submerso e que há três arestas do cubo que são parcialmente visíveis acima da superfície do mar. As partes visíveis daquelas arestas têm comprimentos 24 m, 25 m e 27 m. Qual é o comprimento de uma aresta do cubo?

- (A) 30 m (B) 33 m (C) 34 m (D) 35 m (E) 39 m

29. Na linha inferior da figura estão dispostos, da esquerda para a direita, n números primos distintos, p_1, \dots, p_n . O produto de dois daqueles números que estejam em posições contíguas na mesma linha é escrito numa caixa imediatamente acima deles. O número $K = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ está escrito no topo da tabela. Numa tabela em que $\alpha_2 = 8$, quantos números são divisíveis pelo número p_4 ?



- (A) 4 (B) 16 (C) 24 (D) 28 (E) 36

30. O João e o Miguel tentam adivinhar qual das seguintes figuras é a preferida do Carlos.



Relativamente à figura preferida do Carlos tem-se o seguinte: o João sabe que o Carlos disse ao Miguel qual é a forma da figura; o Miguel sabe que o Carlos disse ao João qual é a cor da figura.

Entretanto houve a seguinte conversa:

— Não sei qual é a figura preferida do Carlos e tenho a certeza de que o Miguel também não sabe — disse o João.

— Inicialmente não sabia qual era a figura preferida do Carlos, mas agora já sei — disse o Miguel.

— Agora também já sei — disse o João.

Qual é a figura preferida do Carlos?

