Canguru Matemático sem Fronteiras 2021

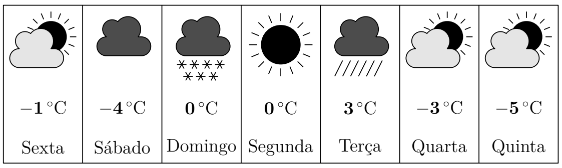
Categoria: Estudante Duração: 1h 30min
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: ____________

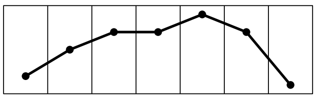
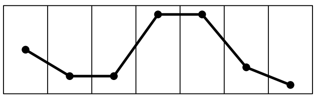
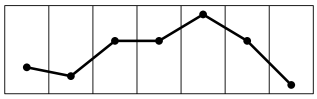
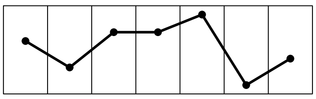
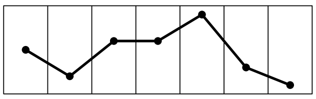
Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Numa aplicação que a Paula tem no telemóvel é possível ver o diagrama abaixo, com a previsão meteorológica e com as temperaturas máximas para os próximos sete dias.



Em qual das seguintes figuras está representado um possível gráfico da função que indica as temperaturas máximas?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

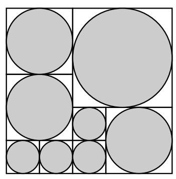
2. Quantos números inteiros existem no intervalo $]20-\sqrt{21}, 20+\sqrt{21}[$?

(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 12 **(E)** 13

3. Um cubo de aresta 1 foi dividido em dois paralelepípedos retos idênticos. Qual é a medida da área da superfície de cada um desses paralelepípedos?

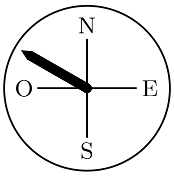
(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

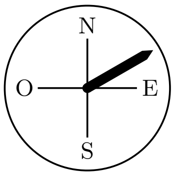
4. Um quadrado foi dividido em quadrados menores como se pode ver na figura ao lado. Em cada um desses quadrados menores está inscrito um círculo que foi pintado a cinzento. Que fração da medida da área do quadrado inicial está pintada a cinzento?

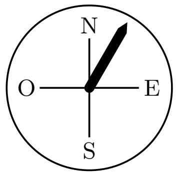


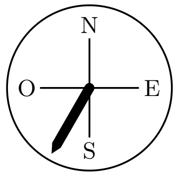
(A) $\frac{8\pi}{9}$ **(B)** $\frac{13\pi}{16}$ **(C)** $\frac{3}{\pi}$ **(D)** $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{\pi}{4}$

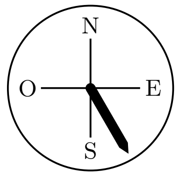
5. Depois da tempestade da noite passada, o mastro da bandeira da nossa escola ficou inclinado. Olhando de noroeste, o seu topo está à direita da base. Olhando de este, o seu topo também está à direita da base. Em que direção pode o mastro da bandeira estar inclinado?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

6. Uma folha retangular de papel tem comprimento x e largura y, com $x > y$. A folha pode ser enrolada para formar a superfície curva de um cilindro circular de duas maneiras diferentes. Qual é a razão entre o volume do cilindro mais longo e o volume do cilindro mais curto?

(**A**) $y^2 : x^2$ (**B**) $y : x$ (**C**) 1:1 (**D**) $x : y$ (**E**) $x^2 : y^2$

7. Seja $x = \frac{\pi}{4}$. Qual é o maior dos seguintes números?

(**A**) x^4 (**B**) x^2 (**C**) x (**D**) $\sqrt{x}$ (**E**) $\sqrt[4]{x}$

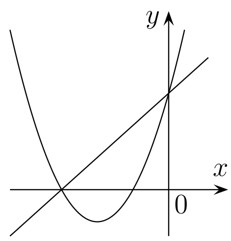
8. Quantos números com 3 algarismos, obtidos usando apenas os algarismos 1, 3 e 5, são divisíveis por 3? Note-se que os algarismos 1, 3 e 5 podem ser usados mais do que uma vez.

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 18 (**E**) 27

9. Qual é a medida da área do triângulo cujos vértices têm coordenadas (p, q), $(3p, q)$ e $(2p, 3q)$, sendo $p, q > 0$?

(**A**) $\dfrac{pq}{2}$ (**B**) pq (**C**) $2pq$ (**D**) $3pq$ (**E**) $4pq$

10. A parábola representada na figura ao lado tem uma equação da forma $y = ax^2 + bx + c$, para alguns números reais distintos a, b e c. Qual das seguintes equações pode ser uma equação da reta representada na figura?



(**A**) $y = bx + c$ (**B**) $y = cx + b$ (**C**) $y = ax + b$ (**D**) $y = ax + c$ (**E**) $y = cx + a$

Problemas de 4 pontos

11. Qual é a razão entre o número de divisores ímpares de 7! e o número de todos os seus divisores?

(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

12. Se $A =]0,\ 1[\cup]2,\ 3[$ e $B =]1,\ 2[\cup]3,\ 4[$, qual é o conjunto de todos os números da forma $a + b$ com a pertencente a A e b pertencente a B?

(**A**) $]1,\ 7[$ (**B**) $]1,\ 5[\cup]5,\ 7[$ (**C**) $]1,\ 3[\cup]3,\ 7[$

(**D**) $]1,\ 3[\cup]3,\ 5[\cup]5,\ 7[$ (**E**) Nenhum dos anteriores

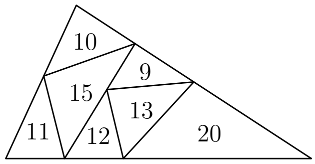
13. Quantos números naturais de três algarismos têm a propriedade seguinte: quando os algarismos do número são escritos por ordem inversa, o número de três algarismos obtido é superior em 99 unidades ao número original?

(**A**) 8 (**B**) 64 (**C**) 72 (**D**) 80 (**E**) 81

14. Os primeiros 1000 números inteiros positivos foram escritos numa linha por uma certa ordem e foram calculadas todas as somas de quaisquer três números adjacentes. Qual é o maior número possível de somas ímpares que podem ser obtidas?

(**A**) 997 (**B**) 996 (**C**) 995 (**D**) 994 (**E**) 993

15. Um triângulo foi dividido em triângulos mais pequenos, como se pode ver na figura ao lado. O número escrito em cada um dos triângulos mais pequenos indica o perímetro desse triângulo. Qual é perímetro do triângulo original?



(**A**) 31 (**B**) 34 (**C**) 41 (**D**) 62

(**E**) Nenhum dos anteriores

16. Sendo N um número inteiro positivo, $p(N)$ denota o produto dos algarismos de N. Por exemplo, $p(23) = 2 \times 3 = 6$. Qual é o valor de $p(10) + p(11) + p(12) + ... + p(99) + p(100)$?

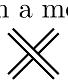
(**A**) 2025 (**B**) 4500 (**C**) 5005 (**D**) 5050

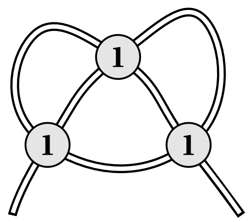
(**E**) Nenhum dos anteriores

17. Na tabela 5×5 da figura ao lado, a soma dos números em cada linha é igual à soma dos números em cada coluna. Há um número em cada quadrícula mas não estão todos visíveis. Qual é o número que está na quadrícula assinalada com o ponto de interrogação?

	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

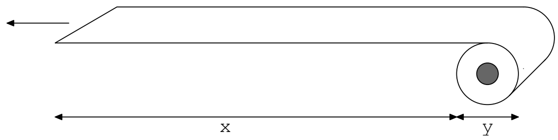
(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 18 (**E**) 23

18. Um pedaço de corda está sobre a mesa, mas está parcialmente coberto por três moedas, conforme se pode ver na figura ao lado. Sob cada moeda, a corda tem a mesma probabilidade de passar por cima de si mesma desta maneira  ou desta maneira .
Qual é a probabilidade de a corda ficar com um nó quando as pontas forem puxadas?

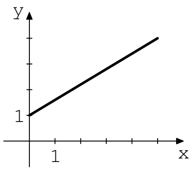
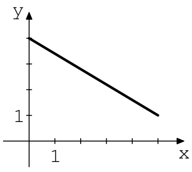
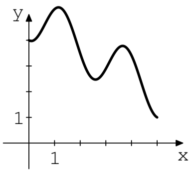
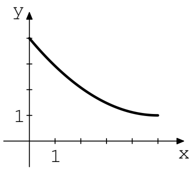
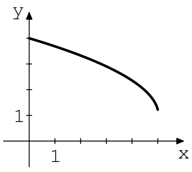


(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{8}$ (**D**) $\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{3}{8}$

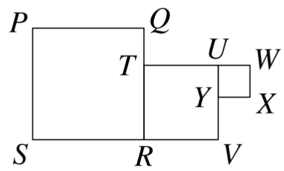
19. Um cachorrinho travesso agarra a ponta de um rolo de papel higiénico e sai a correr a uma velocidade constante.



Em qual das figuras abaixo está representado o gráfico da correspondência que melhor descreve a espessura y do rolo como uma função da parte desenrolada x?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

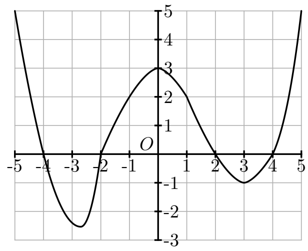
20. Na figura ao lado estão representados três quadrados, $[PQRS]$, $[TUVR]$ e $[UWXY]$, que têm os lados justapostos. Os pontos P, T e X estão sobre uma mesma reta. A medida da área de $[PQRS]$ é 36 e a medida da área de $[TUVR]$ é 16. Qual é a medida da área do triângulo $[PXV]$?



(**A**) $\frac{44}{3}$ (**B**) $\frac{46}{3}$ (**C**) 16 (**D**) $\frac{53}{3}$ (**E**) 18

Problemas de 5 pontos

21. Na figura ao lado está representado o gráfico de uma função real de variável real $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$. Quantas soluções distintas tem a equação $f(f(x)) = 0$?



(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

22. Os números 1, 2, 7, 9, 10, 15 e 19 foram escritos num quadro. Dois jogadores apagaram alternadamente um número de cada vez até que ficou apenas um número no quadro. A soma dos números apagados por um dos jogadores é o dobro da soma dos números apagados pelo outro jogador. Qual é o número que ficou no quadro no final?

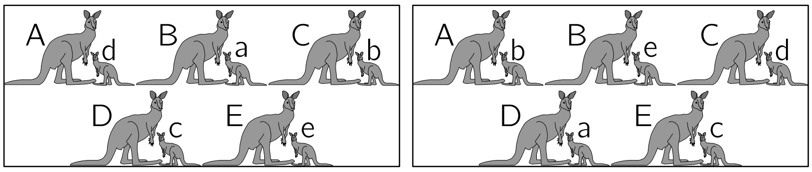
(**A**) 7 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 15 (**E**) 19

23. A função real de variável real f é tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ e $f(1) = 2$. Qual é o valor de $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$?

(**A**) 0 (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) 2 (**D**) 2020

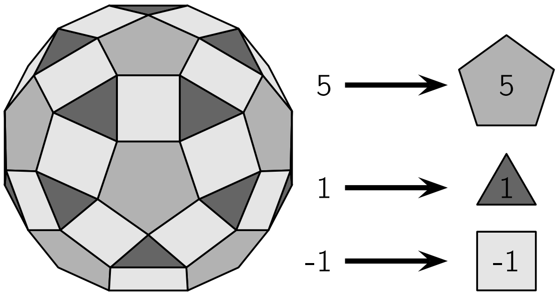
(**E**) Nenhum dos anteriores

24. Cinco cangurus designados por A, B, C, D e E têm um filho cada um. As crias estão designadas por a, b, c, d e e. Abaixo, na primeira foto do grupo, exatamente duas das crias estão ao lado da respetiva mãe. Na segunda foto, há exatamente três crias ao lado das respetivas mães. Quem é a mãe do canguru bebé a?



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

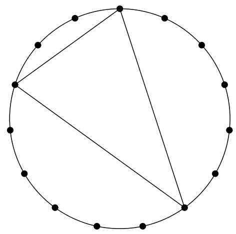
25. O sólido representado na figura abaixo tem 12 faces que são pentágonos regulares e as restantes faces ou são triângulos equiláteros ou são quadrados. Cada face pentagonal é rodeada por 5 quadrados e cada face triangular é rodeada por 3 quadrados. O João escreveu o número 1 em cada face triangular, o número 5 em cada face pentagonal e o número -1 em cada quadrado.



Qual é a soma de todos os números escritos nas faces do sólido?

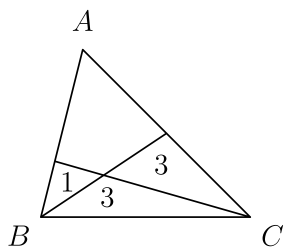
(**A**) 20 (**B**) 50 (**C**) 60 (**D**) 80 (**E**) 120

26. Numa circunferência foram representados 15 pontos equidistantes. Podem ser construídos triângulos unindo quaisquer três destes pontos. Consideramos dois triângulos como sendo iguais se forem congruentes, isto é, se um for obtido por uma rotação e/ou uma reflexão do outro. Quantos triângulos diferentes podem ser desenhados?



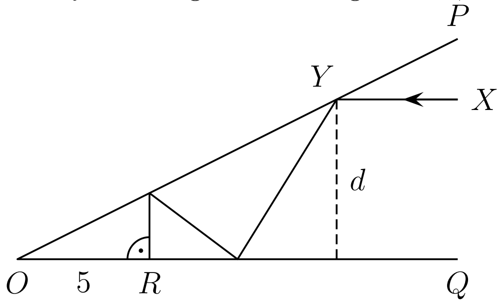
(**A**) 19 (**B**) 91 (**C**) 46 (**D**) 455 (**E**) 23

27. Um triângulo $[ABC]$ é dividido em quatro partes por dois segmentos de reta, como se pode ver na figura ao lado. As medidas das áreas dos triângulos menores são $1, 3$ e 3. Qual é a medida da área do triângulo $[ABC]$?



(**A**) 12 (**B**) 12,5 (**C**) 13 (**D**) 13,5 (**E**) 14

28. Os dois espelhos planos OP e OQ estão inclinados fazendo um ângulo agudo como se pode ver no diagrama abaixo, que não está à escala. Um raio de luz XY, paralelo a OQ, atinge OP em Y. O raio é refletido e atinge o espelho OQ, depois é refletido novamente e atinge OP. Finalmente, o raio é refletido pela terceira vez e atinge o espelho OQ em R segundo um ângulo reto, como se pode ver na figura abaixo.



Se $\overline{OR} = 5$ cm, qual é a distância d, em cm, do raio XY ao espelho OQ?

(A) 4 **(B)** 4,5 **(C)** 5 **(D)** 5,5 **(E)** 6

29. Para cada número real k, seja $M(k)$ o valor máximo de $|4x^2 - 4x + k|$ para x no intervalo $[-1, 1]$. Qual é o valor mínimo de $M(k)$?

(A) 4 **(B)** $\frac{9}{2}$ **(C)** 5 **(D)** $\frac{11}{2}$ **(E)** 8

30. Um certo jogo tem um vencedor quando um jogador obtém 3 pontos a mais do que o adversário. Dois jogadores **A** e **B** estão a jogar e, em determinado momento, o jogador **A** está 1 ponto à frente de **B**. Cada jogador tem uma probabilidade igual de ganhar 1 ponto. Qual é a probabilidade do jogador **A** ganhar o jogo?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{4}{5}$ **(E)** $\frac{5}{6}$