Postulado de Bertrand

O postulado de Bertrand establece que entre qualquer número natural e o seu dobro existe um número primo; mais precisamente: para todo o $n \geq 1$ existe um primo p com $n < p \leq 2n$. Esta afirmação foi conjeturada pelo matemático francês Joseph Bertrand em 1845 e demonstrada, uns anos mais tarde, pelo matemático russo Pafnuti Lvovitch Tchebychev. Em 1932, com 19 anos, Paul Erdős encontra uma demonstração completamente elementar. Erdős começa por mostrar que a conjetura é verdadeira para todo o $n \leq 4000$, exibindo uma sucessão crescente de 14 números primos começando em 2 e terminando em 4001 tais que nenhum é maior do que o dobro do anterior.

1. Que números são estes?

De seguida, a ideia de Erdős é provar que se existe $n \geq 4001$ que não satisfaz o postulado então o coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ seria (impossivelmente) demasiado pequeno. Erdős considera a função $f\colon [2, +\infty[\to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = \prod_{p \leq x} p$, onde p varia no conjunto dos números primos.

2. Mostrem que $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$.
3. Mostrem que $\frac{f(2m+1)}{f(m+1)} \leq \binom{2m+1}{m} \leq 4^m$, para qualquer inteiro m.
4. Mostrem que $f(n) \leq 4^{n-1}$, para todo o inteiro $n \geq 2$.
5. Seja p um primo. Mostrem que se $p^\alpha \mid \binom{2n}{n}$, com $\alpha \geq 0$, então $p^\alpha \leq 2n$.
6. Mostrem que $\binom{2n}{n} \leq \frac{f(2n)}{f(n)} \cdot \frac{f(2n/3)}{f(\sqrt{2n})} \cdot (2n)^{\sqrt{2n}}$.
7. Demonstrem o postulado de Bertrand.