GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Teste Intermédio de Matemática A

Versão 2

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 16.03.2012

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(C)**

As opções **(A)**, **(B)** e **(D)** devem ser excluídas, pois os pontos $(1,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 2,\ 1)$ e $(1,\ 1,\ 1)$ não pertencem a qualquer aresta do cubo, porque o ponto $(1,\ 1,\ 0)$ é o centro da face $[OPQR]$, o ponto $(1,\ 2,\ 1)$ é o centro da face $[QRSV]$ e o ponto $(1,\ 1,\ 1)$ é o centro do cubo.

A opção correta é a **(C)**, porque o ponto $(2,\ 1,\ 0)$ é o ponto médio da aresta $[PQ]$

2. Resposta **(B)**

A reta t passa no ponto $(-3,\ 2,\ 1)$ e é paralela ao eixo Oy

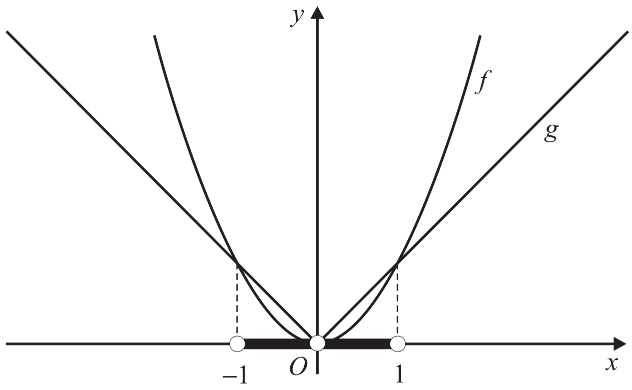
A opção **(A)** deve ser rejeitada, pois define o eixo Oy, que não passa no ponto $(-3,\ 2,\ 1)$

A opção **(C)** deve ser rejeitada, pois define uma reta paralela ao eixo Ox

A opção **(D)** deve ser rejeitada, pois define uma reta paralela ao eixo Oz

3. Resposta **(C)**

Na figura, estão representadas as funções f e g



Como se pode observar, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$

4. Resposta **(A)**

As duas semirretas cuja união é o gráfico da função h têm origem no ponto de abcissa -2 e não no ponto de abcissa 0. Tal facto permite excluir as opções **(C)** e **(D)**.

Na opção **(B)**, a imagem de 0 é -2. Tal facto permite excluir esta opção, pois, de acordo com o gráfico, $h(0) = 2$

5. Resposta **(B)**

Na opção **(A)**, só a segunda afirmação é verdadeira. Nas opções **(C)** e **(D)**, apenas a terceira afirmação é verdadeira.

GRUPO II

1.1. Como a reta r tem declive -2 e ordenada na origem -1, as coordenadas de um vetor diretor da reta r são $(1, -2)$ e as coordenadas de um ponto da reta são $(0, -1)$

Portanto, uma equação vetorial da reta r é: $(x, y) = (0, -1) + k(1, -2),\ k \in \mathbb{R}$

1.2. Seja s a reta paralela à reta r que passa no ponto A. A reta s tem declive -2, pois é paralela à reta r, e tem ordenada na origem -2, pois passa no ponto A

Portanto, a equação reduzida da reta s é: $y = -2x - 2$

1.3. A região representada a sombreado é limitada pela circunferência que tem centro no ponto $A(0, -2)$ e raio 2, pelo eixo Oy e pela reta r

Uma condição que define esta região, incluindo a sua fronteira, é:

$x^2 + (y+2)^2 \leq 4 \wedge x \leq 0 \wedge y \leq -2x - 1$

2.1. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Como $\overline{AD} = 6\,\text{dm}$ e $\overline{ED} = 2\overline{AE}$, conclui-se que $\overline{AE} = 2\,\text{dm}$ e $\overline{ED} = 4\,\text{dm}$

A área do quadrado $[ABCD]$ é $36\,\text{dm}^2$ e a área dos quatro triângulos é $4 \times \frac{4 \times 2}{2} = 16\,(\text{dm}^2)$

Portanto, a área do quadrado $[EFGH]$ é $20\,\text{dm}^2$

2.º Processo

Como $\overline{AD} = 6\,\text{dm}$ e $\overline{ED} = 2\overline{AE}$, conclui-se que $\overline{AE} = 2\,\text{dm}$ e $\overline{ED} = 4\,\text{dm}$

O triângulo $[EDH]$ é retângulo, pelo que $\overline{EH}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{ED}^2$

Como $\overline{DH} = \overline{AE} = 2\,\text{dm}$ e $\overline{ED} = 4\,\text{dm}$, $\overline{EH}^2 = 4 + 16 \Leftrightarrow \overline{EH} = \sqrt{20}\,(\text{dm})$

Portanto, a área do quadrado $[EFGH]$ é $\left(\sqrt{20}\right)^2 = 20(\text{dm}^2)$

2.2. As pirâmides de vértice V e bases $[EFGH]$ e $[IJKL]$ são semelhantes.

Como a área do quadrado $[EFGH]$ é $20\,\text{dm}^2$ e a área do quadrado $[IJKL]$ é $180\,\text{dm}^2$, e como $\frac{20}{180} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$, concluímos que a pirâmide $[EFGHV]$ é uma redução de razão $\frac{1}{3}$ da pirâmide $[IJKLV]$. Logo, a altura da pirâmide $[EFGHV]$ é $\frac{1}{3}$ da altura da pirâmide $[IJKLV]$, ou seja, $16\,\text{dm}$

Assim, $d = 48 - 16 = 32$

Portanto, a distância, d, entre a peça metálica e a base da pirâmide é $32\,\text{dm}$

3.1. Tem-se $D'_f = [-2, +\infty[$

Portanto, $D'_g = \,]-\infty, 2]$, $D'_h = [1, +\infty[$ e $D'_j = [-2, +\infty[$

3.2. Como o gráfico da função f é uma parábola de vértice no ponto $(4, -2)$, tem-se $h = 4$ e $k = -2$
Tem-se, então, $f(x) = a(x-4)^2 - 2$, sendo a um número real.

Como o ponto $(0, 2)$ pertence ao gráfico da função f, tem-se

$2 = a(0-4)^2 - 2 \Leftrightarrow 2 = 16a - 2 \Leftrightarrow 16a = 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

Assim, $h = 4$, $k = -2$ e $a = \frac{1}{4}$

4.1. Para $x \in \,]-2, 8[$, o quadrilátero $[ABPQ]$ é um trapézio de base maior $\overline{AB}$, base menor $\overline{QP}$ e altura $\overline{QA}$

Tem-se: $-2x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 8$. Portanto, $\overline{AB} = 8 + 2 = 10$

O ponto P tem abcissa x, logo, $\overline{QP} = \left|x - (-2)\right| = |x + 2| = x + 2$ (para $x > -2$, tem-se $x + 2 > 0$)

O ponto P tem ordenada $-2x + 16$ e, como a ordenada do ponto Q é igual à ordenada do ponto P, tem-se $\overline{QA} = -2x + 16$

Assim, a área do trapézio $[ABPQ]$ é dada, em função de x, por

$$S(x)=\frac{10+x+2}{2}\times(-2x+16)=\frac{-24x+192-2x^2+16x}{2}=\frac{-2x^2-8x+192}{2}=-x^2-4x+96$$

4.2. Uma condição que traduz o problema é:

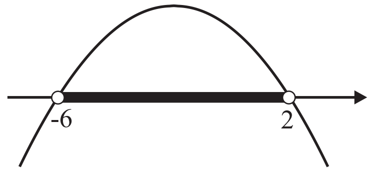
$-x^2-4x+96>84 \ \wedge \ x\in\,]-2,8[$

Tem-se:

$-x^2-4x+96>84 \Leftrightarrow -x^2-4x+96-84>0 \Leftrightarrow -x^2-4x+12>0$

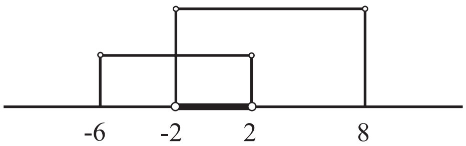
Como $-x^2-4x+12=0 \Leftrightarrow x=-6 \vee x=2$, vem

$-x^2-4x+12>0 \Leftrightarrow -6<x<2$



Então,

$-x^2-4x+96>84 \ \wedge \ x\in\,]-2,8[\ \Leftrightarrow \ x\in\,]-6,2[\,\cap\,]-2,8[$



Portanto, o conjunto dos valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 84 é $]-2,2[$