gabinete de avaliação educacional

Ministério da Educação

TESTE INTERMÉDIO

11.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos**

10/Maio/2007

MATEMÁTICA A

VERSÃO 2

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

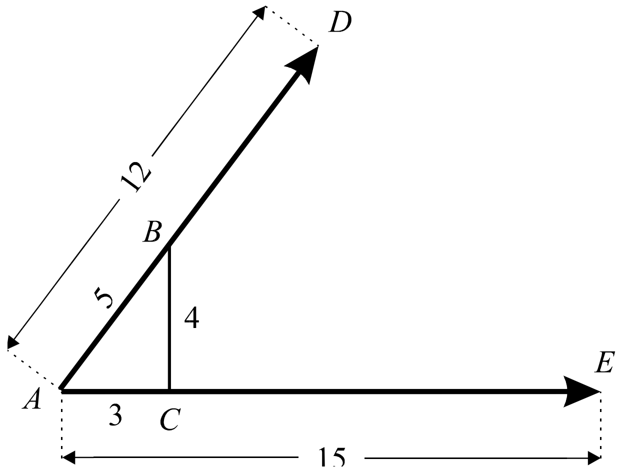
O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura estão representados dois vectores, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$, de normas 12 e 15, respectivamente.
No segmento de recta $[AD]$ está assinalado um ponto B.
No segmento de recta $[AE]$ está assinalado um ponto C.
O triângulo $[ABC]$ é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.



Indique o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \,.\, \overrightarrow{AE}$

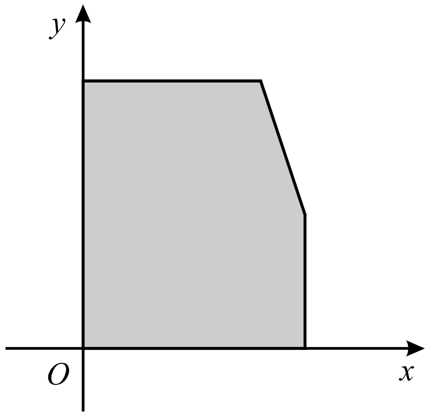
(A) 108 **(B)** 128 **(C)** 134 **(D)** 144

2. Indique as soluções da equação $4 + 2\,\text{sen}\,x = 5$ que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$

(A) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$

3. Na figura junta está representada a região admissível de um problema de Programação Linear. Esta região corresponde ao sistema

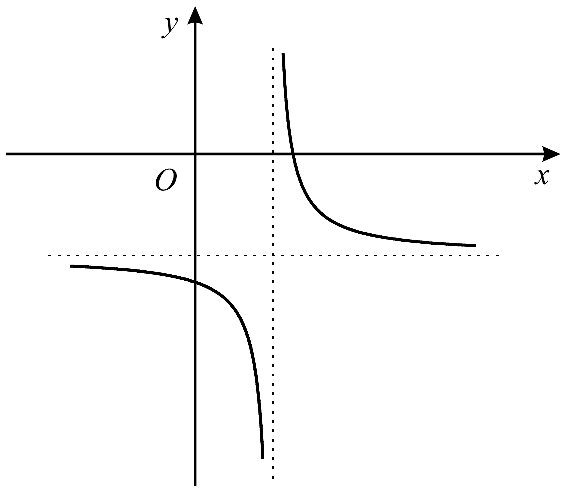


$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 6 \\ 3x + y \leq 18 \end{cases}$$

Qual é o valor máximo que a função objectivo, definida por $z = x + y$, pode alcançar nesta região?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 14

4. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x - b}$ define a função f cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \quad \wedge \quad b > 0$ **(B)** $a > 0 \quad \wedge \quad b < 0$

(C) $a < 0 \quad \wedge \quad b > 0$ **(D)** $a < 0 \quad \wedge \quad b < 0$

5. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2+4}{1-x} > 0$

(A) $]-2,1[$ **(B)** $]1,2[$ **(C)** $]-\infty,1[$ **(D)** $]1,+\infty[$

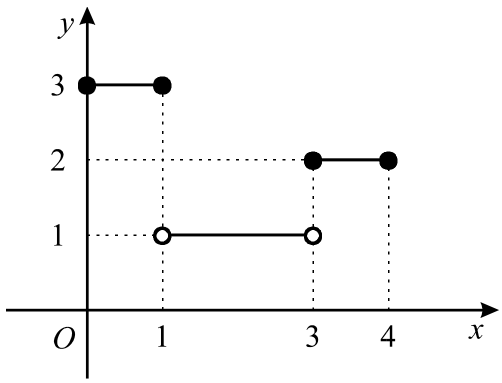
6. Considere as seguintes funções:

$f:\{1,2,3\}\rightarrow\{1,2,3\}$ definida pela tabela

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

$g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=2\,x+1$

$h:[0,4]\rightarrow\{1,2,3\}$ cujo gráfico é



Indique o valor de $f^{-1}(1)\;+\;(g\circ h)\,(\pi)$

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3+x^2$

Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $-\frac{1}{2}$

Qual é a inclinação da recta t ?

(A) $30°$ **(B)** $45°$ **(C)** $135°$ **(D)** $150°$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $P\,(0,3,4)$

1.1. Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à recta de equação vectorial $(x,y,z)=(-1,0,5)+k\,(2,1,0),\ k\in\mathbb{R}$

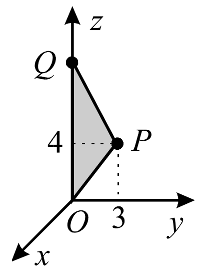
Determine a área da secção produzida pelo plano α na esfera definida pela condição $(x+1)^2+(y-5)^2+(z-4)^2\leq 7$.

Sugere-se que:

- *Determine uma equação do plano α.*
- *Mostre que o centro da esfera pertence ao plano α.*
- *Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.*

1.2. Admita que um ponto Q se desloca ao longo do semieixo positivo Oz, nunca coincidindo com a origem O do referencial.

Seja f a função que faz corresponder, à cota z do ponto Q, o perímetro do triângulo $[OPQ]$.



1.2.1. Mostre que $f(z)=z+5+\sqrt{z^2-8z+25}$

1.2.2. **Sem recorrer à calculadora**, determine a cota do ponto Q de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 18.

2. Durante os ensaios de um motor, a velocidade de rotação do seu eixo variou, ao longo dos primeiros seis minutos da experiência, de acordo com a função

$$v(t)=2\,t^3-21\,t^2+60\,t$$

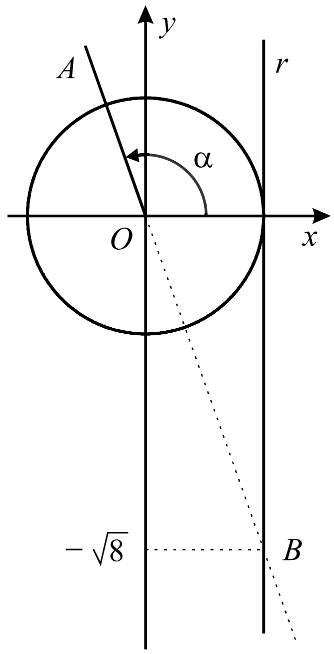
onde t designa o tempo (medido em minutos), contado a partir do início da experiência, e $v(t)$ designa a velocidade de rotação do eixo do motor (medida em **centenas** de rotações por minuto).

2.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine qual foi a velocidade máxima atingida, nos primeiros seis minutos da experiência. Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto.

2.2. Recorrendo às **capacidades gráficas da calculadora**, determine durante quanto tempo é que, nos primeiros seis minutos da experiência, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a $4\,600$ rotações por minuto. Escreva o **resultado final em minutos e segundos** (com o número de segundos arredondado às unidades).
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtidos, bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema (apresente as **abcissas com duas casas decimais**).

3.

3.1. Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy:



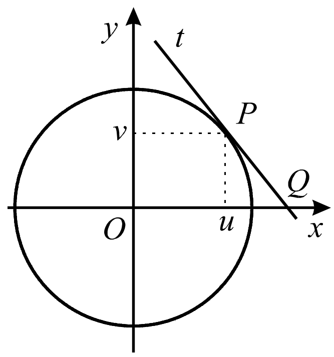
- o círculo trigonométrico
- a recta r, de equação $x = 1$
- o ângulo, de amplitude α, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}A$
- o ponto B, intersecção do prolongamento da semi-recta $\dot{O}A$ com a recta r.

Como a figura sugere, a ordenada de B é $-\sqrt{8}$

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$8\cos\,(4\pi - \alpha) + 2\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

3.2. Considere agora um ponto P, do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.



Sejam (u, v) as coordenadas do ponto P.

Seja t a recta tangente à circunferência no ponto P.

Seja Q o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox.

Prove que a abcissa do ponto Q é $\dfrac{1}{u}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 57
1.1. 19
1.2. 38
1.2.1. 19
1.2.2. 19

2. 40
2.1. 20
2.2. 20

3. 40
3.1. 20
3.2. 20

TOTAL **200**