TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

GRUPO I

1. Como a recta r passa nos pontos $A(2,0)$ e $B(0,8)$, um vector director da recta r é $\overrightarrow{AB} = (0,8) - (2,0) = (-2,8)$

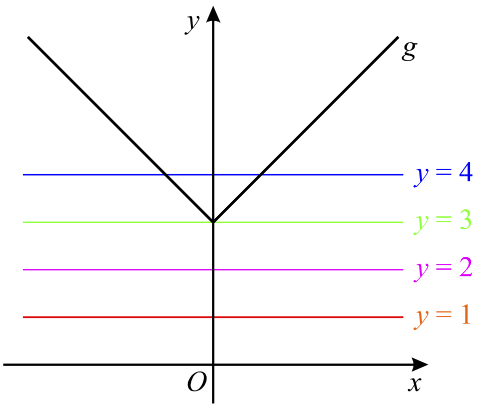
Vem, então, que o declive da recta r é $\frac{8}{-2} = -4$

Como a recta r intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 8, tem-se que a ordenada na origem da recta r é igual a 8

Portanto, a equação reduzida da recta r é $y = -4x + 8$

Resposta **A**

2. Na figura, está representada parte do gráfico da função g, bem como as rectas de equações $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ e $y = 4$



Como se pode observar na figura, apenas a recta de equação $y = 4$ intersecta o gráfico da função g em dois pontos. Portanto, a opção correcta é a opção D.

Este item também pode ser resolvido algebricamente do seguinte modo:

$g(x) = 1 \Leftrightarrow |x| + 3 = 1 \Leftrightarrow |x| = -2$ equação impossível

$g(x) = 2 \Leftrightarrow |x| + 3 = 2 \Leftrightarrow |x| = -1$ equação impossível

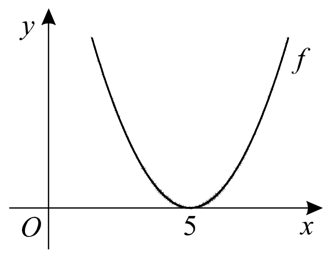
$g(x) = 3 \Leftrightarrow |x| + 3 = 3 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g(x) = 4 \Leftrightarrow |x| + 3 = 4 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \lor x = 1$

Resposta **D**

3. O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e que intersecta o eixo Ox num único ponto.

Portanto, o contradomínio de f é $[0, +\infty[$



Resposta **B**

4. O gráfico da função h pode ser obtido deslocando o gráfico da função f uma unidade para a direita e uma unidade para cima.

Resposta **D**

5. $g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Resposta **C**

GRUPO II

1.1. O ponto Q tem coordenadas $(5, 5, 0)$

A distância do ponto Q ao ponto O é $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$

Assim, uma equação da superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O é $(x-5)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 50$

1.2. A área da base da pirâmide é $5^2 = 25$

Designando por h a altura da pirâmide, tem-se $\frac{25\,h}{3} = 75$

Vem, então: $\frac{25\,h}{3} = 75 \Leftrightarrow 25\,h = 225 \Leftrightarrow h = 9$

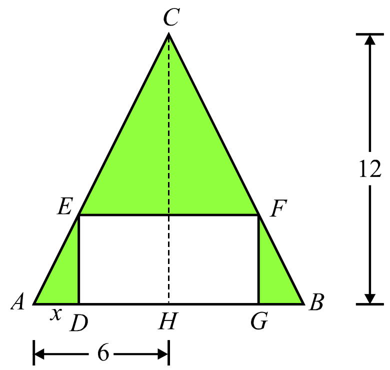
Portanto, as coordenadas do ponto W são $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 9\right)$

2. As funções f e g podem estar representadas graficamente na opção A.

A opção B está incorrecta, pois a Fernanda e a Gabriela percorrem a mesma distância, ao contrário do que é sugerido pelos gráficos apresentados nesta opção.

A opção C está incorrecta, pois, no instante inicial, a distância da Fernanda a casa é zero, ao contrário do que é sugerido pelo gráfico da função f apresentado nesta opção.

3.1. A área da zona relvada é dada pela diferença entre a área do triângulo $[ABC]$ e a área do rectângulo $[DEFG]$



Os triângulos $[AHC]$ e $[ADE]$ são semelhantes, pelo que, sendo $\overline{CH} = 2\,\overline{AH}$, se tem $\overline{ED} = 2\,\overline{AD}$

Portanto, $\overline{ED} = 2x$

Como $\overline{DG} = 12 - 2x$, vem que a área do rectângulo $[DEFG]$ é dada, em função de x, por $2x(12-2x)$

Então, a área da zona relvada é dada, em função de x, por

$$S(x) = \frac{12 \times 12}{2} - 2x\,(12 - 2x) = 4x^2 - 24x + 72$$

3.2. Tem-se:

$$4x^2 - 24x + 72 = 4\,(x^2 - 6x) + 72 =$$
$$= 4\,(x^2 - 6x + 9) - 36 + 72 = 4(x-3)^2 + 36$$

Portanto, o gráfico da função S é parte de uma parábola, com a concavidade voltada para cima, cujo vértice é o ponto de coordenadas $(3, 36)$

Assim, o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima é 3 e a respectiva área é 36

3.3. Uma condição que traduz o problema é $4x^2 - 24x + 72 > 40 \ \wedge \ x \in \left]0, 6\right[$

Tem-se: $4x^2 - 24x + 72 > 40 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 32 > 0$

Ora, $4x^2 - 24x + 32 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

Portanto, $4x^2 - 24x + 32 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 4$

Como $x \in \left]0, 6\right[$, o conjunto dos valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a $40\,m^2$ é $\left]0, 2\right[\cup \left]4, 6\right[$

4.1. Como o gráfico da função f intersecta o eixo das abcissas em quatro pontos, a função f tem quatro zeros. Como um dos pontos tem abcissa -3 e outro tem abcissa 1, dois dos quatro zeros da função f são -3 e 1

Portanto, o polinómio $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ é divisível por $(x+3)(x-1)$

Determinemos o quociente da divisão de $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ por $x+3$, utilizando a Regra de Ruffini.

	1	1	-7	-1	6
-3		-3	6	3	-6
	1	-2	-1	2	0

Determinemos agora o quociente da divisão de $x^3 - 2x^2 - x + 2$ por $x-1$, utilizando novamente a Regra de Ruffini.

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

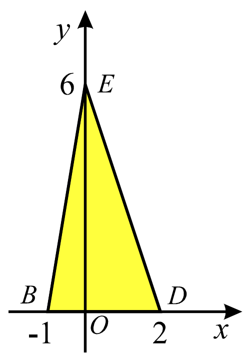
Portanto, $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x+3)(x-1)(x^2 - x - 2)$

Tem-se $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

Portanto, os quatro zeros da função f são -3, -1, 1 e 2

Assim, o ponto B tem abcissa -1 e o ponto D tem abcissa 2

Como $f(0) = 6$, o ponto E tem ordenada 6

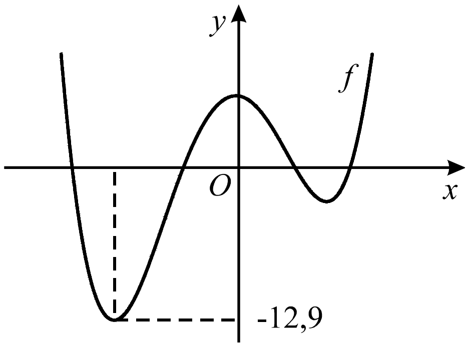


Tomando $[BD]$ para base do triângulo $[BED]$, a altura correspondente é $[OE]$

Tem-se $\overline{BD} = 3$ e $\overline{OE} = 6$

Portanto, a área do triângulo $[BED]$ é $\dfrac{3 \times 6}{2} = 9$

4.2. Na figura, está representada parte do gráfico da função f



Assinalou-se no gráfico o ponto de ordenada mínima.

Tem-se, $a \approx -12{,}9$