A Matemática
na Formação Inicial de Professores

Documento para discussão

Outubro de 2005

SEM/SPCE • Leonor Santos e Lurdes Serrazina
APM • Eduardo Veloso e Isabel Rocha
SPM • Carlos Albuquerque e Suzana Nápoles

A Matemática
na Formação Inicial de Professores

Documento para discussão

Pág. ***Índice***

0. Introdução

A formação inicial dos educadores de infância e dos futuros professores de Matemática dos ensinos básico e secundário, em particular no que respeita à sua componente matemática, tem uma importância determinante na qualidade da formação matemática dos jovens.

Embora reconhecendo a existência de um conjunto mais amplo de factores – relativos ao currículo, às condições materiais das escolas, e às outras componentes de formação profissional dos professores – que contribuem também de modo essencial para a formação, foi a constatação de problemas reais na formação matemática dos futuros professores, tanto nas Escolas Superiores de Educação como nas Universidades (licenciaturas em ensino da Matemática) que levou a Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação a dirigir um convite à Associação de Professores de Matemática e à Sociedade Portuguesa de Matemática no sentido da criação de um Grupo de Trabalho sobre esta problemática.

O objectivo deste grupo foi a elaboração de um conjunto de recomendações para a formação inicial de educadores de infância e de professores dos ensinos básico e secundário, no que respeita à componente matemática. Conjuntos análogos de recomendações têm sido publicados em outros países, nomeadamente nos Estados Unidos, também em resultado do trabalho cooperativo de diversas associações profissionais e científicas ligadas ao ensino da Matemática (ver *The Mathematical Education of Teachers*, publicado pela Conference Board of the Mathematical Sciences).

O presente documento constitui a versão para discussão das recomendações elaboradas no âmbito deste trabalho e dirige-se a todos aqueles que, de uma forma directa ou indirecta, se interessam pela formação de professores de Matemática. Está organizado em quatro partes. A primeira apresenta um conjunto de pressupostos, com a finalidade de estabelecer um quadro de referência para as recomendações. Estes pressupostos dizem, respectivamente, respeito à matemática; ao ensino da Matemática; e ao conhecimento profissional do professor.

Segue-se uma segunda parte onde se apresentam propriamente as recomendações gerais para a formação matemática dos futuros professores.

Na terceira parte, que trata mais especificamente da formação matemática de educadores de infância e dos professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico, e na quarta parte, que diz respeito aos professores do 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, são propostos alguns temas essenciais da sua formação e respectivas abordagens, em consonância e como concretização das recomendações enunciadas.

1. Pressupostos

1.1. Sobre a matemática

A natureza da actividade matemática

A matemática é uma ciência que se integra no património cultural da humanidade. A diversidade de aplicações da matemática faz com que não possa ser ignorado o seu papel de ferramenta ao serviço de outras ciências ou actividades profissionais.

Quando nos referimos à matemática pretendemos incluir todo um conjunto de actividades humanas que excedem largamente os produtos finais desta ciência, normalmente sintetizados em publicações (livros, artigos científicos, textos didácticos e de divulgação).

Para a caracterização do que é a matemática e da natureza da actividade matemática, tomou-se como referência a actividade dos investigadores em matemática. Embora não se deva esquecer que existem outras actividades com uma componente rica de matemática (ciências exactas, engenharia, economia, gestão, artes, etc.), só a investigação reúne todas as características da actividade em matemática enquanto ciência.

A actividade de investigação em matemática pode ser organizada em quatro categorias:

1 - Aprendizagem inicial

2 - Identificação de problemas ou questões

3 - Resolução de problemas

4 - Organização e apresentação de resultados

1 - Aprendizagem inicial

O trabalho em matemática é, em geral, feito a partir de desenvolvimentos matemáticos anteriores. Mesmo quando uma nova área é abordada existe um conjunto de conhecimentos, técnicas, hábitos de trabalho anteriores.

Esta aquisição inicial é feita de diversos modos: através da leitura de livros e artigos de forma activa (questionando o que se lê), através do estudo de exemplos e contra-exemplos, através da discussão com outros matemáticos e da assistência a cursos, palestras ou seminários. Com esta fase de aprendizagem inicial pretende-se a compreensão de conceitos e resultados e o domínio dos procedimentos.

2 - Identificação de problemas ou questões

A investigação em matemática faz-se tentando resolver problemas. Existem diversos processos que dão origem aos problemas. Um processo simples consiste em tentar generalizar resultados conhecidos. Outro processo consiste em tentar confirmar ou infirmar suspeitas desenvolvidas no estudo de casos particulares (indução). Quando o problema abordado se revela de difícil resolução uma estratégia consiste em considerar um problema simplificado ou parcial obtido com base no primeiro. Por vezes surgem noutras áreas questões que se revelam interessantes problemas matemáticos. O trabalho em área distintas da matemática revela por vezes estruturas semelhantes, o que pode dar origem a um trabalho de generalização.

3 - Resolução de problemas

A resolução de problemas é uma actividade complexa durante a qual podem ser usadas diversas estratégias.

A experimentação com estudo de casos particulares pode ajudar a ganhar uma visão intuitiva sobre os objectos em estudo. Esta intuição é muito importante no processo de invenção em matemática. Fazem-se por vezes cálculos longos. Fazem-se conjecturas. Estabelecem-se elos parciais em cadeias de raciocínio que se tinham previamente conjecturado. Ensaiam-se múltiplas ligações lógicas entre proposições intermédias. Por vezes existem períodos de concentração intensa e sustentada que se repetem antes que o resultado procurado seja atingido. A intuição sugere por vezes conjecturas que se tentam demonstrar ou contraditar através de contra-exemplos.

4 - Organização e apresentação de resultados

A resolução de problemas só fica efectivamente concluída depois da organização dos resultados e da sua validação pelos pares. Em matemática esta organização consiste no enunciado e demonstração de proposições ou teoremas. Alguns aspectos a destacar são a escolha dos conceitos a figurar nas definições, a escolha dos resultados a destacar em detrimento de outros que são considerados apenas auxiliares, a sequência lógica usada para demonstrar os resultados e a escolha das notações.

Nesta fase usa-se a lógica e um nível de formalização adequado para assegurar tanto quanto possível a certeza dos resultados demonstrados. Existe liberdade na estruturação, procurando a melhor organização para o fim em vista: pode ser a compreensão do que se estuda, o ensino ou a aplicação noutras áreas. O processo de axiomatização ou de reorganização pode ser uma área específica de investigação.

A fase final deste ciclo (sem prejuízo de um eventual reinício) consiste na apresentação dos resultados. Esta apresentação raramente segue a sequência formal de demonstração. Há necessidade de enquadrar o problema que se resolveu. A introdução de conceitos pode ser feita através de exemplos. Nas demonstrações é por vezes conveniente esboçar as ideias fundamentais e depois dar os detalhes, eventualmente deixando aspectos muito técnicos e pouco interessantes para um apêndice. A redacção é adaptada à ocasião e aos destinatários.

Finalmente o trabalho é submetido para apreciação. Com frequência esta fase dá origem a uma revisão da apresentação dos resultados e, por vezes, a uma alteração do trabalho por sugestão dos revisores.

Características da matemática como ciência

Embora a apresentação dos resultados em matemática seja normalmente feita sob a forma de uma cadeia dedutiva, a matemática enquanto ciência não é puramente dedutiva. Um teorema não se demonstra pegando num conjunto de hipóteses deduzindo ordenadamente as conclusões. Esta é apenas a apresentação final.

A matemática é uma ciência exacta mas apenas na medida em que procura deduzir conclusões seguras a partir de premissas bem definidas. A possibilidade de definir pontos de partida diferentes permite chegar a construções matemáticas diferentes e até aparentemente contraditórias.

A matemática envolve simultaneamente diversas faculdades humanas que podem parecer incompatíveis. Por um lado envolve imaginação e liberdade criativa, quer na procura de novos problemas, quer na procura de soluções. Por outro lado estrutura-se com base na força dos raciocínios e das demonstrações, podendo dar lugar a uma formalização de grande beleza. Este processo não tem um sentido único nem é necessariamente uma forma de encerrar os assuntos: a construção de uma teoria formal pode ser criativa e fonte de novos problemas.

A matemática não descreve necessariamente a realidade física embora a adequação à realidade física seja historicamente um dos mais poderosos estímulos ao seu desenvolvimento.

Desde sempre a matemática tem estado ligada à arte, com especial destaque para as artes visuais e para a música. Com o surgimento da ciência moderna a matemática passou a desempenhar um papel central como linguagem e estrutura para a construção de modelos em ciência. Este papel começou na física e nas ciências naturais mas estendeu-se hoje a quase todas as ciências, incluindo partes das ciências sociais e humanas.

Hoje são muitas e muito diversas as áreas de trabalho em matemática. Embora haja uma base metodológica comum e uma base unificadora com a teoria de conjuntos, é possível por vezes desenvolver trabalho numa área com pouco conhecimento de outra área.

1. Pressupostos

1.2. Sobre o ensino da matemática

Matemática de qualidade para todos os alunos

Todos os alunos dos ensinos básico e secundário, independentemente das suas opções quanto ao prosseguimento de estudos, têm direito, ao longo da escolaridade, a uma educação matemática de qualidade que lhes permita:

- *adquirir uma compreensão progressiva da natureza da matemática, dos seus processos e características como ciência, e apreciar a sua beleza;*
- *compreender e apreciar o poder das aplicações da matemática, da sua relevância na sociedade contemporânea e do seu papel histórico no progresso da civilização;*
- *desenvolver, na medida das suas necessidades e interesses, capacidades matemáticas para a vida quotidiana, para o exercício de uma cidadania plena e para prosseguir estudos superiores, em particular para adquirir uma formação profissional.*

O enunciado anterior pretende em primeiro lugar salientar que nos estamos a referir ao ensino da matemática para todos os alunos dos ensinos básico e secundário e não apenas para aqueles que pretendem seguir estudos superiores – por exemplo matemática, engenharia, ciências da natureza – que possam implicar uma preparação matemática mais específica.

Além disso, a defesa de uma *educação matemática para todos*, feita neste princípio, não equivale a uma proposta de matemática escolar uniforme, e reduzida a uma espécie de "máximo divisor comum", durante toda a escolaridade não superior. Pelo contrário, a referência a uma educação matemática *de qualidade* para todos significa que, não obstante diferenças físicas, de personalidade e meio social de origem, a todos os alunos deve ser dada oportunidade e apoio para uma aprendizagem com sucesso da matemática ao longo de toda a escolaridade, de modo a que as referidas diferenças não originem uma diminuição das expectativas quanto ao percurso escolar e que cada um possa desenvolver no máximo grau as suas potencialidades próprias.

Assim, o princípio anterior implica entre outras as seguintes consequências:

- os alunos que revelem, em qualquer ponto do seu percurso escolar, especial gosto e aptidão para a matemática, devem ter oportunidade e apoio para desenvolver essa aptidão, embora sempre de acordo com um princípio de inclusão escolar e não de exclusão ou criação de turmas ou grupos de "superdotados";
- embora todos os alunos que estejam no ensino secundário (10º ao 12º anos de escolaridade) devam ter uma matemática comum, devem ser dadas oportunidades aos alunos que o desejem – e tenham por exemplo a intenção de prosseguir estudos superiores envolvendo maior preparação matemática– de adquirir essa preparação, através da oferta de disciplinas de opção ao longo dos três anos do secundário.

É ainda de salientar uma outra implicação importante que resulta da formulação anterior: o ensino da matemática deve proporcionar não apenas a aprendizagem da matemática no sentido mais habitual (conhecimento dos factos e procedimentos matemáticos e aquisição de capacidades relativas à sua aplicação na resolução de problemas e realização de investigações e projectos) mas também uma aprendizagem *sobre a matemática*. Com efeito, a matemática tem uma natureza própria, como ciência, que a distingue de outras actividades humanas e em particular das outras ciências. A compreensão aprofundada dessa natureza, em todos os seus aspectos, implica uma familiaridade com a trabalho e a investigação em matemática que apenas pode ser adquirido pelos matemáticos profissionais ao longo dos anos. No entanto, aspectos importantes e distintivos dessa natureza podem ser apreendidos progressivamente numa experiência matemática rica, em 12 anos de escolaridade – nomeadamente o papel e o valor das definições, o papel central da demonstração matemática, o tipo de relações entre a matemática e o "mundo real", a importância dos processos de generalização e abstracção –, bem como certos hábitos de pensamento característicos da matemática – nomeadamente a tendência para visualizar, para procurar invariantes, para integrar experiência e dedução, para construir algoritmos e raciocinar acerca deles, e para raciocinar por continuidade.

Na medida em que este objectivo relativo ao conhecimento da natureza característica da matemática for explicitamente assumido nos currículos e interiorizado pelos professores, poder-se-á esperar que progressivamente seja vencida a profunda ignorância que existe na nossa sociedade, mesmo entre as camadas mais cultas, sobre a ciência matemática.

O facto de no enunciado deste princípio aparecerem separados o objectivo "compreensão progressiva da natureza da matemática" (e também os objectivos relativos à relevância da matemática na sociedade contemporânea e do seu papel histórico) e os objectivos relativos à aquisição de capacidades matemáticas propriamente ditas não significa que eles correspondam a *partes diferentes e complementares* do currículo ou da *matéria a ensinar.*

Na realidade, não é possível "compreender a natureza da matemática" sem actividade matemática e é dessa mesma actividade que resulta o poder matemático dos alunos.

Aprendizagem e experiência matemática

A base da aprendizagem matemática é a experiência matemática. Em consequência, o papel fundamental do professor de matemática consiste em:

- *procurar ter em conta as experiências anteriores dos alunos que possam constituir um ponto de partida para a sua aprendizagem matemática;*
- *propor actividades com significado que, de acordo com a maturidade dos alunos, lhes proporcionem uma experiência matemática conducente aos objectivos enunciados no princípio I;*
- *ajudar os alunos a reflectir sobre a sua própria experiência.*

Este segundo princípio fundamenta-se nos resultados de investigações em educação que mostram que *sem actividade não há aprendizagem*. Essa actividade pode assumir muitas formas, e quando Lebesgue afirmava que "o melhor que um professor podia fazer nas suas aulas era pensar à frente dos seus alunos", presumia certamente que *esse modo de exposição* do professor desencadeava uma intensa actividade mental dos alunos. Todos conhecemos *outros modos de exposição* do professor que não provocam qualquer actividade da parte dos alunos. No entanto, se não tem valor educativo a exposição do professor que deixa mentalmente passivos os alunos, também não o tem a actividade dos alunos que se basta a si própria e que não é objecto de reflexão posterior.

Este segundo princípio refere também o papel fundamental do professor, que não deve ser identificado como o do *emissor de matéria para o receptor aluno*, mas como gestor da sucessão de experiências matemáticas do aluno. Essa gestão exige uma atenção permanente na escolha das propostas de actividades, por forma que aquela sucessão de experiências corresponda e conduza aos objectivos procurados. Daí a dificuldade do papel do professor, pois ele próprio tem que possuir um conhecimento matemático e um conhecimento sobre a matemática que lhe permita fazer essas escolhas.

O que são as *actividades com significado* referidas neste princípio? É fácil identificar actividades que em geral – ou seja, excepto para um reduzido número de alunos que as tomam como um desafio – não têm *significado*: por exemplo, uma sucessão de exercícios repetitivos, apenas para adquirir rapidez na execução de um determinado procedimento. Para a maior parte dos alunos, a repetição desse tipo de exercícios pode ter (e tem tido) consequências desastrosas relativas à rejeição da própria matemática. No entanto, isso não quer dizer que esses mesmos alunos não aceitem desenvolver esforços, e fazer cálculos ou outros tipos de procedimentos matemáticos, quando fazem parte de uma *actividade com significado.* Isto acontece, nomeadamente, quando aqueles cálculos ou procedimentos estão incluídos num projecto com interesse (pela curiosidade intelectual que desperta, por conduzir a um produto, construção ou aplicação concreta, ou por ter como resultado uma exposição na escola, ou ...), ou simplesmente quando constituem parte de um verdadeiro desafio intelectual. Do ponto de vista educativo, este último aspecto é muito importante, pois é fácil constatar como os mais jovens gostam de *adivinhas*, e como deixam na sua maior parte de gostar com o tempo, depois de alguma escolarização. Dieudonné dizia que a maior parte da matemática provinha de "devinettes" e não tinha sido provocada pelas suas aplicações.

Recursos e materiais para o ensino da matemática

A formação dos professores de Matemática deve prepará-los para um ambiente escolar em que professores e alunos tenham ao seu dispor, para além dos suportes habituais de conteúdos matemáticos incluídos na biblioteca e na mediateca, um conjunto de recursos e materiais, nomeadamente:

- *materiais manipuláveis dos mais diversos tipos, que permitam a utilização e a construção de modelos matemáticos próprios para a visualização e compreensão de conceitos básicos da matemática, nomeadamente em aritmética, geometria, e álgebra;*
- *a possibilidade de utilizar as oficinas da escola na construção de modelos e mecanismos matemáticos;*
- *o acesso em banda larga aos recursos da Internet;*
- *o acesso a calculadoras, computadores e a software dedicado ao ensino da matemática, como por exemplo o software para geometria dinâmica e os manipuláveis virtuais (applets Java e outros)*

A história da matemática mostra amplamente como a construção da matemática como ciência nunca esteve reduzida à escrita de símbolos na areia, com uma vara, ou a papel e lápis. Da mesma forma a aprendizagem da matemática não pode estar limitada a estes instrumentos, mesmo que lhes associemos o compasso, a régua e o transferidor.

Desde os primeiros anos de escolaridade até ao fim do secundário, o professor deve propor aos seus alunos a manipulação, visualização e construção de modelos matemáticos dos mais variados tipos. As finalidades, contextos e propostas serão naturalmente diferentes conforme a maturidade dos alunos. Nos primeiros anos, os objectivos de Froebel no seu primeiro jardim-escola mantêm-se – a experiência de múltiplas percepções visuais e tácteis, a aquisição de uma familiaridade com objectos matemáticos básicos que lhes permitam mais tarde desenvolver e aprofundar a percepção de relações e correspondências espaciais, recorrendo à sua imaginação assim enriquecida. A manipulação dessas formas básicas não é uma "brincadeira" que terminará quando se entrar na "matemática a sério", é simplesmente o começo de uma prática de observação e visualização que irá continuar e tornar-se mais sistemática e produtiva ao longo da experiência matemática posterior, mesmo a nível da investigação feita por matemáticos profissionais, como tantos casos comprovam.

Estão hoje disponíveis variados tipos de materiais comerciais para a construção de poliedros, e de padrões ou pavimentações com polígonos, por exemplo. O ensino da matemática deve recorrer sempre que possível a esses materiais. Além disso, materiais baratos, como por exemplo papel, permitem – no caso do papel por simples dobragens – tratar diversos temas da matemática.

A história mostra como a construção e estudo de mecanismos de carácter matemático interessou e ocupou tantos matemáticos. Os exemplos são muito conhecidos e de todas as épocas – o instrumento de bronze para resolver a duplicação do cubo que Eratóstenes de Cirene dedicou ao Rei Ptolomeu, os teoremas de Arquimedes descobertos por meios mecânicos, as réguas de Descartes, as hastes de Napier, as máquinas de calcular de Pascal e de Leibnitz, e as dezenas de mecanismos matemáticos do séc. XIX, como o inversor de Peaucellier ou o trissector de Mac Laurin. Trata-se de um campo ilimitado de projectos possíveis, onde a associação da matemática com a educação tecnológica, a educação visual e a física são muito prometedoras. A construção e o estudo de máquinas ou mecanismos matemáticos, como parte importante do ensino da matemática, tem sido muito desenvolvida e experimentada com êxito em Itália, por exemplo.

As calculadoras e computadores são ferramentas essenciais no ensino e aprendizagem da matemática pressupostos nestas recomendações. Supõe-se assim que todos os alunos têm acesso a estas tecnologias, as quais permitem e facilitam a visualização de conceitos e ideias matemáticas, a organização e análise de dados em grande número e podem ser utilizadas, sob a orientação de professores com formação adequada, como instrumentos eficientes de cálculo numérico e mesmo simbólico.

A utilização de calculadoras e computadores pode ajudar os alunos a aprender matemática, ao enriquecer a quantidade e qualidade das suas explorações nos mais diversos domínios, desde a geometria com os programas de geometria dinâmica até à teoria dos números com uma simples folha de cálculo. Com o auxílio da tecnologia, um professor conhecedor pode propor aos seus alunos tarefas que exemplificam processos matemáticos importantes, como por exemplo a modelação de fenómenos físicos, que de outro modo seriam impossíveis ou muito limitadas.

A tecnologia tem deste modo influência na construção do próprio currículo, podendo influir de modo positivo não só no modo como se ensina mas também nos conteúdos e no nível em que podem ser ensinados – com o seu poder de analisar e experimentar múltiplas hipóteses e de trabalhar com grandes números ou grandes quantidades de dados, podem facilitar que a aprendizagem se prolongue das rotinas para a conceptualização, dos casos isolados para a generalização e a abstracção, portanto numa direcção própria do pensamento matemático.

A tecnologia não substitui a compreensão de factos básicos, nem o esforço mental dos alunos, nem o professor. Mas na presença deste tipo de ferramentas os alunos podem prosseguir mais facilmente até certas tarefas cognitivas de ordem superior – resolução de problemas, reflexão, raciocínio, e tomadas de decisão sobre estratégias a seguir numa exploração matemática.

1. Pressupostos

1.3. Sobre o conhecimento profissional do professor

Um professor de Matemática na sua prática lectiva necessita de diferentes tipos de conhecimento:

- conhecimento relativo à natureza da matemática;
- conhecimento relativo aos conteúdos matemáticos;
- conhecimento relativo aos objectivos curriculares;
- conhecimento relativo à forma de apresentar as ideias de modo a que sejam aprendidas pelos alunos;
- conhecimento relativo à forma como os alunos compreendem e aprendem os conteúdos matemáticos;
- conhecimento relativo à gestão da sala de aula.

O professor tem que ter conhecimentos relativos aos conteúdos matemáticos e à natureza da matemática, de modo a sentir-se à vontade quando a ensina, ser capaz de relacionar ideias particulares ou procedimentos dentro da matemática, de conversar sobre a matemática e de explicitar os juízos feitos e os significados e razões para certas relações e procedimentos. Para isso o professor tem de ter uma compreensão profunda da matemática, da sua natureza e da sua história, do papel da matemática na sociedade e na formação do indivíduo.

Mas a Matemática está inserida num currículo e ela própria tem um currículo. O professor tem de ter conhecimento do currículo, que inclui o conhecimento relativo aos objectivos curriculares e o conhecimento relativo à forma de apresentar as ideias para poderem ser ensinadas. Deve ainda ter um conhecimento profundo de todo o currículo matemático elementar para que possa decidir o que trabalhar e estar preparado para aproveitar sempre uma oportunidade para rever e relacionar conceitos cruciais que os alunos estudaram anteriormente, saber o que os alunos vão aprender a seguir, e aproveitar as oportunidades para estabelecer as bases para essa aprendizagem.

Ao professor cabe organizar as tarefas a realizar e coordenar o desenvolvimento das actividades dos alunos tendo em conta que aprender matemática é um processo de construção activa por parte dos alunos, e que as crianças ao entrar na escola têm já conhecimentos informais de matemática que não podem ser ignorados e que o aluno atribui significado às coisas a partir daquilo que já sabe, de toda a sua experiência anterior, e não necessariamente a partir da lógica interna dos conteúdos ou do sentido que o professor lhes atribui. O professor tem de ter conhecimento relativo à forma como os alunos compreendem e aprendem os conteúdos matemáticos, que passa por perceber que os alunos podem aprender matemática com compreensão, desde que envolvidos em tarefas adequadas e num contexto de sala de aula em que as interacções professor/aluno e aluno/aluno sejam valorizadas. A forma como o professor gere a sua sala de aula está intimamente ligada à forma como encara a aprendizagem, onde a natureza das tarefas tem um papel importante, mas não menos importante é a forma como ele organiza a aprendizagem e os papéis que reserva a si próprio e aos alunos. Um ambiente de aprendizagem estimulante passa por conseguir o envolvimento dos alunos nas tarefas propostas. Este está relacionado com a organização do trabalho e as interacções que se promovem nomeadamente entre os alunos, que devem sentir que o professor considera a sua participação importante não lhes dando apenas breves segundos para darem uma resposta fechada que é catalogada de certa ou de errada.

O professor é responsável pela organização do trabalho na sala de aula. Na formação inicial o futuro professor deve consciencializar que diferentes alternativas conduzem a situações de aprendizagem distintas, sendo esta variedade essencial para a aprendizagem. Por exemplo, o trabalho pode começar por ser individual ou a pares, alternando com discussões envolvendo toda a turma ou pode começar por ser um trabalho desenvolvido em pequenos grupos alargando depois a uma discussão com toda a turma, ou ainda por ser o professor a fazer uma exposição para toda a turma.

Assim, o professor deve ter conhecimentos de matemática, de história da matemática, de didáctica de matemática, de pedagogia (nomeadamente ao nível da gestão curricular), de psicologia da aprendizagem, de sociologia da educação, de história e filosofia de educação. Estes conhecimentos não são dissociáveis e o professor tem de saber integrá-los. O professor deve ainda possuir instrumentos de análise e de reflexão sobre a sua prática, sobre o seu significado, sobre o tipo de conteúdos a trabalhar, sobre como ensiná-los e sobre como os seus alunos os aprendem.

Quando nos referimos à formação inicial de professores de Matemática é preciso ter em conta que os futuros professores quando chegam à sua formação inicial possuem um modelo implícito do que é ensinar matemática, adquirido durante a sua escolarização, assim como um conhecimento didáctico vivido durante a sua experiência como alunos. É sabido que a concepção que o professor tem sobre a matemática e o seu ensino constitui um forte condicionador da forma como ele vai ser capaz de organizar e conduzir a actividade matemática dos seus alunos.

A formação em matemática e em educação matemática deve fazer com que todos os que estão a aprender experimentem a matemática como uma ciência em evolução através do envolvimento em resolução de problemas e em actividades de natureza investigativa. Deste modo poderão experimentar uma forma de fazer matemática que questione as suas concepções sobre a disciplina e o seu ensino, que foram desenvolvendo ao longo da sua própria escolaridade. Dado que estas concepções são fundamentalmente de carácter tácito, um passo imprescindível para provocar a sua alteração é promover a sua explicitação. Por outro lado, o facto de ser um conhecimento implícito, muito ligado a vivências pessoais dos sujeitos, determina que seja um conhecimento muito persistente, dificilmente modificável. A consideração das concepções dos professores ao longo do processo constitui portanto um princípio formativo iniludível. A formação tem não só de procurar explicitar o conhecimento tácito dos futuros professores mas tentar que esse conhecimento evolua mediante processos reflexivos que se apoiam na resolução de problemas.

Tendo em atenção os diferentes tipos de conhecimento mencionados, a formação inicial do professor de Matemática deve contemplar, para além da formação específica em matemática, as outras áreas acima mencionadas. No entanto, as recomendações deste documento referem-se apenas ao conhecimento relativo à natureza da matemática e aos conteúdos matemáticos.

2. Recomendações gerais para a formação matemática dos futuros professores

Apresentam-se de seguida um conjunto de recomendações gerais que procuram nortear a formação matemática dos futuros professores e educadores, qualquer que seja o seu nível de ensino.

Recomendação 1. A formação matemática deverá providenciar uma compreensão profunda da matemática que se vai ensinar.

É certamente consensual a ideia de que qualquer professor de Matemática deve saber mais matemática do que aquela que vai ensinar. Mas será que melhorar a formação matemática dos futuros professores é equivalente a aumentar o número de disciplinas de matemática e o tempo dedicado a esta componente de formação? Ou, por outras palavras, uma lógica de quantidade é por si só garante de um ensino de qualidade? A questão é bem mais complexa. Passa por conjugar quantidade e qualidade, isto é, há que atender ao que se entende por uma boa formação matemática, uma formação que favoreça o desenvolvimento de um conhecimento matemática para o ensino.

O conhecimento matemático necessário a um professor de Matemática carece de particularidades específicas. Enquanto um conhecimento matemático implícito pode ser suficiente para cada pessoa, não o é para quem tem de ensiná-la aos outros. Enquanto utilizador da matemática para consumo próprio se pode fazer recurso ao saber matemático sem em cada momento nos questionarmos porque o fazemos deste ou daquele modo, quando se ensina matemática há que não só saber usar a matemática como igualmente ter presente em cada momento os significados e fundamentos dos conhecimentos em presença. Um nível adequado de conhecimento para o ensino envolve sermos capazes de falar sobre matemática, não apenas descrevendo os passos/etapas de um dado procedimento, por exemplo, um algoritmo, mas também explicando o significado e as razões para esse mesmo procedimento. Conhecimento explícito matemático é mais do que enunciar uma dada preposição ou procedimentos, envolve sabermos as razões e as relações, sermos capaz de explicar a outros por que é assim, bem como relacionar ideias particulares ou processos.

Assim, saber matemática para ensiná-la passa por compreender matemática. Compreender matemática no sentido a que aqui nos referimos envolve um conhecimento profundo: (i) dos conceitos, dos procedimentos e das estruturas matemáticas; (ii) da unidade da matemática; e (iii) dos tópicos da matemática elementar.

Conhecer um conceito profundamente passa, por exemplo, por conhecer as suas diversas definições, formas de representação e evolução histórica. Não basta apenas saber os passos de um procedimento e a sua aplicação correcta mas é igualmente necessário conhecer a justificação desse procedimento, a sua origem histórica e outros procedimentos equivalentes, em particular utilizados noutras civilizações, quando for o caso.

Assumindo que o conhecimento matemático não é constituído por uma listagem sequencial de tópicos separados entre si, nem uma listagem de regras e definições, ter uma compreensão profunda da unidade matemática, isto é, das conexões entre conceitos pertencentes aos diferentes temas, passa por se ter uma visão integrada dos conteúdos matemáticos, recorrendo a um mesmo conceito em diversos contextos matemáticos e fazer recurso a diversas perspectivas ou abordagens. Só esta compreensão poderá permitir, no futuro, ao professor adaptar o ensino aos seus alunos, torná-lo flexível e adequado.

O professor não poderá ajudar os outros a aprender matemática quando ele próprio não possui a compreensão profunda que acabamos de explicar. Cabe à formação matemática dos futuros professores garantir o desenvolvimento de tal compreensão.

Recomendação 2. A formação matemática deverá providenciar uma compreensão profunda da natureza da própria matemática.

As decisões que os professores tomam na sua prática lectiva estão interrelacionadas com diversos aspectos do seu conhecimento matemático. Já anteriormente foi referida a importância da componente compreensiva desse mesmo conhecimento. Mas outros aspectos são igualmente determinantes. Em particular, as concepções que os professores têm sobre a matemática é evidenciada largamente na investigação como uma componente que marca e informa o ensino da matemática. Assim, contribuir para um conhecimento das características da matemática como ciência é outro aspecto a ter em conta nestas recomendações.

A matemática é uma actividade humana que se desenvolve em diversas etapas. É, simultaneamente, um corpo de saber e um conjunto de actividades que tomam expressão ao nível da sua criação, organização, comunicação e aplicação. Em particular, é de salientar que na criação matemática, quer o raciocínio lógico, quer o intuitivo, são ambos igualmente importantes e centrais. A criatividade e a liberdade de pensamento deverão ser encorajados e não condicionados com o medo de errar. Na actividade matemática, os problemas precedem a abstracção, as experiências, as tentativas e erros, o chegar-se a um resultado não relevante e ter de se recomeçar, são processos que antecedem um sistema axiomático da matemática. Sensibilizar os futuros professores para aspectos como o carácter relativo da verdade em matemática, na medida em que depende de um conjunto de premissas, o papel das definições em matemática, o seu carácter de convenção, e o modo como são construídas no decorrer da investigação em matemática são aspectos que devem também ser tidos em conta.

Enquanto actividade humana a matemática tem uma cultura marcada pela sua própria história. Trabalhar a matemática passa por dar sentido e compreender a sua evolução ao longo do tempo, estabelecer relações com a realidade social, com os significados e valores de cada época. Deste modo, a história da matemática não pode ser apenas tratada numa ou mais disciplinas específicas, mas deve estar presente e ser considerada de forma integrada no estudo dos diferentes temas matemáticos.

A natureza da matemática como ciência aplicada deve igualmente fazer parte do conhecimento que os futuros professores adquirem na sua formação. A aplicação da matemática a outras ciências ou contextos é largamente documentada ao longo dos séculos. O próprio desenvolvimento da matemática tem por vezes sido impulsionado por problemas colocados fora dela. A natureza da matemática como ciência aplicada acarreta a necessidade de uma formação específica em modelação e em trabalho experimental. Compreender a relação da matemática com outros domínios e o papel que neles determina é uma outra forma de procurar fazer uma formação matemática coerente com a natureza desta ciência.

Recomendação 3. A formação matemática deverá contemplar o estudo da matemática de um ponto de vista superior e o estabelecimento claro das suas relações com a matemática que se vai ensinar.

Existem no momento, em Portugal, diferentes modelos para a formação inicial de professores e a possibilidade de serem introduzidas alterações, que se antevê vir a acontecer em breve, não nos garante que passe a haver um modelo único. Assim, esta recomendação procura propor algumas medidas que independentemente do modelo a seguir devem ser tidas em conta.

A formação matemática dos futuros professores deve explicitar de forma clara e inequívoca a relação entre a matemática estudada com aquela que o futuro professor irá ensinar. O estabelecimento de relações é uma forma de conhecimento mais elaborada e exigente do que aquela que passa pelo enunciado ou aplicação de certos saberes. Não pode portanto ser deixado ao futuro professor a responsabilidade de desenvolver por si só aquilo que é mais exigente.

Devem ser previstos diversos níveis de aprofundamento da matemática de acordo com o grau de ensino dos professores em formação. As opções a seguir devem entrar em linha de conta com a evolução da própria matemática e dos currículos escolares. No primeiro caso, destacamos áreas geralmente pouco valorizadas na formação de professores, como seja a Matemática Discreta, que deverão ser objecto de tratamento mais cuidado. No segundo caso, os temas considerados nos currículos escolares deverão servir de base à selecção e desenvolvimento de um ensino que contribua para uma compreensão profunda desses mesmos conteúdos programáticos.

De forma a permitir desenvolver no futuro professor um entendimento integrado da matemática recomenda-se ainda que a matemática seja trabalhada a partir de grandes temas, de grandes ideias matemáticas que se vão trabalhando ao invés de se começar pelas partes para se chegar ao todo.

Recomendação 4. A formação matemática deverá desenvolver nos futuros professores a capacidade de fazer matemática.

A base da aprendizagem matemática é a experiência matemática. Tal pressuposto aplica-se a qualquer nível etário, isto é, é válido tanto no primeiro contacto das crianças com a matemática como no ensino superior. Deste modo, é primordial que a formação matemática dos futuros professores proporcione oportunidades ricas para experimentar e desenvolver actividades próprias da matemática, definidas em particular pela actividade desenvolvida pelos próprios matemáticos. Assim, é indispensável que o futuro professor desenvolva um espírito de dúvida metódica, explicite os seus raciocínios e hábitos de pensamento e seja crítico face à sua adequação a uma dada situação, procure justificações ou refutações matemáticas. A formulação e resolução de problemas devem igualmente estar presentes, bem como o desenvolvimento de capacidades elevadas de raciocínio que passa pela experimentação, formulação de conjecturas, testagem e validação das mesmas, argumentação, prova e refutação. Fazer matemática passa por saber colocar boas perguntas, encontrar soluções e olhar o mesmo problema de múltiplas perspectivas. Acresce-se ainda a necessidade de uma manipulação adequada das técnicas e instrumentos matemáticos que permitem o desenvolvimento da actividade matemática.

Fazer matemática exige competência, mas não se reduz a ela. As experiências matemáticas a proporcionar durante a formação inicial ao futuro professor deverão contribuir para o desenvolvimento do gosto pela matemática. Poder-se-á dizer que o gosto por aquilo que se faz é um elemento forte para o sucesso. Contudo, a importância desta atitude face à matemática é acrescida pelo facto de sem gosto dificilmente se poderá transmiti-lo aos futuros alunos. Dificilmente se consegue convencer outros daquilo que nós próprios não sentimos.

Outros aspectos relativos à predisposição face à matemática são igualmente de ter em conta. Falamos, por exemplo, da autoconfiança em fazer matemática e na motivação essenciais para desenvolver a persistência indispensável para prosseguir, ultrapassar dificuldades e obstáculos numa tarefa matemática.

Matemática não é só o produto final, mas também o processo de chegar a esse produto. Mais do que apenas aprender uma matemática acabada, os futuros professores deverão ser desafiados a desenvolver projectos matemáticos que os façam viver a própria actividade matemática no seu todo. Em suma, os futuros professores precisam de aprender como se faz matemática.

Recomendação 5. A formação matemática deverá propiciar experiências matemáticas que correspondam a boas práticas de ensino.

Fazer matemática hoje não é o mesmo que no passado. Se é certo que a actividade matemática se mantém ao longo do tempo coerente com a própria natureza da matemática, os contextos de trabalho foram evoluindo. Mas para que tal faça parte de uma formação que permaneça com o tempo é absolutamente essencial que o ensino da matemática ao longo de toda a formação inicial seja consistente. Por outras palavras, as boas práticas de didáctica da matemática não pode confinar-se a uma ou outra disciplina da formação inicial, mas tem de ter uma expressão real na prática lectiva ao longo de todo o ensino superior. Não pode ser algo que se sugere para o futuro, para outros fazerem, mas sim que é concretizada por todos os professores responsáveis pela formação inicial.

Em particular, os futuros professores deverão viver experiências matemáticas de diversos tipos, consoante os objectivos de ensino que com elas se pretende atingir. Se tivermos presente o conhecimento matemático que a formação matemática deverá propiciar, desenvolvido em recomendações anteriores, não basta propor tarefas que contribuam para a aquisição de conceitos ou manipulação de processos. É, igualmente, necessário que os futuros professores se familiarizem com experiências matemáticas que lhes permitam ter uma vivência alargada das diferentes características da matemática enquanto ciência (por exemplo, actividades matemáticas como a experimentação, a intuição, a dedução,...).

Um dos desenvolvimentos mais marcantes da nossa época é o tecnológico. Ora tal realidade veio abrir novas dimensões e potencialidades na experiência matemática. Deste modo, o uso das calculadoras e dos computadores deverão fazer parte da experiência vivida pelos futuros professores. Não por ser uma questão de moda ou de actualidade, mas porque a sua presença vai marcar necessariamente a matemática que se vai aprender e o modo como essa aprendizagem irá acontecer. Em particular, o seu recurso permite enriquecer as experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos em diversas áreas, permitindo a abordagem de problemas e explorações que não seriam possíveis sem eles.

A exploração de materiais manipuláveis é outro exemplo a ter em conta. Qualquer que seja o nível de maturidade científica do aluno, a intuição e a percepção, ainda que pouco rigorosas ou formais, são muitas vezes passos iniciais incontornáveis para o bom sucesso de uma tarefa matemática.

Na sociedade actual, não há prática profissional que possa permitir manter-se num contexto individualizado de trabalho. O trabalho de equipa é uma exigência, não uma opção. Assim, o futuro professor de Matemática deverá igualmente desenvolver a capacidade de fazer matemática com outros.

Em síntese, recomenda-se um ensino da matemática que atenda a um conjunto de orientações didácticas. Por um lado, poder-se-á, deste modo, desenvolver uma aprendizagem da matemática mais rica e poderosa e, por outro, permitirá que os futuros professores experimentem e vivam de forma continuada aquilo que se pretende que depois venham a utilizar enquanto professores.

3. Recomendações específicas para a formação matemática inicial de educadores de infância e dos professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico

Ponto da situação

Os alunos candidatos a professores dos primeiros anos de escolaridade (faixa etária dos 3 aos 12 anos), relativamente aos candidatos a professores dos outros níveis de ensino, trazem diferenças significativas no que se refere à sua relação com a matemática. Só um número muito reduzido estudou Matemática até ao 12.º ano, pelo que a grande maioria não esteve envolvida, pelo menos de uma forma formal e escolarizada em qualquer tipo de actividade matemática nos três anos anteriores à sua entrada no ensino superior. Além disso e na generalidade, estes alunos acarretam, consigo, um passado escolar de insucesso em Matemática, pelo que não só não sabem matemática suficiente mas também desenvolveram atitudes muito negativas em relação à matemática. Por isso, na formação destes professores, é essencial que eles desenvolvam um gosto pela matemática e pela própria actividade matemática, e construam um conhecimento matemático que os prepare para ensinar matemática de acordo com as recomendações e os princípios já enunciados.

Embora reconhecendo a necessidade de um conhecimento matemático mais substancial para ensinar no ensino secundário e 3.º ciclo do ensino básico do que nos outros níveis de ensino, é ainda frequentemente assumido que a matemática aprendida nos 9 ou 12 anos de escolaridade é suficiente para ensinar nos primeiros anos de escolaridade. No entanto, verifica-se a necessidade, por parte dos professores do ensino elementar, de um conhecimento e compreensão profunda da matemática que vão ensinar, pois nestes primeiros anos não se trabalha com os conceitos numa forma já "acabada". Pelo contrário é quando os conceitos são construídos, se desenvolvem e se estabelecem certos hábitos de raciocínio e pensamento matemático. É desta construção (de conceitos) e destes hábitos (de raciocínio) adquiridos que posteriores compreensões e raciocínios de ordem superior se vão desenvolver.

No currículo de formação de professores para os primeiros anos de escolaridade, tendo em conta que estamos a formar professores generalistas ou por áreas disciplinares, há sempre um problema de gestão de tempo, e, os currículos actuais das Escolas Superiores de Educação e Universidades, de acordo com os dispositivos legais, contemplam três áreas de formação:

1. a componente de formação pessoal, social, cultural, científica e tecnológica;
2. a componente de ciências da educação (Psicologia, Sociologia, Desenvolvimento curricular);
3. a componente de prática pedagógica.

A 1.ª componente não pode ultrapassar os 60% do total de carga horária prevista para o curso, a 2.ª componente terá de rondar os 25% e a 3.ª componente os 15%. Como a 1.ª componente inclui todas as áreas disciplinares que compõem o currículo do actual pré-escolar e 1.º ciclo (Língua Portuguesa; Matemática; História, Geografia, Ciências da Natureza, Expressão plástica, Expressão dramática, Expressão fisico-motora, Formação musical, Língua estrangeira), verifica-se que para a Matemática e Didáctica da Matemática, os valores da carga horária total se situam entre 5,6% e 9.5%, nas Escolas Superiores de Educação públicas, e entre 5,6% e 13,1% se incluirmos as Universidades (públicas) com cursos de formação inicial de professores do 1.º ciclo. Se considerarmos todas as instituições, públicas e privadas, com cursos de formação inicial de professores para este nível de ensino, a carga horária referida situa-se entre 2,5% e 14,2%.

Na formação inicial de professores para o 2.º ciclo (alunos dos 10 aos 12 anos), variante Matemática e Ciências da Natureza, estas percentagens elevam-se e situam-se entre 20 e 30% (Escolas Superiores de Educação públicas).

Para concretizar as recomendações enunciadas neste documento, é absolutamente necessária uma revisão destes dispositivos legais, no sentido de reforçar a componente de matemática e de didáctica da matemática.

Temas matemáticos a incluir num programa de formação inicial

Em cada tema desenvolvem-se algumas considerações sobre o conhecimento matemático básico que os futuros professores devem adquirir e sua pertinência na formação de um professor dos primeiros anos.

Números, Operações e Teoria dos Números

É reconhecido que o processo de ensino-aprendizagem dos números e das operações, nos primeiros anos, tem colocado a ênfase na aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras, assente nos algoritmos formais para as operações.

Nos dias de hoje, o conhecimento dos números e das operações é um saber indispensável na formação do cidadão matematicamente letrado, mas esse conhecimento tem de incluir uma compreensão global dos números e operações, que se desenvolve com a sua utilização em contexto específicos, reais e significativos e tem de incluir a capacidade de usar esta compreensão para fazer julgamentos matemáticos e para desenvolver estratégias flexíveis de cálculo. Em suma, a prioridade deve ser colocada no desenvolvimento do sentido do número.

Para isso, os professores dos primeiros anos precisam de desenvolver um conhecimento e uma compreensão acerca de:

- Conceito de número natural, inteiro, racional e real, sua evolução, contextualização histórica, o que significam e como se representam.
- Sistemas de numeração e valor de posição.

É necessário que os futuros professores compreendam como o valor de posição no sistema decimal permite uma representação eficaz dos números inteiros e decimais (dízimas finitas) e verifiquem as implicações deste conhecimento para o reconhecimento da ordem de grandeza dos números e sua ordenação, para estimar, para fazer aproximações e para desenvolver procedimentos de cálculo (informais e formais).

- Operações e suas propriedades.

A ênfase deve ser colocada no desenvolvimento do sentido da operação que se adquire na resolução de situações diversas, modeladas pela mesma operação e no desenvolvimento de procedimentos informais de cálculo, de estratégias flexíveis e diversificadas de cálculo mental e raciocínios que os justificam, porque requerem um bom conhecimento e compreensão dos números e relações entre eles (sentido do número). É importante que os futuros professores compreendam como estas estratégias são facilitadoras na transição de níveis de cálculo com raciocínios cada vez mais elevados (da contagem ao cálculo por estruturação e deste para o cálculo formal), permitindo tornar mais significativa, para os alunos, a aprendizagem posterior dos algoritmos das operações. A compreensão acerca dos algoritmos (os tradicionais e outros) deve envolver o conhecimento dos fundamentos matemáticos subjacente à sua construção e utilização. Os futuros professores devem reconhecer as propriedades das operações e as relações entre as operações como uma ferramenta útil na prática de procedimentos de cálculo.

É importante o enquadramento histórico de alguns dos procedimentos de cálculo, através de uma exploração dos sistemas de cálculo de diferentes civilizações, nomeadamente o método da gelosia e o sistema egípcio para a multiplicação, baseado na duplicação.

A compreensão da extensão das operações com números naturais aos inteiros e aos números racionais e das questões que se colocam nessa extensão é também imprescindível na formação do futuro professor.

- Tópicos de Matemática Discreta (como a análise combinatória).

Os modelos de contagem devem ser explorados na abordagem às operações, especificamente na multiplicação, no desenvolvimento de estratégias de cálculo e na resolução de problemas, nomeadamente, os relativos a percursos.

- A axiomática dos números naturais.

Os futuros professores devem compreender e apreciar como um pequeno conjunto de regras (axiomas) estrutura toda a aritmética e ver os algoritmos e as propriedades das operações como uma aplicação de certos axiomas.

- Relações entre números e exploração de padrões e regularidades no contexto da teoria dos números.

O estudo destas regularidades (em famílias de números, na adição, subtracção, multiplicação, divisão...) permitirá estabelecer uma ponte para a álgebra.

Álgebra e Funções

Embora o estudo mais formal da álgebra e funções comece no 3.º ciclo, os alunos começam muito mais cedo a contactar de forma intuitiva com ideias algébricas. Estas começam a ser desenvolvidas no jardim de infância quando as crianças fazem classificações, ordenações, descobrem padrões e continuam a desenvolver-se no 1.º ciclo quando, por exemplo, procuram o número que falta numa expressão do tipo 6 + ? = 9 (estão a resolver uma equação); quando decompõem os números para facilitar os cálculos (aplicam propriedades), por exemplo, 8 + 5 = 8 + 2 + 3 =….

Para que os professores dos primeiros anos, estimulem os seus alunos a desenvolver estas ideias, eles têm de ter um conhecimento destes conceitos e relações para que os possam identificar e explorar quando os alunos exprimem o seu pensamento.

No estudo da álgebra e funções é importante desenvolver um conhecimento e compreensão sobre:

- Tipos de representação.

O estudo da álgebra e das funções deve proporcionar situações para o uso de formas simbólicas para representar situações matemáticas e modelar fenómenos diversos e desenvolver a compreensão das relações entre os vários tipos de representação, tabelas, gráficos e expressões algébricas.

- Argumentação.

A compreensão relativa a diferentes tipos de argumentação e ao modo como se estrutura uma cadeia de argumentos dedutivos é outro aspecto a merecer atenção na formação inicial de professores.

- Poder da simbologia e da manipulação algébrica

O reconhecimento da importância da simbologia e da manipulação algébrica pode desenvolver-se através de diversas situações, como seja na formulação e justificação de generalizações, na descrição de cálculos, na utilização de equações que constituem uma representação simbólica de situações matemáticas ou de problemas dos mais diversos domínios.

- Conceito de função.

No contexto do estudo de funções deve ser dada oportunidade para a familiarização com a noção de função e a capacidade de interpretar e construir gráficos de funções, tabelas e as expressões analíticas que as representam. Neste estudo deverão ser consideradas as características de algumas funções (lineares, quadráticas e exponenciais) e incluídos problemas de modelação.

O trabalho referido anteriormente, à volta da exploração de regularidades e padrões, integrado no contexto da teoria dos números é uma boa oportunidade para reconhecer o papel da demonstração na generalização de padrões e para relacionar regularidades e padrões com o conceito de função.

A simbologia algébrica aparece como um meio poderoso e eficaz de representar as propriedades das operações e a compreensão dessas propriedades é um factor determinante para o trabalho dos professores com os alunos na prática de procedimentos, quer seja na compreensão e exploração de estratégias diversificadas de cálculo mental ou na compreensão dos algoritmos mais formais.

Análise de Dados, Estatística e Probabilidades

Esta é a área de conhecimento mais recente no currículo do ensino básico. No programa de Matemática, em vigor, no 1.º ciclo, esta área é claramente subvalorizada, não estando contemplada de uma forma explícita, sendo apenas proposto no bloco Suportes de Aprendizagem "a utilização de setas, diagramas, tabelas, esquemas e gráficos para comunicar e registar ideias, ler e interpretar informação". Sendo indiscutível a importância da estatística para a compreensão de muitos problemas e para a interpretação de informação veiculada, nomeadamente, pela comunicação social, é de prever que mais atenção seja dada aos processos relacionados com a recolha, organização, representação e interpretação de dados neste nível de ensino. As actuais orientações curriculares (pobres) para os alunos tiveram efeitos idênticos na formação inicial dos professores dos primeiros anos, pelo que os futuros professores precisam de desenvolver mais conhecimento e adquirir mais experiência em:

- Planeamento de um estudo.

Este planeamento deve envolver a compreensão do tipo de questão que pode ser colocada (o objecto do estudo) e que pode ser abordada através dos dados, o saber delinear os procedimentos de recolha de dados, criar e organizar conjuntos de dados e reflectir sobre eles tendo em conta a questão colocada, o que pode levar a uma reformulação da pergunta ou à recolha de novos dados.

- Descrição de dados.

Inclui a compreensão da forma como se distribuem os dados, através do significado das medidas de localização e medidas de dispersão, da utilização de diferentes formas de representação e da comparação de dois conjuntos de dados, procurando correlações e compreendendo que correlação não implica causalidade.

- Obtenção de conclusões.

Os futuros professores devem ser capazes de seleccionar as representações e medidas mais adequadas para comunicar as conclusões, analisando possíveis causas de variabilidade e compreendendo as dificuldades que surgem na escolha da amostra e na inferência das conclusões para a população.+

- Probabilidades.

Os futuros professores precisam de se familiarizar com os fenómenos aleatórios, fazendo juízos em situações de incerteza, e determinando probabilidades de alguns acontecimentos (definição frequencista e axiomática de probabilidade).

Geometria e Medida

Num passado recente, o currículo de geometria nos primeiros anos de escolaridade, valorizava a identificação e reconhecimento de propriedades de figuras geométricas a duas dimensões, subvalorizando o trabalho no espaço tridimensional e, valorizava o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas, nomeadamente de rectângulos recorrendo a fórmulas e unidades estandardizadas, subvalorizando a compreensão de todo o processo de medição.

Algumas mudanças significativas se verificaram nos últimos anos nas orientações curriculares para o ensino da geometria, com uma ênfase maior no desenvolvimento de capacidades de visualização espacial, associadas ao trabalho no espaço tri e bidimensional, na compreensão do processo de medição mais do que na memorização de fórmulas e na actividade experimental dos alunos através da construção de modelos e utilização de materiais manipuláveis adequados. Assim os futuros professores precisam de desenvolver competências nas seguintes áreas:

- Perspectiva histórica da Geometria

Deverá ser estudada começando pelas suas origens ligadas à medição de terrenos, passando por uma abordagem à axiomática da geometria euclidiana e contextualizando o surgimento de outras geometrias.

- Visualização e representação espacial.

A identificando e compreensão dos diversos aspectos da capacidade espacial é fundamental na formação dos futuros professores, que se devem familiarizar com as representações a duas dimensões de objectos a três dimensões (vistas, planificações, …) e com a construção de objectos do espaço tridimensional a partir das suas planificações. Para isso, os aspectos essenciais da teoria de van Hiele (níveis de aprendizagem da geometria e sequência de fases de aprendizagem de conceitos geométricos em cada nível) devem ser abordados.

- Formas geométricas básicas, suas propriedades e relações entre elas.
- Transformações geométricas, isometrias e semelhanças.

As transformações geométricas constituem um tópico central do ensino actual da geometria, e o estudo da simetria (frisos, padrões e pavimentações) de um ponto de vista matemático é fundamental não só pela presença forte deste tema nos conteúdos curriculares destes níveis de escolaridade mas também pelo facto da simetria estar muito presente no mundo que nos rodeia nomeadamente na arte.

- Comunicação de ideias geométricas.

Esta comunicação facilitará o desenvolvimento dum vocabulário adequado e da compreensão do papel e importância das definições.

A construção das definições deve ser progressiva e resultante da experiência matemática dos alunos.

- Noção de grandeza e de medida.

É fundamental que os futuros professores aprofundem o seu conhecimento acerca do processo de medição que deve incluir a compreensão da ideia de unidade, da necessidade de seleccionar unidades adequadas à grandeza a medir, o reconhecimento de que as medidas que se calculam são sempre medidas aproximadas e conhecimento dos sistemas de medida das diversas grandezas.

Para as grandezas mais trabalhadas no 1.º ciclo, nomeadamente comprimento, área e volume, é fundamental que os futuros professores compreendam a necessidade de começar por utilizar unidades não estandardizadas e a importância de proporcionar aos alunos, muitas experiências de medições com essas unidades antes das unidades formais. Os futuros professores devem ser familiarizados com os diversos tipos de materiais disponíveis para ajudar os alunos na construção destes conceitos e na própria descoberta de algumas fórmulas para o cálculo de áreas e perímetros (estruturados ou não estruturados como fios, palhinhas, clips, folhas de papel quadriculado, triangular, ponteado, geoplanos, tangrams, cubos, …).

4. Temas matemáticos essenciais e respectivas abordagens relativos à formação dos professores do 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário

Os conteúdos programáticos de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário confrontam os estudantes com a utilização de conceitos e algoritmos da matemática em áreas como a aritmética, a geometria, álgebra e funções, interpretação de dados e aplicação de conceitos básicos de probabilidades. O professor deve estar habilitado, não só a cimentar nos alunos os conhecimentos já adquiridos de forma a permitir-lhes atingir objectivos mais ambiciosos, mas também a ajudá-los a estabelecer as conexões que existem entre os diferentes assuntos que estudam. Assim, os cursos de formação inicial, além de proporcionarem aos futuros professores uma profunda compreensão da matemática que vão ensinar, devem desenvolver um espírito matemático rigoroso e flexível, capaz de integrar e relacionar conhecimentos, e experimentado na resolução de problemas em áreas variadas.

Apresenta-se em seguida uma listagem comentada de temas matemáticos e respectivas abordagens a serem desenvolvidos na formação matemática dos professores do 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, agrupados de acordo com as principais áreas dos currículos de Matemática destes níveis de ensino.

Teoria dos números

As ideias fundamentais da teoria dos números fazem parte dos temas a leccionar em todos os níveis de ensino, desde o primeiro ciclo ao ensino secundário. Os estudantes vão tendo ao longo da sua formação um contacto informal com os diferentes conjuntos de números e com a forma de operar entre eles. A forma sincopada como estes temas fazem parte dos sucessivos currículos esbate a ligação entre os diferentes conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais, complexos) e as operações neles definidas. Por exemplo, ensina-se a somar fracções mas frequentemente não se explica que o processo utilizado, quando aplicado a números naturais, coincide com a adição usual.

O conhecimento dos números e da sua génese, e a compreensão de como as operações se definem nos vários conjuntos de números devem constituir um objectivo prioritário a atingir na formação inicial do futuro docente de Matemática. As várias etapas que foi necessário percorrer, desde os primórdios da civilização humana até à tomada de consciência, nos finais do século XIX, da necessidade de definir rigorosamente o que é um número real, constitui uma excelente ilustração do processo de criação em matemática, que passa, por vezes, pela utilização de conceitos ainda incompletamente definidos para o desenvolvimento de outros (por exemplo, os números complexos surgiram em meados do século XVI mas a definição dos princípios básicos dos números reais – um seu subconjunto - só ocorreu três séculos depois).

Uma boa preparação para leccionar os temas curriculares envolvendo números e operações deve desenvolver os seguintes aspectos:

- Génese e evolução do conceito de número.

É importante que o futuro professor seja confrontado com o processo evolutivo do conceito de número, desde a sua concepção inicial associada à contagem, até à concepção de número como conceito abstracto. A constatação de que a hipotenusa de um triângulo rectângulo isósceles é incomensurável com o cateto constituiu, provavelmente, um dos primeiros exemplos na história da humanidade em que a realidade resiste à teoria construída (até então supunha-se que a unidade e as fracções da unidade eram suficientes para efectuar medições).

- Números naturais, inteiros, racionais e reais e matemática subjacente aos processos utilizados para operar entre eles.

É necessário compreender a importância do princípio de indução (ou recorrência), como método de demonstração, pois permite fazer a construção rigorosa da aritmética elementar.

No estudo das sucessivas ampliações do conjunto dos números naturais é especialmente importante focar os aspectos relacionados com as sucessivas extensões das operações.

- Algoritmos operatórios nas diferentes classes de números e suas propriedades.

Devem ser compreendidos em particular os algoritmos para a multiplicação e divisão de números inteiros e racionais para que os futuros professores tenham capacidade para os transmitir aos seus alunos numa forma que não seja simplesmente mecânica.

Existem aspectos que devem ser especialmente acautelados na preparação dos futuros professores no que diz respeito ao estudo dos algoritmos operatórios. Visto ser comum julgar que, nessa área, basta conhecer um conjunto de técnicas, é muito importante tomar consciência de que existe muito para aprender neste campo. Se para a compreensão dos algoritmos usuais das operações fundamentais com números naturais o recurso à decomposição decimal constitui uma ferramenta simples, no que diz respeito, por exemplo, ao algoritmo usual para a divisão de fracções, é necessária uma compreensão profunda do que são fracções e do significado de as dividir.

- Manipulação dos números e algoritmos operatórios com destaque para o cálculo mental e cálculo aproximado.

O desenvolvimento do cálculo mental pode conduzir a uma melhor compreensão dos números e das suas propriedades. Os futuros professores devem ser ensinados a tirar partido das propriedades dos números para realizar operações mentalmente (por exemplo, $7 \times 105 = 7 \times 100 + 7 \times 5 = 700 + 35$).

- Fundamentos subjacentes à forma de operar com fracções e sua manipulação.

Os futuros professores devem compreender a decomposição em factores primos de um número e a sua utilização para a determinação do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum.

- Relações entre fracções e dízimas e trabalho com números decimais e percentagens.

A compreensão da relação entre as fracções e as dízimas finitas e periódicas passa pela construção das fracções a partir das dízimas que as representam e reciprocamente.

- Utiulização da notação científica para exprimir números com diversos graus de magnitude.

Deve sensibilizar-se os futuros professores para a estrutura da notação científica que permite contornar as dificuldades inerentes à escrita e ao cálculo com estes números.

- Significado das proporções e sua utilização em problemas do dia-a-dia

A utilização das proporções para efeito comparativo pode levar os futuros professores a pensar em situações de proporcionalidade na natureza. Por exemplo, a comparação da inclinação de rampas leva à compreensão da noção de declive e motiva o cálculo do declive de rectas num sistema de coordenadas. Não esquecer que as percentagens são proporções e devem ser apresentadas como tal.

- Definição rigorosa dos números reais.

Este ponto pode constituir um remate dos anteriores. É importante conhecer os diferentes estádios por que passou esta definição, desde a teoria geométrica das proporções elaborada por Eudóxio (408-355 a.C.) que, ao considerar relações de comparação entre comprimentos cobrindo tanto as grandezas comensuráveis como as que não o são, terá sido o primeiro a estudar os números reais, até à sua axiomatização por Cantor (1845-1918). A par da construção directa, o estudo da axiomática dos números reais pode proporcionar ao futuro professor o contacto com uma das ferramentas fundamentais da criação em matemática – a construção de uma axiomática.

- Números complexos e razões que levaram à sua concepção.

É importante compreender que se podem definir as operações fundamentais com números complexos de forma a constituirem uma extensão das operações com números reais, mas que não é possível ordenar o conjunto dos números complexos de modo a estender a ordenação usual do conjunto dos números reais.

Álgebra

A álgebra dos polinómios, das fracções racionais, das equações e das inequações tem constituído o núcleo central da matemática leccionada no ensino secundário, sendo de salientar que os currículos em vigor estabelecem conexões entre a álgebra e tópicos de análise, de matemática discreta, de modelação e de geometria. As novas tecnologias encorajam e facilitam essas conexões e levantam questões profundas quanto ao papel que deve ter a manipulação algébrica.

Uma boa preparação para leccionar estes currículos deve desenvolver os seguintes aspectos:

- Interacção entre a álgebra e a teoria dos números.

É importante que os futuros professores fiquem cientes de que foi a álgebra que esteve na origem da necessidade das sucessivas ampliações do conjunto dos números naturais.

- Ideias básicas da teoria dos números e das estruturas algébricas subjacentes à forma de operar com expressões, equações e desigualdades.
- Utilização da álgebra para raciocinar sobre situações da vida real.
- Utilização do raciocínio algébrico na resolução de problemas e nas demonstrações no âmbito das várias áreas curriculares da matemática.
- Manipulação algébrica e utilização das calculadoras e software computacional

O desenvolvimento de destreza na manipulação algébrica e a compreensão da forma como as calculadoras algébricas e o software computacional podem ser usados para a exploração de conceitos algébricos e resolução de problemas.

A resolução de problemas da vida real através da sua formalização algébrica (isto é, mediante a associação de variáveis às quantidades e o estabelecimento das equações que representam as relações entre elas) contribui para consciencializar os futuros professores do papel fundamental da álgebra.

O estudo da álgebra e da teoria dos números deve proporcionar aos futuros professores uma visão de como os temas se vão desenvolvendo à medida que se completam os sucessivos ciclos do ensino. Por exemplo, deverá mostrar-se explicitamente como os números e as operações algébricas estudados no primeiro e segundo ciclo podem ser explicados através de princípios mais gerais.

É também crucial que seja transmitido aos futuros professores a importância do papel da álgebra na utilização de ferramentas computacionais (como as folhas de cálculo) a par com a utilidade dessas ferramentas para a resolução de problemas algébricos.

Geometria

Depois de um longo período de imobilismo no que diz respeito ao seu ensino nos níveis básico e secundário, a geometria foi certamente o tema do ensino da matemática mais intensamente discutido nas últimas décadas do século passado em alguns países, sobretudo francófonos. Embora a situação resultante, de quase desaparecimento do ensino da geometria, que ocorreu em alguns países – nomeadamente em Portugal –, esteja hoje ultrapassada, esse período de controvérsia sobre o peso a atribuir à geometria e sobre a abordagem a adoptar deixou sequelas e graves indefinições que estão longe de estar resolvidas. O caso do ensino da geometria é talvez o exemplo mais flagrante de uma situação muito negativa que apenas pode passar a evoluir favoravelmente alterando de modo significativo e com coragem a formação neste campo dos futuros professores de Matemática de todos os graus de ensino.

A organização em disciplinas específicas dos conteúdos que iremos referir em seguida pode ser muito diversa, e não é disso que nos vamos aqui ocupar. O que pretendemos é indicar, justificando, os tópicos essenciais do ensino da geometria para futuros professores do terceiro ciclo do ensino básico e do ensino secundário, de modo que possam ser cumpridas as recomendações gerais enunciadas.

Embora isso não vá acontecer imediatamente, dada a situação negativa actual, espera-se que os alunos que estes futuros professores vão receber no terceiro ciclo tenham já nos ciclos de ensino anteriores feito múltiplas e intensas experiências no campo da visualização espacial a três e duas dimensões, desenvolvido as suas capacidades de percepção visual e de representação no plano dos objectos tridimensionais, de construção de modelos físicos de objectos geométricos e de análise das propriedades desses objectos. Esses alunos estarão assim melhor preparados para aprofundar a sua experiência geométrica no caminho da construção de conceitos, da abstracção e da generalização, e da organização dos seus conhecimentos. Experiência que os deverá levar também a apropriar-se da grande herança cultural da história da geometria e das suas conexões com outros domínios da matemática, como os números, a álgebra e a análise. É neste caminho que devem ser conduzidos e apoiados pelos seus professores, que devem para tal possuir um conhecimento profundo, de um ponto de vista superior, da geometria elementar. Isto implica uma formação universitária abrangente que inclua necessariamente os seguintes tópicos:

Geometria euclidiana no plano e no espaço a partir de múltiplas perspectivas.

- Métodos sintéticos e analíticos na resolução de problemas e nas explorações e investigações em geometria.
- Fundamentos da geometria euclidiana e das vias sintética e métrica.

É imprescindível que os futuros professores tenham um conhecimento aprofundado (embora não necessariamente exaustivo) dos contextos em que podem trabalhar geometria com os seus alunos, nomeadamente qual a construção formal da geometria que está subjacente às pequenas organizações locais da geometria em que apresentam ou discutem conceitos, justificações ou demonstrações. Deve no entanto notar-se que as duas abordagens (métrica e sintética) não devem ser introduzidas ao mesmo tempo.

- Geometria elementar moderna (desenvolvimentos da geometria euclidiana posteriores a Euclides) incluindo: grandezas orientadas, introdução dos objectos "no infinito", teoremas de Papo, de Menelau, de Ceva, e consequências, geometria inversiva, sistemas coaxiais de circunferências, teorema de Morley.

A geometria não é um ramo morto da matemática, e mesmo a geometria euclidiana não se reduz aos *Elementos*. Este tópico refere-se precisamente ao desenvolvimento da geometria para além de Euclides, e constitui uma apresentação de tópicos-fronteira da geometria euclidiana, que constituem as primeiras conexões com a geometria projectiva e com as geometrias não euclidianas.

Construções geométricas e conexões da geometria, nomeadamente com a álgebra.

- Os problemas clássicos e a sua não resolubilidade com régua não graduada e compasso; outros instrumentos que os resolvem.
- Outros tipos de construções geométricas e sua algebrização, incluindo: apenas com compasso (teorema de Mascheroni-Mohr), com régua graduada (teorema de Poncelet-Steiner), construções por dobragens.

Naturalmente, não é possível ignorar, depois de Descartes, as conexões da geometria e da álgebra. Uma das melhores formas de apreciar essas conexões é através da revelação do poder da álgebra na demonstração da impossibilidade dos três problemas clássicos e no estudo de construções geométricas não euclidianas. Deveria ser prevista uma articulação com cadeiras de álgebra de modo a desenvolver nessas cadeiras os instrumentos algébricos necessários neste ponto.

Geometrias e transformações geométricas.

- Isometrias, semelhanças e geometria euclidiana. O estudo da simetria (frisos, padrões e pavimentações) de um ponto de vista matemático.

As transformações geométricas constituem um tópico central do ensino actual da geometria, e o estudo matemático da simetria um exemplo paradigmático das relações da matemática com o mundo real.

- Conexões da geometria com os números complexos.

O estudo destas conexões pode constituir um excelente *background* na preparação dos futuros professores, dando-lhes uma capacidade mais ampla para uma abordagem mais rica dos números complexos no ensino secundário.

- O problema da representação. Da perspectiva dos pintores à geometria projectiva (Desargues, Pascal, Monge, Steiner, Poncelet)
- O programa de Erlangen.

Também neste ponto a coordenação com cadeiras de álgebra linear e geometria analítica será necessária.

Geometrias não-euclidianas. Geometria das superfícies. Geometria diferencial. Topologia. Geometria em espaços com dim>3.

A formação cultural de um professor de Matemática pode e deve ultrapassar os temas com ligações estritas à matemática escolar. Assim, deve ser oferecida ao futuro professor formação em outros temas importantes do desenvolvimento moderno da geometria como os listados aqui.

Medida das grandezas geométricas (teorias elementares): comprimento, área e volume. Conexão com os números reais. Terceiro problema de Hilbert.

A introdução dos conceitos de medida das grandezas e dos números reais são dois dos temas mais maltratados ou ignorados nos níveis básico e secundário, e reflecte directamente uma má ou mesmo inexistente preparação dos futuros professores na sua formação inicial, que deve ser inteiramente reformulada neste aspecto.

Estudo de categorias de objectos matemáticos importantes para o ensino da geometria elementar.

- Poliedros e construção/utilização de modelos.
- Curvas especiais e construção/utilização de mecanismos.

O ensino da geometria nos níveis básico e secundário passa necessariamente pela construção, exploração e estudo de modelos concretos e de objectos geométricos com largas tradições no ensino da geometria (nomeadamente poliedros, curvas especiais, etc.). A formação incial dos futuros professores de Matemática deve incluir obrigatoriamente uma preparação adequada na matemática subjacente a esses modelos.

Notas transversais

a) Uma das consequências da Matemática Moderna foi a tradição de reduzir grande parte do estudo da geometria a meros capítulos da álgebra linear, e essa tendência está ainda presente em muitos cursos universitários de formação de professores. Este tipo de formação – independentmente de poder ser estruturalmente o mais económico na organização das cadeiras de uma formação universitária em matemática – é totalmente inadequado para professores de geometria do terceiro ciclo e do secundário, cujas cadeiras formativas em geometria devem ter por base os métodos geométricos, não esquecendo obviamente as conexões com outros domínios da matemática.

b) É hoje universalmente reconhecido que deve ser proporcionado aos futuros professores de geometria o uso intensivo, durante a sua formação inicial, de um programa de geometria dinâmica. Não apenas porque naturalmente o deverão utilizar no seu futuro ensino, mas também como auxiliar imprescindível da sua própria formação em geometria.

c) Para além da existência de uma cadeira específica de História da Matemática, a formação nos tópicos listados atrás pressupõe a sua total e permanente integração num contexto histórico. Na realidade, não é possível estudar e compreender a origem e desenvolvimento das diversas geometrias fora desse contexto.

Funções e Análise

O conceito de função é uma das ideias centrais da matemática, tanto pura como aplicada. Tal como muitos outros conceitos matemáticos com grande aplicação na matemática actual, este conceito atravessou vários estádios, desde a primeira vez que o vocábulo "função" apareceu num manuscrito de Leibniz e a primeira explicitação por Johann Bernoulli, até à construção do conceito actual em finais do século XIX. O estudo da evolução do conceito de função ao longo dos tempos, além de proporcionar aos futuros professores mais um exemplo de como as definições em matemática evoluem, desperta-os para as dificuldades que os estudantes têm na compreensão de um conceito que os matemáticos experientes usam praticamente sem pensar.

É comum reduzir as funções a formas alternativas de expressar informação de carácter algébrico e entendê-las apenas como processos de transformação de um objecto numa imagem, sendo raros os estudantes do ensino secundário e mesmo do ensino superior que manifestem a capacidade para as conceber como objectos matemáticos. Os cursos de formação de professores devem proporcionar uma visão alargada das funções e do seu papel nos vários ramos da matemática, contemplando aspectos ligados ao cálculo, à análise, às aplicações e às tecnologias.

Uma boa preparação para leccionar os temas curriculares envolvendo funções deve desenvolver os seguintes aspectos:

- Principais tipos de funções e características dos seus gráficos, com destaque para a utilização das transformações elementares e das operações com funções para o traçado de novos gráficos.

Devem ser revisitadas as funções elementares estudadas nos programas do ensino secundário com o objectivo de esclarecer as suas características, em especial no que diz respeito à monotonia e existência de extremos, conceitos frequentemente formulados de forma deficiente. A utilização das transformações elementares para a construção de gráficos deve também ser tratada. Neste campo a utilização das calculadoras gráficas pode proporcionar aplicações adequadas, nomeadamente no que diz respeito à variação de parâmetros em famílias de funções.

- Conceitos de limite e continuidade de funções.

É necessário desenvolver uma compreensão profunda destes conceitos. É fundamental que os futuros professores entendam como as abordagens intuitivas destes conceitos, tão em voga em alguns manuais escolares, podem conduzir a conclusões erradas. A necessidade da formalização surgirá então de forma natural, propiciando a fundamentação rigorosa do cálculo diferencial e integral.

Atendendo a que as sucessões constituem um caso particular das funções, o seu estudo pode ser feito em paralelo com o estudo das funções, sendo dada ênfase à forma particular de que se revestem os resultados sobre sucessões (teorema das sucessões enquadradas, teorema das funções monótonas, ...).

- Conceitos de derivada e integral de uma função.

Este estudo deve compreender as interpretações geométricas e cinemáticas do conceito de derivada e as aplicações geométricas do integral. Em particular o estudo das áreas pode proporcionar aplicações interessantes como a definição de através da área compreendida entre a hipérbole equilátera, o eixo das abcissas e as rectas verticais passando pelos pontos de abcissas 1 e x.

- Séries numéricas e séries de potências.

Na sequência do estudo da convergência de sucessões o estudo das séries numéricas surge naturalmente. Por outro lado, o estudo das progressões geométricas conduz ao estudo das séries geométricas e motiva a representação de funções através de séries. Finalmente, o estudo da série de Taylor mostra como as funções diferenciáveis podem ser aproximadas por polinómios.

- Funções transcendentes elementares.

Estas funções, já abordadas no ensino secundário de uma forma pouco rigorosa, devem ser revisitadas sob diferentes pontos de vista (por exemplo, a definição da função logaritmo a partir da função exponencial e a situação inversa, sendo definido a partir do integral).

Deverá ser feita a análise comparativa de diferentes abordagens destas funções de forma a esclarecer alguma informação, aparentemente desligada, que os futuros professores têm das mesmas.

- Funções na modelação matemática.

Os futuros professores deverão ser sensibilizados para a necessidade de compreender a criação do modelo, para que na sua prática lectiva não se limitem a afirmar que uma determinada função modela uma determinada situação. Por exemplo, a associação da sucessão de termo geral ao cálculo do montante de um capital sujeito a um juro continuado constitui um excelente exemplo de modelação matemática e faz surgir de forma natural o número "e".

O estudo das equações diferenciais é fundamental para compreender a construção dos modelos e deve ser contemplado nos cursos de formação inicial.

- Derivação e integração numéricas.

A aproximação numérica por processos finitos da derivação e da integração permite uma melhor compreensão destes conceitos e introduz aos métodos computacionais usados na resolução de problemas resultantes da modelação.

Matemática Discreta e Lógica

A importância da Matemática Discreta e da Lógica não se confinam às aplicações. É fundamental que os cursos de formação inicial de professores de Matemática aprofundem temas como:

- Teoria de conjuntos.

É importante trabalhar as noções de cardinalidade finita e de cardinalidade numerável: compreender porque é que os conjuntos dos números inteiros e dos números racionais são conjuntos numeráveis mas o conjunto dos números reais já não é numerável.

- Lógica das proposições.

Se existem regras de lógica que são normas gerais do raciocínio corrente e que se usam constantemente para demonstrar as proposições, os processos lógicos que se usam em matemática para formar relações (operações lógicas) devem ser compreendidos e trabalhados (negação, conjunção disjunção, implicação, equivalência).

- Combinatória.

É importante diferenciar as diversas leis que o cálculo combinatório define para fazer contagens e analisar no contexto da resolução de problemas a utilização do raciocínio aditivo ou multiplicativo.

Estatística e Probabilidades

Os futuros professores necessitam de um conhecimento simultaneamente conceptual e técnico dos tópicos de probabilidades e estatística que constam dos currículos dos ensinos básico e secundário. Devem familiarizar-se com a recolha, leitura e interpretação de dados e com os procedimentos para a obtenção das representações mais usuais (gráficos e tabelas). Devem ser sensibilizados para que, apesar da riqueza na transmissão de informação que estes processos estatísticos podem proporcionar, eles podem conduzir a interpretações erradas. Para o efeito devem ser apresentados exemplos sugestivos e ligados a actividades do mundo real. Para dar sentido à informação de carácter estatístico do dia-a dia como, por exemplo, a validade das projecções eleitorais, devem compreender o papel da selecção aleatória de amostras a partir de uma população bem definida para estimar parâmetros dessa população. Deve ser compreendido o processo de fazer inferência estatística, em que se usam estatísticas e teoria da probabilidade para tomar uma decisão e quantificar o erro associado à tomada dessa decisão.

Assim, os futuros professores devem desenvolver capacidade em:

- Organização de dados.

Saber organizar dados de acordo com técnicas standard para detectar padrões.

- Análise de dados.

Saber observar dados organizados de forma a estimar as características de uma população e conceber experimentações que permitam conjecturar relações entre variáveis.

- Previsão de modelos.

Saber usar a teoria e simulações para estudar distribuições de probabilidade e aplica-las como modelos para fenómenos reais.

- Inferência estatistica.

Usar modelos de probabilidade para tecer conclusões a partir de dados e medir o grau de incerteza de tais conclusões.

- Tecnologia.

Saber utilizar a calculadora e o software computacional disponível em trabalhos de estatística.

As probabilidades também têm aplicações importantes fora do âmbito da estatística, pelo que os futuros professores devem compreender não só o próprio conceito de probabilidade como outros conceitos associados, em particular os de probabilidade condicional e de independência de acontecimentos. É importante que procure desenvolver destreza no cálculo da probabilidade. Mas é sobretudo importante não esquecer que o conceito de probabilidade é um conceito matemático, pelo que a exigência de rigor é essencial, não só no tratamento do tema como na própria resolução de exercícios.

Aplicações às Ciências da Computação

A crescente importância da matemática discreta está relacionada com a utilização dos computadores digitais e os problemas relacionados com a criação de hardware computacional, pelo que os programas de formação de professores do ensino secundário deverão contemplar as ciências da computacão e a matemática com ela relacionada, com destaque para:

- Estruturas discretas e aplicações na programação.
- Análise de algoritmos de recursão
- Utilização da programação para a resolução de problemas.

Assim, os futuros professores deverão conhecer as ideias, métodos e aplicações de:

- Grafos e redes
- Modelos de decisão

Em cada uma destas áreas os futuros professores devem aprender a utilizar o método de indução matemática, ferramenta indispensável na matemática discreta.

Bibliografia

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education.* (Tese de doutoramento, acessível – bem como outros artigos e textos – na homepage de Deborah Ball: http://www-personal.umich.edu/~dball/)

Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: making subject matter knowledge part of the equation. *Advances in research on teaching*, 2, 1-48.

Ball, D.L. & Bass, H. (2004). Knowing mathematics for teaching. In R. Strasser, G. Brandell, B. Grevholm & O. Helenius (Eds.), *Educating for the future*, Goteborg University.

Ball, D.L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: NCTM.

Bass, Hyman, Mathematics, mathematicians, and mathematics education. *Bulletin of the AMS*, 42(4), 417-430.

Bergsten, C.; Botten, G.; Fuglestad, A.; Grevholm, B.; Holden, I. & Lingefjärd, T. (2004). The education and competence development of mathematics teachers in Norway and Sweden. In R.Strasser, G. Brandell, B. Grevholm & O. Helenius (Eds.), *Educating for the future*, Goteborg University.

CBMS (2001). *The mathematical education of teachers*. (Disponível no site da CBMS: http://www.cbmsweb.org/MET_Document/index.htm)

Cuoco, Al. (2001). Mathematics for teaching. *Notices of the AMS*, 48(2), 168-174.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Halmos, P. (1985). *I want to be a mathematician*. New York: Springer-Verlag.

Higham, N. (1993). *Handbook of writing for the mathematical sciences*. Philadelphia: SIAM.

Krantz, Steven (1996). *A primer of mathematical writing*. Providence: AMS.

Krantz, Steven (1996). *Techniques of problem solving*. Providence: AMS.

Krantz, Steven (2000). *Como ensinar matemática – uma perspectiva pessoal*. Lisboa: SPM.

Ma, Liping (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Wu, H. (1997). *On the education of mathematics majors*. (Disponível no site http://math.berkeley.edu/~wu/)

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational research*, 15(2), 4-14.