

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. Tem-se: $x^2 < 4 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x < 2 \Leftrightarrow |x| < 2$ Resposta C

2. A distância do ponto $Q(3, 4)$ à origem é $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
Portanto, a semicircunferência tem raio 5.
O domínio plano sombreado é, portanto, a intersecção do círculo definido pela condição $x^2 + y^2 \leq 25$ com o semiplano definido pela condição $y \geq 4$

Resposta B

3. Os pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(0, 6)$ pertencem à recta r
Portanto, um vector director da recta r é o vector $(2, 0) - (0, 6) = (2, -6)$
Assim, o declive da recta r é $-\frac{6}{2} = -3$

Resposta A

4. A esfera E tem centro na origem do referencial e raio igual a 2.
A recta r contém o ponto $(0, 0, 2)$ e é paralela ao eixo Oy .
Portanto, a intersecção da esfera E com a recta r é o ponto $(0, 0, 2)$

Resposta C

5. A média é igual a $\frac{3 \times 0 + 7 \times 1 + 10 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5}{3 + 7 + 10 + 3 + 1 + 1} =$
 $= \frac{0 + 7 + 20 + 9 + 4 + 5}{25} = \frac{45}{25} = 1,8$

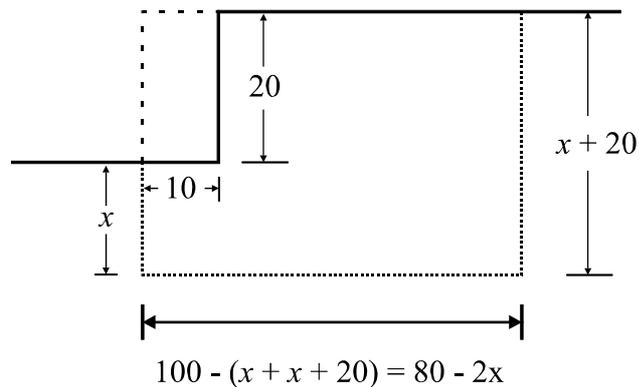
Resposta A

Grupo II

1.1. Relativamente aos lados do jardim que não confinam com o lago, tem-se:

- um tem x metros de comprimento;
- o lado oposto tem $x + 20$ metros de comprimento;
- o terceiro lado tem $100 - (x + x + 20)$ metros de comprimento, pois a rede tem 100 metros.

Tem-se, assim, o seguinte esquema:



Portanto, a área, em m^2 , do jardim, é dada, em função de x , por

$$\begin{aligned} a(x) &= (80 - 2x)(x + 20) - 10 \times 20 = \\ &= 80x + 1600 - 2x^2 - 40x - 200 \\ &= -2x^2 + 40x + 1400 \end{aligned}$$

1.2. $y = -2x^2 + 40x + 1400$ define uma parábola.

Trata-se de encontrar as coordenadas do seu vértice.

$$\text{A abcissa é } -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-4} = 10$$

A ordenada é a imagem da abcissa, ou seja, é

$$a(10) = -2 \times 100 + 40 \times 10 + 1400 = -200 + 400 + 1400 = 1600$$

A área do jardim é máxima para $x = 10$, sendo $1600 m^2$ a área máxima.

- 2.1.** Como um dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox tem abcissa -2 , tal significa que -2 é um zero de f .

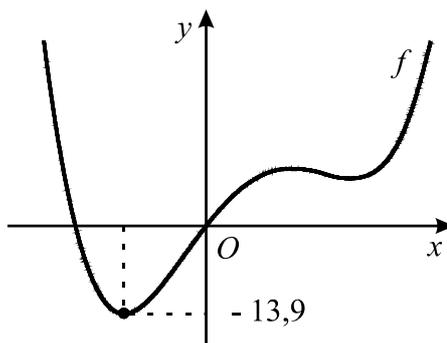
Portanto, o polinómio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$ é divisível por $x + 2$

Façamos a divisão, utilizando a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -3 & -3 & 14 & 0 \\ & & -2 & 10 & -14 & 0 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x &= (x + 2)(x^3 - 5x^2 + 7x) = \\ &= (x + 2) \cdot x \cdot (x^2 - 5x + 7) \end{aligned}$$

- 2.2.** Na figura seguinte está representada parte do gráfico de f .



Assinalou-se no gráfico o ponto de ordenada mínima.

Tem-se, assim, $a \approx -13,9$

- 3.1.** A aresta $[UQ]$ está contida na recta de intersecção dos planos PUQ e RUQ , definidos, respectivamente, pelas equações $x = 2$ e $y = 2$.

A aresta $[UQ]$ é o conjunto dos pontos desta recta que têm cota compreendida entre 0 e

2. Assim, uma condição que define a aresta $[UQ]$ é

$$x = 2 \wedge y = 2 \wedge 0 \leq z \leq 2$$

- 3.2.** Para que o ponto T pertença ao plano mediador do segmento $[AV]$, o ponto T tem de estar a igual distância de A e de V .

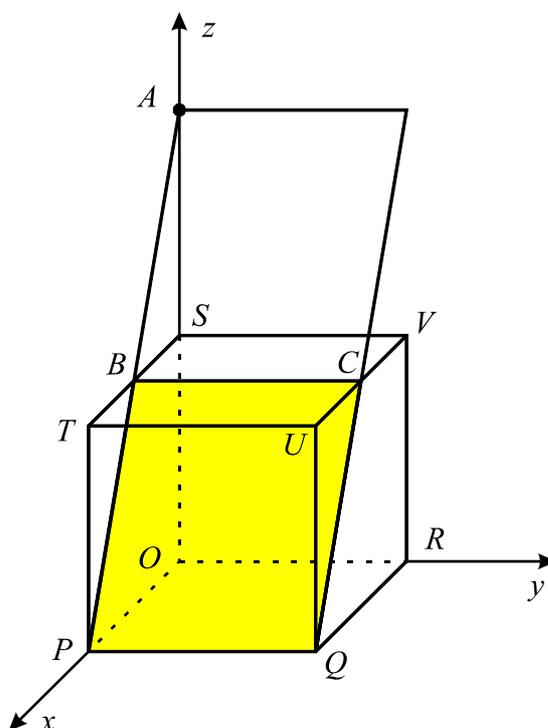
Para determinarmos a distância de T a A podemos ter em conta que as coordenadas de A são $(0, 0, 4)$ e as de T são $(2, 0, 2)$.

A distância de T a A é, portanto, igual a $\sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$

O segmento $[TV]$ é uma diagonal de uma face do cubo, pelo que o seu comprimento é $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Portanto, o ponto T pertence ao plano mediador do segmento $[AV]$

- 3.3.** A secção produzida no cubo pelo plano PQA é o rectângulo colorido na figura.



Dois lados do rectângulo têm comprimento 2 (por serem iguais às arestas do cubo).

Para determinarmos o comprimento de cada um dos outros dois lados, podemos ter em conta que os triângulos $[ABS]$ e $[PTB]$ são iguais, pelo que $\overline{BT} = 1$

Vem, então: $\overline{BP}^2 = \overline{BT}^2 + \overline{PT}^2 \Leftrightarrow \overline{BP}^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BP} = \sqrt{5}$

O perímetro do rectângulo é, portanto, $2 \times 2 + 2 \times \sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5}$