TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. Se uma recta é paralela ao eixo Oz, qualquer vector director dessa recta tem primeira e segunda coordenadas iguais a zero.

Resposta **B**

2. Um plano divide uma esfera em dois sólidos com o mesmo volume se, e só se, contém o centro da esfera. O centro da esfera definida por $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ é o ponto $(0, 0, 2)$. Das quatro equações indicadas, a única que define um plano que contém este ponto é a equação $x = 0$.

Resposta **A**

3. O ponto de coordenadas $(2, 2, 0)$ é o ponto A. O ponto de coordenadas $(0, 4, 0)$ é o ponto C. O plano mediador do segmento de recta $[AC]$ é o plano BDH.

Resposta **C**

4. Se, num prisma, cada uma das bases tem n vértices, então cada uma das bases é um polígono com n lados. Por isso, o prisma tem n faces laterais. Assim, o prisma tem $n+2$ faces (as n faces laterais, mais as duas bases). Como cada base tem n arestas e como existem n arestas laterais, o prisma tem $n+n+n$, ou seja, $3n$, arestas.

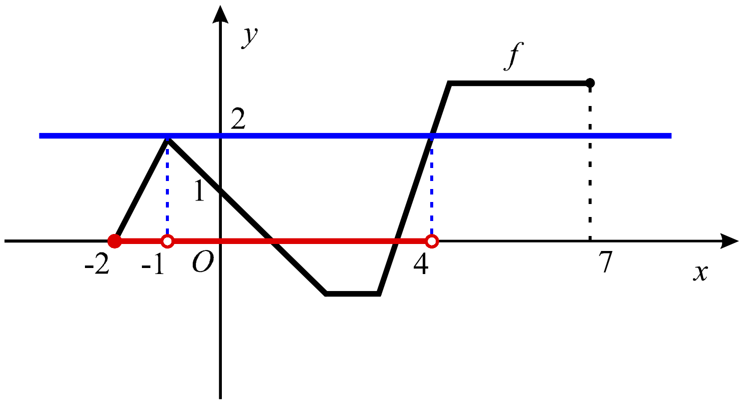
Resposta **D**

5. A distância do ponto P ao ponto E começa por ir aumentando com o decorrer do tempo e atinge o máximo quando o ponto P coincide com o ponto B. Tal permite excluir as alternativas A e C.
No trajecto de B até C, a distância do ponto P ao ponto E não se mantém constante. Tal permite excluir a alternativa B.

Resposta **D**

Grupo II

1. Na figura está o gráfico da função f, bem como a recta de equação $y = 2$.



Da análise da figura, resulta que o conjunto solução da condição $f(x) < 2$ é $[-2, -1[\cup]-1, 4[$

2.1. O ponto B tem coordenadas $(6, 3)$.

Uma vez que a circunferência tem raio 3, o ponto C tem coordenadas $(3, 0)$.

Vamos agora apresentar três processos para resolver o problema.

<u>Primeiro processo:</u>

A mediatriz do segmento $[BC]$ é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes do ponto B e do ponto C. Portanto, um ponto P, de coordenadas (x, y), pertence à mediatriz do segmento $[BC]$ se, e só se, $\overline{PB} = \overline{PC}$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12x + 36 - 6y = -6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6y = 12x - 6x - 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6y = 6x - 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 6$$

Segundo processo:

A mediatriz do segmento $[BC]$ é a recta perpendicular a este segmento que contém o seu ponto médio. Como a recta BC é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares, a mediatriz do segmento $[BC]$ é paralela à bissectriz dos quadrantes pares, pelo que tem declive -1.

Portanto, a mediatriz do segmento $[BC]$ tem equação reduzida da forma $y = -x + b$. Determinemos o valor de b.

O ponto médio do segmento $[BC]$ tem coordenadas $\left(\frac{6+3}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$, ou seja, tem coordenadas $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Substituindo estas coordenadas na equação $y = -x + b$, vem: $\frac{3}{2} = -\frac{9}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{12}{2} \Leftrightarrow b = 6$

Portanto, uma equação da mediatriz do segmento $[BC]$ é $y = -x + 6$

Terceiro processo:

Para mostrar que $y = -x + 6$ é uma equação da mediatriz do segmento $[BC]$, basta mostrar que qualquer ponto da recta de equação $y = -x + 6$ está a igual distância dos pontos B e C.

Qualquer ponto P desta recta tem coordenadas da forma $(x, -x + 6)$

Vamos então verificar que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, se tem $\overline{PB} = \overline{PC}$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (-x+6-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (-x+6-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (-x+3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (-x+6)^2}$$

Esta igualdade é verdadeira para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
Portanto, para qualquer ponto P da recta de equação $y = -x + 6$, tem-se $\overline{PB} = \overline{PC}$

2.2. A região sombreada é limitada pela circunferência de centro na origem do referencial e raio 3 e pela recta BC.

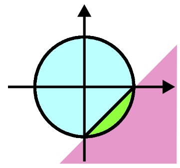
Comecemos por determinar a equação reduzida da recta BC.

Como $\overrightarrow{BC} = C - B = (3,0) - (6,3) = (-3, -3)$, o declive da recta BC é $\frac{-3}{-3} = 1$.

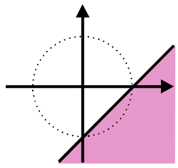
Como a recta BC contém o ponto D, de coordenadas $(0, -3)$, a recta BC tem ordenada na origem igual a -3.

Portanto, a equação reduzida da recta BC é $y = x - 3$.

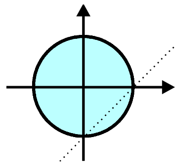
Tal como a figura ao lado ilustra, a região em causa é a intersecção de duas regiões:



- A região definida pela condição $y \leq x - 3$



- A região definida pela condição $x^2 + y^2 \leq 9$



Portanto, uma condição que define a região sombreada, incluindo a fronteira, é

$$y \leq x - 3 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \leq 9$$

2.3. A área da região tracejada é igual à diferença entre a área do trapézio $[ABCO]$ e a quarta parte da área do círculo de raio 3.

Portanto, tem-se:

Área da região tracejada $= \dfrac{6+3}{2} \times 3 - \dfrac{\pi \times 3^2}{4} \approx 6{,}43$

3.1. Como a base da pirâmide está contida no plano xOy, a cota do ponto E é a altura da pirâmide.

Como a aresta do cubo é igual a 2, o volume do cubo é igual a 8.

Portanto, o volume da pirâmide é igual a $10 - 8 = 2$

O volume de uma pirâmide é igual a $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da Base} \times \textit{Altura}$

A base da pirâmide é um quadrado de lado $\sqrt{2}$, pelo que a sua área é igual a 2.

Designando por h a altura da pirâmide, tem-se $\dfrac{1}{3} \times 2 \times h = 2$

Donde vem: $\dfrac{2h}{3} = 2 \Leftrightarrow 2h = 6 \Leftrightarrow h = 3$

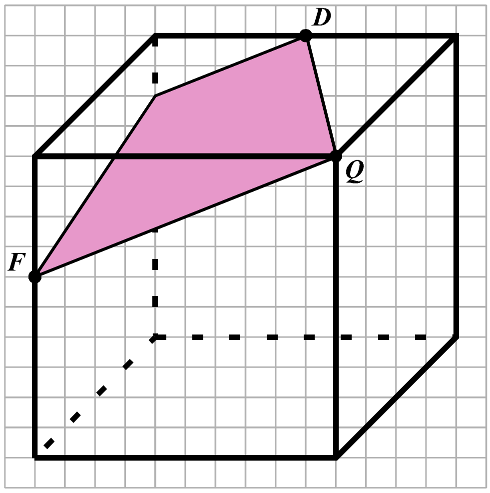
Assim, a cota do ponto E é igual a 3

3.2. O raio da superfície esférica é a distância do ponto T ao ponto C. Atendendo a que o ponto T tem coordenadas $(2, 0, -2)$ e o ponto C tem coordenadas $(1, 2, 0)$, tem-se

$r = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{9} = 3$

Uma equação da superfície esférica é, portanto, $(x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$

3.3. A secção produzida no cubo pelo plano FQD é o **trapézio** representado na figura.



4. Tem-se:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{BE}$

Vem, então:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{DB} + 2\,\overrightarrow{BE} = 2\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}\right) = 2\,\overrightarrow{DE}$

Portanto, $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{DE}$. Daqui resulta que os vectores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DE}$ são colineares, pelo que as rectas AC e DE são paralelas.