

Relógios no Pólo Norte

E. Marques de Sá, DMUC, 2007

1 Relógios no Pólo Norte

A figura 1 ilustra uma montagem feita na sala de aula: um relógio de sol instalado no Pólo Norte terrestre. O gnómon está dirigido segundo a vertical do lugar, no Pólo Norte, pelo que está sobre o eixo de rotação da Terra, e o limbo é perpendicular ao gnómon, isto é, está na posição horizontal do lugar.

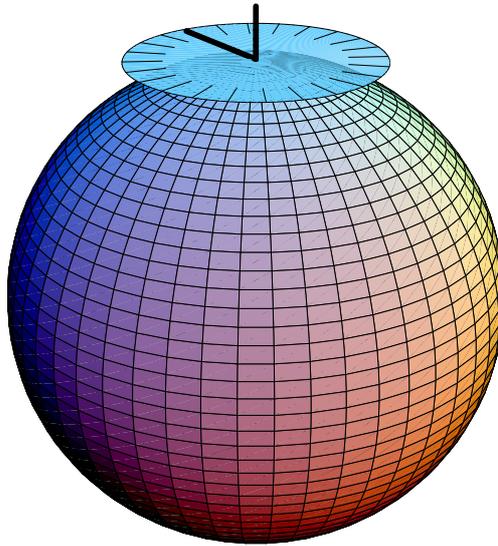


Figura 1: *Um relógio no Pólo Norte*

A Terra tem um movimento de rotação em torno do seu eixo, no sentido directo para quem a observa do exterior, de Norte para Sul. A imagem representa um momento do ano em que o Sol ilumina o Pólo Norte; estamos pois, num dia entre o equinócio de Março e o equinócio de Setembro¹.

O mostrador do relógio é um círculo paralelo ao plano equatorial, dividido em 24 ângulos ao centro, de 15° cada um. Os raios solares projectam a sombra do gnómon sobre o mostrador. Como o movimento de rotação da Terra é uni-

¹A imagem aparenta estar-se por alturas do solstício de 20-21 de Junho. É nesse dia que, no Pólo-Norte, os raios solares estão à sua máxima altura anual, que é de $23^\circ 27'$. Depois desse dia, a altura do Sol vai baixando, baixando, até atingir o horizonte no equinócio de 22-23 de Setembro.

forme², a sombra do gnómon vai varrendo o mostrador, uniformemente, no sentido oposto ao da rotação da Terra.

2 Relógios equatoriais

O próximo passo para se entender como funcionam os relógios solares é um pouco mais complicado: temos de explicar porque é que não precisamos de ir até ao Pólo Norte (ou ao Pólo Sul) para ver funcionar um relógio de sol. O facto importante a ter em conta é o seguinte: o Sol está a uma enorme distância da Terra, cerca de 150 milhões de quilómetros, o que se traduz em cerca de 11800 diâmetros terrestres. Portanto, *os raios solares que chegam ao Pólo Norte, ao Pólo Sul e a qualquer outro lugar da Terra são paralelos entre si.*

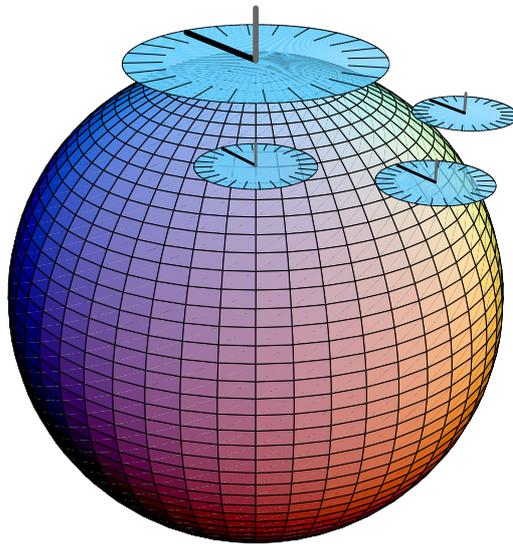


Figura 2: *Relógios equatoriais*

Portanto, se trasladarmos o relógio da figura 1 para qualquer lugar da Terra, esse relógio funcionará tal e qual como funcionaria se estivesse no Pólo Norte. Na figura 2 estão representados o relógio gigantesco da figura 1 e três outros, mais pequenos, colocados em lugares arbitrariamente escolhidos. Estes relógios, ditos *equatoriais* ou *equinociais*, estão orientados de modo a terem os limbos paralelos

²De facto, esse movimento apresenta pequenos desvios relativamente à uniformidade matematicamente 'pura', pois a Terra não é feita de materiais homogéneos, não é um sólido, não tem forma perfeita de revolução, muitos acidentes telúricos perturbam levemente a uniformidade da rotação, e o mesmo acontece por influências do exterior, de outros astros (a atracção lunar, por exemplo, é a primeira responsável pelas marés que, por atrito, vão travando milenarmente a rotação terrestre).

ao Equador e os gnómones paralelos ao eixo da Terra. Como os raios solares se representam por um feixe de rectas paralelas, em determinado instante todos os gnómones à face da Terra³ projectam sombras sobre os limbos equatoriais que são paralelas umas às outras, como ilustram as quatro sombras representadas na figura 2; os 4 relógios, *incluídas as sombras que determinam a hora*, são figuras semelhantes entre si.

3 Meio-dia

Como se numeram as 24 marcas horárias dum relógio equatorial? A resposta é: de 1 a 24 (ou de 0 a 23) crescendo *no sentido retrógrado*. Mas falta saber como se orienta o mostrador, *i.e.*, em que direcção devemos apontar a marca das 0 horas, ou a sua oposta das 12 horas. Por definição, *meio-dia solar verdadeiro* é, em determinado lugar da Terra, o momento do dia em que o plano meridiano do lugar passa pelo centro do Sol.⁴ Esse é o momento em que o Sol se encontra exactamente na direcção Sul desse lugar, e corresponde, com muito boa aproximação, ao da *culminação superior* solar, *i.e.*, o momento do dia em que o Sol atinge a sua maior altura quando observado desse lugar.

Convencionou-se, entre nós, orientar o relógio de sol de modo a que ao meio-dia solar verdadeiro a sombra esteja na marca 12. Cada lugar tem ‘o seu’ meio-dia solar verdadeiro; o de Coimbra, por exemplo, ocorre 4 minutos depois do da Covilhã, 33 minutos depois do de Greenwich, 4h 22min antes do de New York (tempos aproximados).

4 A declinação solar

Podemos considerar um sistema cartesiano com origem no centro da Terra e eixos coordenados colocados de modo a que o plano XOY seja o plano da eclíptica, com o eixo dos Z 's perpendicular a XOY e orientado de Sul para Norte. Os eixos OX e OY colocam-se em posições fixas relativamente a estrelas muito distantes, tão distantes que se possam considerar fixas. É neste sistema cartesiano, dito *geocêntrico*, que costumamos medir as posições dos corpos celestes, os seus movimentos, velocidades e acelerações. Observamos, por exemplo, que a Terra roda em torno do seu eixo, demorando cerca de 24 horas⁵ a dar uma volta inteira em torno de si própria; que o Sol se move em redor de nós, numa órbita em XOY , que é elíptica e tem o centro da Terra como foco, demorando cerca de 365.25 dias solares médios⁶ a dar uma volta inteira.

³Bem orientados e, claro, em lugares onde o Sol brilhe no céu.

⁴*Meridiano dum lugar L* é o plano que contém o eixo da Terra e passa por L . Esse plano é vertical e contém a direcção Norte-Sul do lugar. O meridiano de L está solidário com a Terra e, por isso, roda em torno do eixo terrestre e leva cerca de 24 horas entre duas passagens consecutivas pelo centro do Sol.

⁵O dia sideral tem 23.9344696 horas.

⁶O ano sideral dura 365.256363 dias solares médios.

Vamos fazer duas simplificações no problema de modelação, que não andam muito longe da verdade: admitimos que (1) o eixo de rotação da Terra está fixo no nosso sistema cartesiano, e que (2) o Sol descreve a sua órbita, chamada *Eclíptica*, com movimento circular uniforme. Sabemos que o eixo da Terra faz com o eixo dos z 's um ângulo $\varepsilon = 23^\circ 27'$, dito *obliquidade da Eclíptica*, que é o ângulo da Eclíptica com o nosso plano equatorial. Na figura, os eixos OX e OY

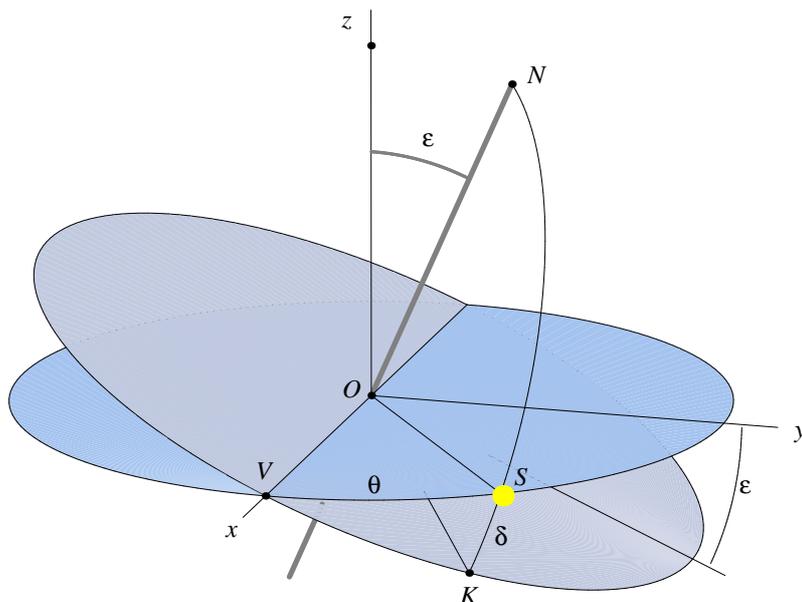


Figura 3: *Obliquidade e declinação solar.*

foram colocados de modo a que o plano YOZ contenha o eixo de rotação da Terra, ON . Há dois grandes círculos em destaque, que se consideram, para já, fixos no espaço sideral: o da Eclíptica, no plano XOY , e o do Equador terrestre, ortogonal a ON . O centro do Sol, S , desloca-se sobre a Eclíptica no sentido directo, com movimento uniforme, *i.e.*, o ângulo θ é proporcional ao tempo.⁷ O arco \widehat{NSK} é um quarto de circunferência centrado no centro da Terra, O . A medida de \widehat{KS} é, por definição, a *declinação solar*; é o ângulo que os raios solares fazem com o plano do equador e representa-se por δ , ou $\delta(t)$ se quisermos destacar a dependência relativamente ao tempo.

Quando o Sol passa no eixo dos x 's, *i.e.*, quando o seu centro toca o equador, a declinação é nula; esses momentos chamam-se *equinócios*. Na figura, V ,

⁷O Sol leva 365.25 dias para varrer um ângulo de 360° , o que dá uma velocidade angular de cerca de 1° por dia, mais precisamente, $.9856^\circ$ por dia.

chamado *ponto vernal*, é a posição do equinócio de 20-21 de Março e o seu oposto, $-V$ é o equinócio de 22-23 de Setembro. Os *solstícios* ocorrem, por definição, quando $\delta(t)$ atinge um extremo. Por convenção, $\delta(t)$ é positivo sempre que o Sol está a norte do plano equatorial, e é negativo quando o Sol está a sul desse plano. Assim, o máximo de $\delta(t)$ é ε e ocorre quando o Sol cruza o semi-eixo positivo dos y 's; o mínimo é $-\varepsilon$ que ocorre na posição oposta.

Fórmula para δ em função de θ . Vamos adoptar $[OS]$ como padrão de medida de comprimentos. Recorde-se a velha fórmula do produto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos(\angle \vec{u} \vec{v})$. Da figura resulta, então $\vec{OS} \cdot \vec{ON} = \sin \delta$. Mas é claro que $\vec{OS} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ e $\vec{ON} = (0, \sin \varepsilon, \cos \varepsilon)$. Portanto $\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \theta$, o que conduz a

$$\delta = \arcsin(\sin \varepsilon \sin \theta) \approx \arcsin(.398 \sin \theta).$$

Claro que isto só é válido para o modelo simplificado: eixo da Terra fixo e Sol em movimento circular uniforme em redor da Terra.

5 Como colocar o gnómon?

A resposta já foi dada logo no início, quando pensámos num relógio no Pólo Norte (ou Sul):

O gnómon deve colocar-se paralelamente ao eixo da Terra.

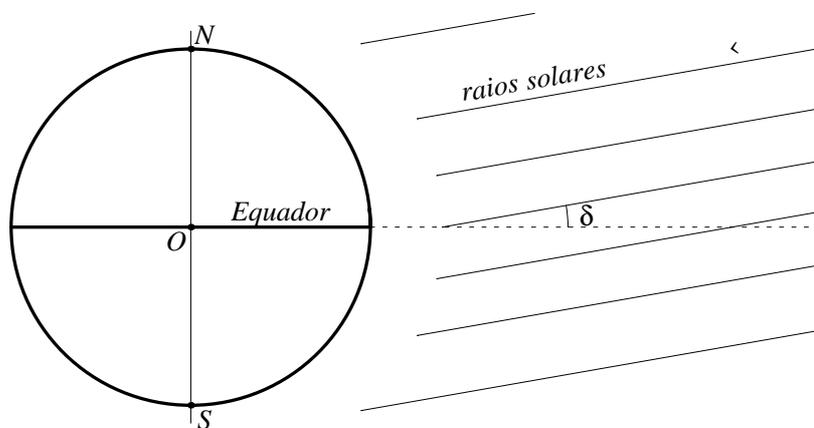


Figura 4: Declinação solar.

Vamos ver qual o inconveniente de não cumprir este princípio. A figura 4 resulta de um *zoom-in* muito potente sobre a origem O da figura 3, seguido de endireitamento do eixo de rotação e colocação dos raios solares paralelamente à folha de papel. A figura representa, à escala, uma janela de observação com

cerca de 13 000 km de altura; mesmo assim, os raios solares podem considerar-se paralelos entre si (para os efeitos práticos que nos interessam) pois o Sol está a uma distância de cerca de 11 800 vezes o diâmetro da Terra. Pensemos na evolução desta figura 4 à medida que o tempo passa: o desenho será o mesmo, com excepção do ângulo δ que os raios solares fazem com o Equador: esse ângulo varia no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ com periodicidade de um ano. Fixemos um plano meridiano qualquer (o da folha de papel) e um local L qualquer. Sempre que o Sol esteja sobre esse meridiano, hoje, amanhã ou noutro dia qualquer do ano, a hora solar em L é sempre a mesma, *i.e.*, a hora solar depende apenas do meridiano em que o Sol está, não depende da declinação.

Actividade. Arranje um candeeiro móvel com luz intensa. Coloque a alguma distância da fonte luminosa (cerca de 2 metros, para evitar sombras múltiplas) um gnómon espetado num limbo de corticite, segundo qualquer ângulo.

Segure o gnómon na posição vertical (imaginando-se no Pólo Norte, sendo essa a direcção do eixo terrestre). Desloque a fonte luminosa segundo uma trajectória vertical (ou qualquer trajectória plana que contenha o gnómon).

Depois coloque o gnómon numa posição não vertical. Desloque a fonte luminosa segundo uma trajectória vertical.

Compare com o caso anterior e tire conclusões.

Definição. Diz-se que um gnómon está *bem orientado* se em qualquer dia do ano, à mesma hora solar corresponde sempre a mesma direcção da sombra sobre o limbo.

Teorema. *Um gnómon estará bem orientado quando e só quando for paralelo ao eixo de rotação da Terra.*

6 Relógios de sol e relógios de pulso

Qual a relação entre a hora dada por um bom relógio de pulso⁸ e a hora dada por um bom relógio de sol? Um bom relógio de pulso divide o tempo de um ano solar em partes rigorosamente iguais, chamadas horas, minutos, segundos, etc., que são fracções do intervalo de tempo chamado *dia solar médio*. Um relógio de sol marca os dias e horas solares *verdadeiros*, os quais não têm sempre, ao longo do ano, a mesma duração medida pelo relógio de pulso: em Janeiro, por exemplo, os dias solares verdadeiros chegam a ter 25 segundos a mais que os dias do relógio de pulso, e em Julho acontece o contrário. Assim, durante os nossos

⁸Ou um bom relógio electrónico, ou um bom relógio atómico. . . ou um relógio ainda melhor construído com tecnologias que o futuro nos venha trazer.

meses de Inverno (de Verão no Hemisfério Sul), os relógios de sol atrasam-se um pouquinho (não mais de 25 segundos) em cada dia que passa, e fazem-no cumulativamente, chegando a ter cerca de 14 minutos de atraso (relativamente aos relógios de pulso) em meados de Fevereiro; depois compensam, começam a acelerar (o Sol, não eles, claro!), recuperam o atraso e chegam a 15 de Maio com 4 minutos a mais que os relógios de pulso; desaceleram e chegam aos 7 minutos de atraso em finais de Julho; voltam a celerar, chegando no início de Novembro a ter 16 minutos de avanço sobre o tal relógio de pulso que evolui com velocidade uniforme.

Há duas características do nosso movimento no espaço que justificam esta variabilidade de duração dos dias solares:

- a) A elipticidade da nossa órbita em torno do Sol,
- b) A obliquidade da eclíptica, *i.e.*, a inclinação (de $23^{\circ}27'$) do eixo de rotação da Terra relativamente à normal ao plano orbital.

As duas causas somadas produzem uma diferença, $H_{RS} - H_{RP}$, entre as horas dadas por um relógio de sol e um relógio de pulso.

(A expressão “equação do tempo” e o gráfico a seguir não foram abordados nas aulas, mas são coisas interessantes.)

Essa diferença chama-se *equação do tempo* que representamos por $E(t)$, onde t indica o dia do ano em que essa diferença é observada. Por exemplo, para $t = 0$ (correspondente ao dia 1 de Janeiro), $E(0) \approx -4$ minutos, *i.e.*, os relógios solares andam 4 minutos atrasados relativamente aos relógios de pulso. Para $t = 309$ (5 de Novembro), $E(309) \approx 16.5$, que é o máximo de $E(t)$. Podemos utilizar funções sinusoidais para modelação de $E(t)$, por exemplo:

$$E(t) \approx 8.040 \sin(0.01823 t + 2.948) + 10.512 \sin(0.0334 t - 2.594)$$

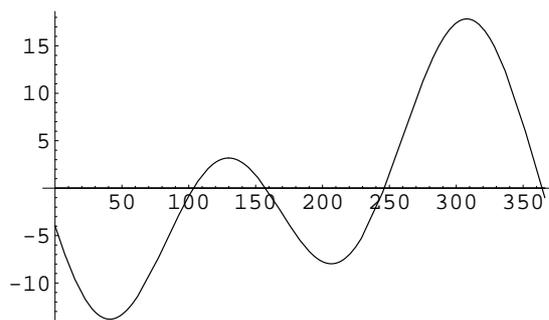


Figura 5: *Modelo da equação do tempo.*

A primeira sinusóide modela a causa a), a segunda modela a causa b).

Se, em determinado dia do ano, sincronizarmos um bom relógio de sol e um bom relógio de pulso, passado um ano sobre essa data eles acabam por bater certo nos tempos que indicam, mas no decorrer do ano eles medem coisas diferentes.

7 O analema

Uma actividade interessante é a construção dum *analema*. É “complicada”, pois exige muita dedicação e perseverança e demora um ano inteiro a concluir. . . mas o resultado é interessante e o que se aprende também é.

Pense num gnómon vertical fazendo sombra num plano horizontal.⁹ Fixa-se, no início da experiência, uma hora H que irá vigorar até ao fim do ano; uma boa escolha será as 12:33 de Inverno, *que passará a 13:30 quando mudar a hora civil logo após a Primavera*.¹⁰ Para plano horizontal pode escolher o chão duma sala onde bata o Sol às H horas do relógio de pulso; a extremidade do gnómon pode ser substituída por um ponto J dum caixilho de janela que a essa hora faça sombra numa zona acessível do chão. O ponto J deve manter-se fixo durante toda a actividade.

Interessa registar, com frequência, com lápis ou marcador, a posição do ponto de sombra que a extremidade do gnómon (o tal ponto J do caixilho) faz sobre o plano horizontal às H horas, *exactas!*, do relógio de pulso.¹¹ A posição desse ponto de sombra depende de dois factores: da declinação solar desse dia (que faz alongar ou encurtar as sombras) e da “equação do tempo” (que representa o avanço ou atraso da hora solar relativamente às H horas do relógio de pulso). O resultado vai ser uma feira de pontos que esboçam uma curva, o *analema*, cujo aspecto é o da seguinte figura:

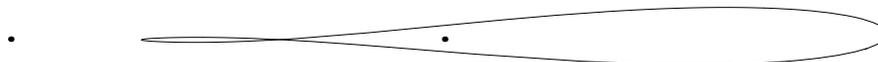


Figura 6: *Analema projectado no plano horizontal.*

Há dois pontos marcados na figura: o do lado esquerdo é a projecção vertical de J ; a distância desse ponto ao plano horizontal é a distância entre os dois pontos marcados na figura 6; a recta que eles definem terá a direcção norte-sul, caso a hora escolhida para os registos tenha sido 12:33.

Pode experimentar projectar um analema numa parede vertical, escolhendo adequadamente um ponto projectante J da sua janela virada a Sul. Se o ângulo da parede com a direcção norte-sul for “pequeno”, na ordem dos 15-20 graus,

⁹A verticalidade e a horizontalidade são, para o caso, irrelevantes. Mas ajudam a fixar ideias e facilitam as contas.

¹⁰Trata-se do meio-dia solar no meridiano de Coimbra. A escolha do meio-dia solar é irrelevante para a actividade, mas as figuras apresentadas mais adiante foram calculadas para essa hora.

¹¹Esse registo poderá ser feito sobre uma folha de papel fixada ao chão no local adequado.

digamos, a luz solar às 12:33 horas é rasante sobre a parede e o analema terá uma forma parecida com esta:

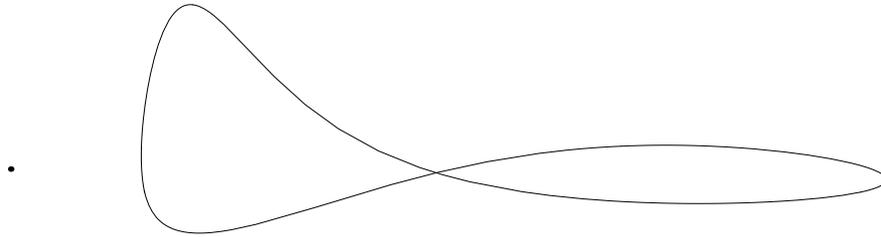


Figura 7: *Analema projectado com luz rasante sobre plano vertical.*

O analema surgirá, sobre a parede vertical, como esta figura rodada de 90° no sentido retrógrado. O ponto à esquerda é a projecção do ponto J sobre a parede, projectado paralelamente à direcção norte-sul.

Referências

- [1] Bob Urschel, *Analemma*, página digital <http://www.analemma.com>, 19 Julho 2005.
- [2] *Wikipédia, a enciclopédia livre*, “Equação do tempo”, página digital http://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%A3o_do_tempo, 26 de Maio 2007.