

# Canguru Matemático sem Fronteiras 2010



Categoria: Estudante

Duração: 1h30min

Destinatários: alunos do 12º Ano de Escolaridade

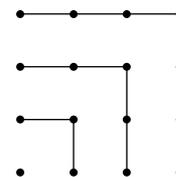
Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

**Não podes usar calculadora.** Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correcta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em  $1/4$  dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

## Problemas de 3 pontos

1. A partir da figura podemos verificar que  $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$ .  
Qual é o valor de  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$ ?

- (A)  $14 \times 14$     (B)  $9 \times 9$     (C)  $4 \times 4 \times 4$     (D)  $16 \times 16$     (E)  $4 \times 9$



2. Se a soma dos números das duas linhas for igual, qual é o valor de \*?

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |      |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 2010 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | *    |

- (A) 1010    (B) 1020    (C) 1910    (D) 1990    (E) 2000

3. As áreas das bases de dois recipientes de forma cúbica são  $1 \text{ dm}^2$  e  $4 \text{ dm}^2$ . Queremos encher o recipiente maior com água de uma nascente, utilizando o recipiente menor. Quantas vezes teremos de ir à nascente?

- (A) 2 vezes    (B) 4 vezes    (C) 6 vezes    (D) 8 vezes    (E) 16 vezes

4. Quantos números naturais de quatro algarismos e divisíveis por cinco existem, se forem constituídos só por algarismos ímpares?

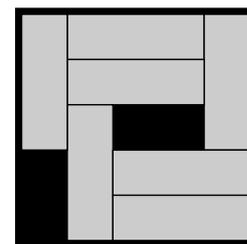
- (A) 900    (B) 625    (C) 250    (D) 125    (E) 100

5. O director de uma empresa afirmou: “Cada um dos nossos empregados tem pelo menos 25 anos”. Mais tarde, descobriu-se que ele estava errado. Isso significa que

- (A) todos os funcionários da empresa têm exactamente 25 anos  
 (B) todos os funcionários da empresa têm mais de 26 anos  
 (C) nenhum dos funcionários da empresa tem ainda 25 anos  
 (D) pelo menos um funcionário da empresa tem menos de 25 anos  
 (E) pelo menos um funcionário da empresa tem exactamente 26 anos

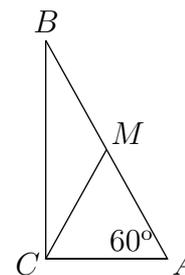
6. Há sete barras do tipo  $3 \times 1$  numa caixa, como mostra a figura. Queremos deslizar algumas barras na caixa de modo a criar espaço para mais uma barra do mesmo tipo. No mínimo, quantas barras, de entre as sete que já se encontram na caixa, é preciso deslocar?

- (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5      (E) É impossível



7. O triângulo  $[ABC]$  é rectângulo,  $M$  é o ponto médio da sua hipotenusa  $[AB]$  e o  $\angle BAC$  tem amplitude  $60^\circ$ . Então a amplitude do  $\angle BMC$  é

- (A)  $105^\circ$       (B)  $108^\circ$       (C)  $110^\circ$       (D)  $120^\circ$       (E)  $125^\circ$



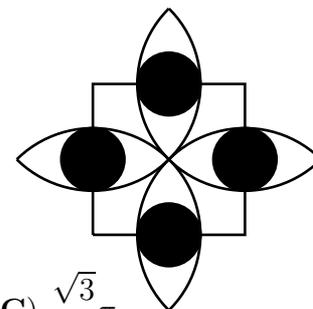
8. Qual dos seguintes números pode ser igual ao número de arestas de um prisma?

- (A) 100      (B) 200      (C) 2008      (D) 2009      (E) 2010

9. Quantos números naturais com dois algarismos  $xy$  existem se os algarismos  $x$  e  $y$  verificarem a propriedade  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$ ?

- (A) 1      (B) 2      (C) 6      (D) 32      (E) Nenhum

10. Na figura a medida do lado do quadrado é igual a 2 e as semicircunferências passam pelo centro do quadrado e têm centros nos vértices do quadrado. Os círculos sombreados têm centros nos lados dos quadrados e são tangentes às semicircunferências. Qual é a medida da área sombreada?



(A)  $4(3 - 2\sqrt{2})\pi$

(B)  $\sqrt{2}\pi$

(C)  $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

(D)  $\pi$

(E)  $\frac{1}{4}\pi$

## Problemas de 4 pontos

11. Os três números  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt[3]{7}$ ,  $\sqrt[6]{7}$  são termos consecutivos de uma progressão geométrica. O termo seguinte da progressão é

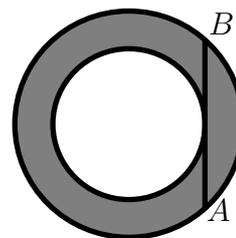
- (A)  $\sqrt[9]{7}$       (B)  $\sqrt[12]{7}$       (C)  $\sqrt[5]{7}$       (D)  $\sqrt[10]{7}$       (E) 1

12. Os números inteiros  $x$  e  $y$  satisfazem a igualdade  $2x = 5y$ . Apenas uma das opções seguintes pode ser  $x + y$ . Qual é?

- (A) 2011      (B) 2010      (C) 2009      (D) 2008      (E) 2007

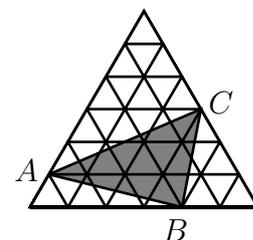
13. A corda  $[AB]$  é tangente ao menor dos círculos concêntricos. Se  $\overline{AB} = 16$ , qual é medida da área da região sombreada?

- (A)  $32\pi$       (B)  $63\pi$       (C)  $64\pi$   
 (D)  $32\pi^2$       (E) Depende dos raios dos círculos



14. O maior triângulo equilátero na figura é composto por 36 pequenos triângulos equiláteros, cada um com  $1 \text{ cm}^2$  de área. Qual é a área do triângulo  $[ABC]$ ?

- (A)  $11 \text{ cm}^2$       (B)  $12 \text{ cm}^2$       (C)  $13 \text{ cm}^2$       (D)  $14 \text{ cm}^2$       (E)  $15 \text{ cm}^2$



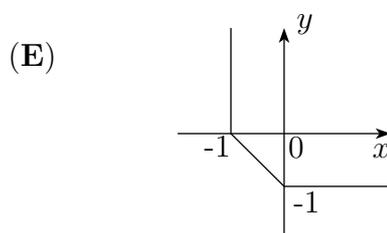
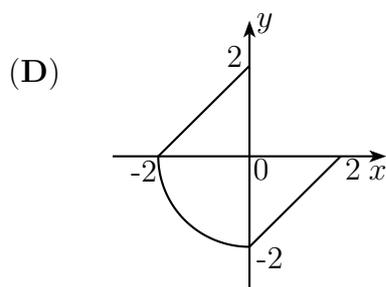
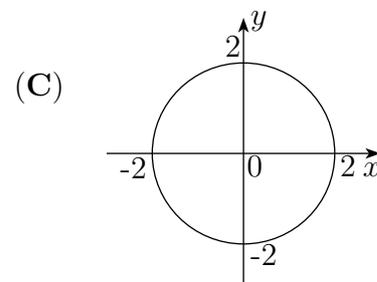
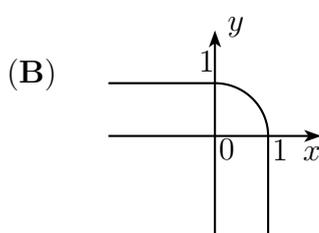
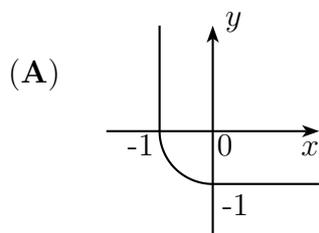
15. Um saco contém bolas de três cores diferentes: bolas azuis, bolas verdes e bolas vermelhas. Sabemos que, no caso de estarmos com os olhos vendados e tirarmos cinco bolas aleatoriamente e sem reposição, tiraremos, pelo menos, duas bolas vermelhas e três serão da mesma cor. Quantas bolas azuis existem no saco?

- (A) 1      (B) 2      (C) 3  
 (D) 4      (E) É impossível saber sem informação mais detalhada

16. Quantos triângulos retângulos podem ser construídos unindo três vértices de um polígono regular de 14 lados?

- (A) 42      (B) 84      (C) 88      (D) 98      (E) 168

17. Qual destas representações gráficas corresponde ao conjunto de todas as soluções da equação  $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ ?



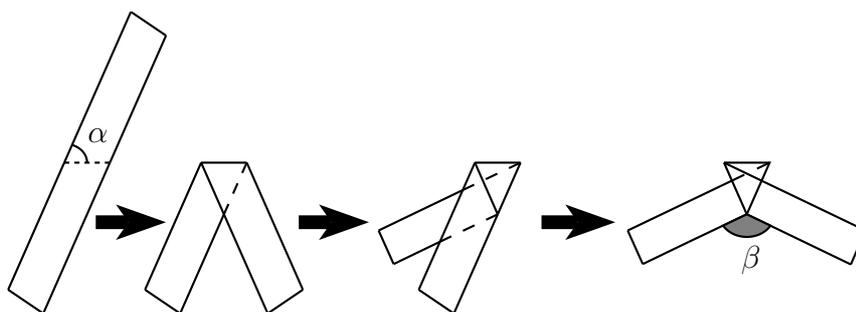
18. Cada estrela na expressão  $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$  é substituída ou por “+” ou por “×”. Seja  $N$  o maior valor possível da expressão que pode ser obtido dessa maneira. Qual é o menor factor primo de  $N$ ?

- (A) 2                      (B) 3                      (C) 5                      (D) 7                      (E) Outro número

19. Os comprimentos dos lados de um triângulo, em centímetros, são os números naturais 13,  $x$  e  $y$ . Sabendo que  $xy = 105$ , o perímetro do triângulo é

- (A) 35 cm                      (B) 39 cm                      (C) 51 cm                      (D) 69 cm                      (E) 119 cm

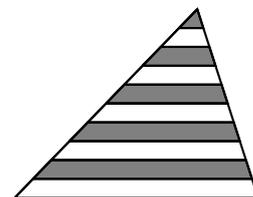
20. Uma tira de papel foi dobrada três vezes, como se pode ver na figura. Qual é a amplitude do ângulo  $\beta$ , sabendo que a amplitude do ângulo  $\alpha$  é  $70^\circ$ ?



- (A)  $140^\circ$                       (B)  $130^\circ$                       (C)  $120^\circ$                       (D)  $110^\circ$                       (E)  $100^\circ$

## Problemas de 5 pontos

21. Na figura ao lado, as linhas paralelas à base do triângulo dividem cada um dos outros dois lados do triângulo em 10 segmentos com o mesmo comprimento. Qual é a percentagem da área do triângulo que está a cinzento?



- (A) 42,5%      (B) 45%      (C) 46%      (D) 47,5%      (E) 50%

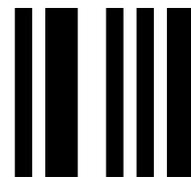
22. Na corrida anual da nossa cidade participaram 100 pessoas e não houve empates na classificação final. Foi perguntado a cada pessoa em que lugar tinha ficado e todas responderam com um número natural de 1 a 100. A soma de todas as respostas é igual a 4000. Qual o menor número de respostas falsas que os corredores podem ter dado?

- (A) 9                      (B) 10                      (C) 11                      (D) 12                      (E) 13

23. Um dado é lançado três vezes. Se o número obtido no terceiro lançamento for igual à soma dos números obtidos nos dois primeiros lançamentos, qual é a probabilidade de aparecer um 2 pelo menos uma vez?

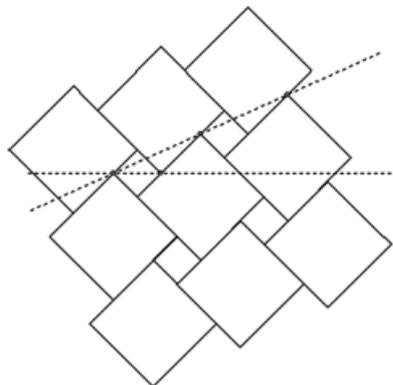
- (A)  $1/6$                       (B)  $91/216$                       (C)  $1/2$                       (D)  $8/15$                       (E)  $7/12$

24. Um código de barras, como mostra a figura, é composto por faixas alternadas de cor branca ou preta, começando e terminando sempre com uma faixa preta. Cada faixa (branca ou preta) tem largura 1 ou 2, e a largura total do código de barras é de 12. Quantos códigos diferentes existem, lendo sempre da esquerda para a direita?



- (A) 24                      (B) 132                      (C) 66                      (D) 12                      (E) 116

25. Uma parede está revestida com azulejos quadrados com dois tamanhos diferentes, como se vê na figura. A medida do comprimento dos lados do maior azulejo é  $a$  e a medida dos comprimentos dos lados do menor azulejo é  $b$ . As linhas a tracejado (horizontais e inclinadas) formam um ângulo com amplitude de  $30^\circ$ . A razão  $a : b$  é



- (A)  $(2\sqrt{3}) : 1$       (B)  $(2 + \sqrt{3}) : 1$       (C)  $(3 + \sqrt{2}) : 1$       (D)  $(3\sqrt{2}) : 1$       (E)  $2 : 1$

**26.** Os números naturais de 1 a 10 estão escritos no quadro 10 vezes. Os alunos de uma turma jogam o seguinte jogo: um aluno apaga 2 dos números e em vez deles, escreve no quadro a soma dos dois números menos 1; depois, outro aluno elimina 2 dos números e em vez deles escreve a sua soma menos 1 e assim sucessivamente. O jogo continua até que apenas fique um número no quadro. O número que fica é

- (A) menor do que 440                      (B) 451                      (C) 460  
(D) 488                      (E) maior do que 500

**27.** O valor da expressão

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)\cdots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

é igual a

- (A)  $2^{2048}$                       (B)  $2^{4096}$                       (C)  $3^{2048}$                       (D)  $3^{4096}$                       (E)  $3^{2048} + 2^{2048}$

**28.** A raiz quadrada de  $0,\overbrace{44\dots4}^{100 \text{ vezes}}$  é um número decimal com dízima infinita. Qual é o centésimo algarismo depois da vírgula?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 6

**29.** A função  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  verifica a seguinte condição  $2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$  para todo o  $x > 0$ . Então  $f(6)$  é igual a

- (A) 993                      (B) 1                      (C) 2009                      (D) 1013                      (E) 923

**30.** São escolhidos dois pontos  $P$  e  $Q$ , um em cada cateto de um triângulo rectângulo. As medidas dos comprimentos dos catetos são  $a$  e  $b$ , respectivamente. Sejam  $K$  e  $H$  as projecções ortogonais de  $P$  e  $Q$ , respectivamente, sobre a hipotenusa. Determine o menor valor possível para a soma  $\overline{KP} + \overline{PQ} + \overline{QH}$ .

- (A)  $a + b$                       (B)  $\frac{2ab}{a+b}$                       (C)  $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$                       (D)  $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$                       (E)  $\frac{(a+b)^2}{2ab}$