

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

10 de Maio de 2007

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. As assíntotas do gráfico da função definida por $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ são as rectas de equações $y = a$ e $x = b$.

Tem-se, assim, que $a > 0 \wedge b < 0$

Resposta **B**

2. Na fracção $\frac{x^2+1}{2-x}$ o numerador é positivo, para qualquer x real, pelo que a fracção é negativa quando o denominador o for.

Ora, $2-x < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$

Resposta **D**

3. $f^{-1}(2) + (g \circ h)(\sqrt{2}) = 3 + g[h(\sqrt{2})] =$
 $= 3 + g(1) = 3 + 3 = 6$

Resposta **C**

4. Tem-se que $f'(x) = -2x$, pelo que $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

O declive da recta t é, portanto, -1 , pelo que a sua inclinação é $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Resposta **C**

5. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| \times \cos(\widehat{ADAE}) =$
 $= 12 \times 15 \times \frac{4}{5} = 144$

Resposta **D**

6. $5 + 2 \cos x = 6 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, as soluções desta equação são

$\frac{\pi}{3}$ e $2\pi - \frac{\pi}{3}$, ou seja, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$

Resposta **B**

7. O valor máximo da função objectivo de um problema de Programação Linear é atingido num vértice da região admissível.

Os vértices da região representada são:

$$(0, 0)$$

$$(0, 6) \rightarrow \text{intersecção do eixo } Oy \text{ com a recta de equação } y = 6$$

$$(3, 6) \rightarrow \text{intersecção das rectas de equações } y = 6 \text{ e } 2x + y = 12$$

$$(5, 2) \rightarrow \text{intersecção das rectas de equações } x = 5 \text{ e } 2x + y = 12$$

$$(5, 0) \rightarrow \text{intersecção do eixo } Ox \text{ com a recta de equação } x = 5$$

Calculemos o valor da função objectivo, $z = x + y$, em cada um destes pontos:

$$(0, 0) \rightarrow z = 0 + 0 = 0$$

$$(0, 6) \rightarrow z = 0 + 6 = 6$$

$$(3, 6) \rightarrow z = 3 + 6 = 9$$

$$(5, 2) \rightarrow z = 5 + 2 = 7$$

$$(5, 0) \rightarrow z = 5 + 0 = 5$$

Assim, o valor máximo que a função objectivo pode alcançar na região representada é 9.

Resposta **B**

Grupo II

1.

1.1. Tem-se: $v'(t) = 3t^2 - 30t + 63$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 30t + 63 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 21}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{10 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \vee t = 7$$

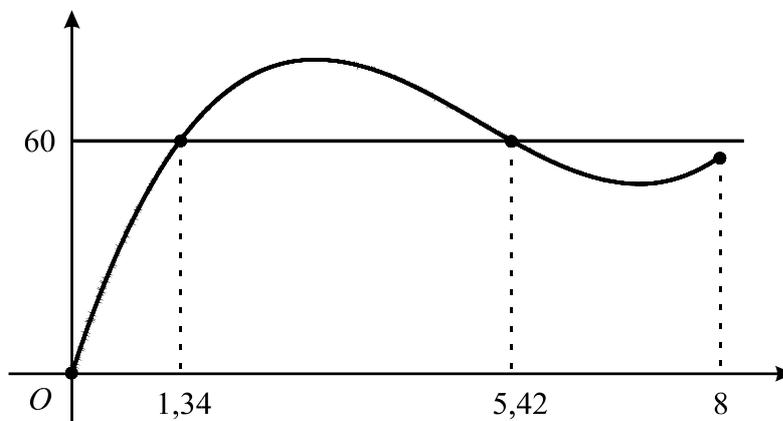
t	0		3		7		8
$v'(t)$	+	+	0	-	0	+	+
$v(t)$	0	↗	81	↘	49	↗	56

Portanto, a velocidade máxima atingida, nos primeiros oito minutos da experiência, foi de 81 centenas de rotações por minuto.

1.2. Começemos por observar que 6 000 (rotações por minuto) é igual a 60 centenas (de rotações por minuto).

Temos, assim, de começar por resolver a inequação $v(t) > 60$.

Na figura está representado o gráfico da função v , bem como a recta de equação $y = 60$.



Assinalaram-se os pontos de intersecção do gráfico de v com a recta, bem como as respectivas abcissas, com duas casas decimais, conforme era pedido no enunciado.

Portanto, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 6 000 rotações por minuto durante $5,42 - 1,34$ minutos, ou seja, durante 4,08 minutos.

Atendendo a que $0,08 \times 60 \approx 5$, podemos concluir que a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 6 000 rotações por minuto durante 4 minutos e 5 segundos.

2.

2.1. Começemos por determinar uma equação do plano α .

Um vector normal ao plano α é o vector de coordenadas $(1, 0, 2)$.

Portanto, o plano α pode ser definido por uma equação do tipo $x + 2z = d$

Como o plano α contém o ponto $P(0, 4, 3)$, vem $0 + 2 \times 3 = d$, ou seja, $d = 6$.

Uma equação do plano α é, portanto, $x + 2z = 6$.

O centro da esfera é o ponto de coordenadas $(-2, 1, 4)$. Substituindo estas coordenadas na equação $x + 2z = 6$ vem $-2 + 2 \times 4 = 6$, o que é verdade, pelo que o plano α contém o centro da esfera.

Assim, a secção produzida pelo plano α na esfera é um círculo cujo centro coincide com o centro da esfera e cujo raio é igual ao da esfera.

Como a área de um círculo é dada por πr^2 , a área da secção é igual a 3π .

2.2.1. O perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{PQ}$

Tem-se que:

$$\overline{OP}^2 = 3^2 + 4^2, \text{ pelo que } \overline{OP} = 5$$

$$\overline{OQ} = z$$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \|\vec{PQ}\| = \|Q - P\| = \\ &= \|(0, 0, z) - (0, 4, 3)\| = \\ &= \|(0, -4, z - 3)\| = \sqrt{0 + 16 + (z - 3)^2} = \\ &= \sqrt{16 + z^2 - 6z + 9} = \sqrt{z^2 - 6z + 25}\end{aligned}$$

Portanto, o perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$

2.2.2. Tem-se:

$$\begin{aligned}z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25} &= 16 \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 6z + 25} = 16 - z - 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 6z + 25} &= 11 - z \Rightarrow \left(\sqrt{z^2 - 6z + 25}\right)^2 = (11 - z)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z^2 - 6z + 25 &= 121 - 22z + z^2 \Leftrightarrow 22z - 6z = 121 - 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16z &= 96 \Leftrightarrow z = 6\end{aligned}$$

Como, num passo da resolução, se elevaram ambos os membros da equação ao quadrado, não é possível garantir que 6 é solução da equação inicial. Temos de verificar se assim é:

$$6 + 5 + \sqrt{6^2 - 6 \times 6 + 25} = 16 \Leftrightarrow 16 = 16, \text{ o que é verdade.}$$

Portanto, 6 é solução da equação inicial.

Assim, o ponto Q deve ter cota 6, de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 16.

3.

3.1. Resulta da figura que $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$

Pretende-se saber $5 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos (3\pi - \alpha)$

Ora, $5 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos (3\pi - \alpha) = 5 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = 3 \cos \alpha$

Portanto, sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$ e queremos saber o valor de $3 \cos \alpha$

Tem-se: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Vem, então: $1 + (\sqrt{8})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$$

Como α é um ângulo cujo lado extremidade está no terceiro quadrante, tem-se que $\cos \alpha < 0$.

Portanto, $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Vem então que $3 \cos \alpha = -1$

3.2. Apresentamos a seguir três possíveis processos de resolução:

1º Processo:

Seja β a amplitude do ângulo QOP .

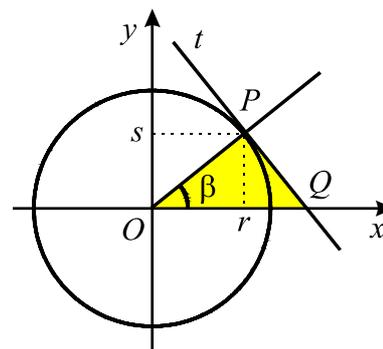
Por um lado, tem-se que $\cos \beta = r$

Por outro lado, tem-se que

$$\cos \beta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\overline{OQ}}$$

Portanto, $\frac{1}{\overline{OQ}} = r$, donde $\overline{OQ} = \frac{1}{r}$

Portanto, a recta t intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{1}{r}$



2º Processo:

Seja x a abcissa do ponto Q . Como este ponto pertence ao eixo Ox , a sua ordenada é zero.

Tem-se assim que Q tem coordenadas $(x, 0)$.

Como a recta t é tangente à circunferência no ponto P , os vectores \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{PQ} são perpendiculares, pelo que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.

Como $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, 0) - (r, s) = (x - r, -s)$, vem:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (r, s) \cdot (x - r, -s) = 0 \Leftrightarrow rx - r^2 - s^2 = 0 \Leftrightarrow rx = r^2 + s^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{r}$$

3º Processo:

Tem-se que $\overrightarrow{OP} = (r, s)$, pelo que um vector director da recta t é o vector $\vec{u} = (-s, r)$

O declive da recta t é, portanto, igual a $-\frac{r}{s}$

A equação reduzida da recta t é, assim, da forma $y = -\frac{r}{s}x + b$

Como o ponto $P(r, s)$ pertence a esta recta, tem-se que $s = -\frac{r}{s}r + b$,

$$\text{donde vem } b = s + \frac{r}{s}r = s + \frac{r^2}{s} = \frac{s^2 + r^2}{s} = \frac{1}{s}$$

A equação reduzida da recta t é $y = -\frac{r}{s}x + \frac{1}{s}$

A abcissa do ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox é a solução da equação

$$0 = -\frac{r}{s}x + \frac{1}{s} \quad (\text{onde } x \text{ é a incógnita}).$$

$$\text{Ora, } 0 = -\frac{r}{s}x + \frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{r}{s}x = \frac{1}{s} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{r}{s}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{s} \times \frac{s}{r} \Leftrightarrow x = \frac{1}{r}$$