TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

10 de Maio de 2007

RESOLUÇÃO - VERSÃO 4

Grupo I

1. As assimptotas do gráfico da função definida por $f(x) = a + \dfrac{1}{x-b}$
são as rectas de equações $y = a$ e $x = b$.
Tem-se, assim, que $a < 0 \quad \wedge \quad b > 0$

Resposta **B**

2. Na fracção $\dfrac{x^2+4}{1-x}$ o numerador é positivo, para qualquer x real,
pelo que a fracção é positiva quando o denominador o for.
Ora, $1 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

Resposta **A**

3. $f^{-1}(1) + (g \circ h)(\pi) = 2 + g\big[h(\pi)\big] =$
$= 2 + g(2) = 2 + 5 = 7$

Resposta **A**

4. Tem-se que $f'(x) = 2x$, pelo que $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$
O declive da recta t é, portanto, -1, pelo que a sua inclinação é
$180° - 45° = 135°$

Resposta **B**

5. $\overrightarrow{AD} \,.\, \overrightarrow{AE} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AD} \,\widehat{\ }\, \overrightarrow{AE}\right) =$
$= 12 \times 15 \times \dfrac{3}{5} = 108$

Resposta **D**

6. $4 + 2\,\text{sen}\,x = 5 \Leftrightarrow \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$
No intervalo $[0, 2\pi]$, as soluções desta equação são
$\dfrac{\pi}{6}$ e $\pi - \dfrac{\pi}{6}$, ou seja, $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5\pi}{6}$

Resposta **A**

7. O valor máximo da função objectivo de um problema de Programação Linear é atingido num vértice da região admissível.
Os vértices da região representada são:

$(0,0)$
$(0,6) \rightarrow$ intersecção do eixo Oy com a recta de equação $y=6$
$(4,6) \rightarrow$ intersecção das rectas de equações $y=6$ e $3x+y=18$
$(5,3) \rightarrow$ intersecção das rectas de equações $x=5$ e $3x+y=18$
$(5,0) \rightarrow$ intersecção do eixo Ox com a recta de equação $x=5$

Calculemos o valor da função objectivo, $z=x+y$, em cada um destes pontos:

$(0,0) \rightarrow z=0+0=0$
$(0,6) \rightarrow z=0+6=6$
$(4,6) \rightarrow z=4+6=10$
$(5,3) \rightarrow z=5+3=8$
$(5,0) \rightarrow z=5+0=5$

Assim, o valor máximo que a função objectivo pode alcançar na região representada é 10.

$\boxed{\text{Resposta } \mathbf{C}}$

Grupo II

1.

1.1. Tem-se: $v'(t) = 6t^2 - 42t + 60$

$$v'(t)=0 \Leftrightarrow 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

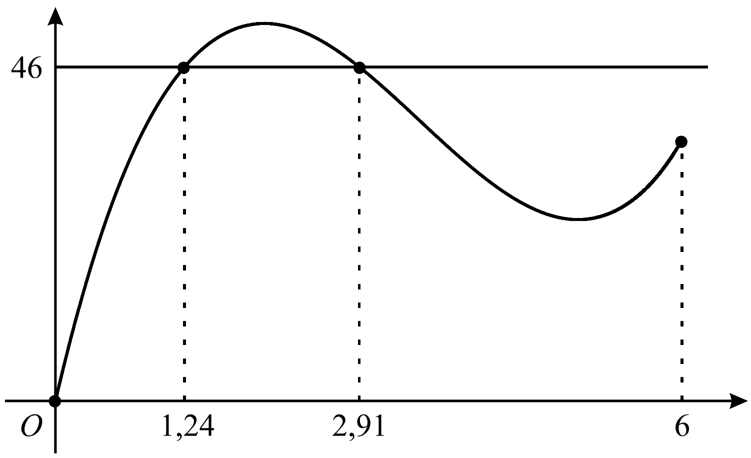
$$\Leftrightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 1 \times 10}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=2 \vee t=5$$

t	0		2		5		6
$v'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$v(t)$	0	$\nearrow$	52	$\searrow$	25	$\nearrow$	36

Portanto, a velocidade máxima atingida, nos primeiros seis minutos da experiência, foi de 52 centenas de rotações por minuto.

1.2. Comecemos por observar que $4\,600$ (rotações por minuto) é igual a 46 centenas (de rotações por minuto).
Temos, assim, de começar por resolver a inequação $v(t) > 46$.
Na figura está representado o gráfico da função v, bem como a recta de equação $y = 46$.



Assinalaram-se os pontos de intersecção do gráfico de v com a recta, bem como as respectivas abcissas, com duas casas decimais, conforme era pedido no enunciado.

Portanto, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a $4\,600$ rotações por minuto durante $2{,}91 - 1{,}24$ minutos, ou seja, durante $1{,}67$ minutos.

Atendendo a que $0{,}67 \times 60 \approx 40$, podemos concluir que a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a $4\,600$ rotações por minuto durante 1 minuto e 40 segundos.

2.

2.1. Comecemos por determinar uma equação do plano α.
Um vector normal ao plano α é o vector de coordenadas $(2, 1, 0)$.
Portanto, o plano α pode ser definido por uma equação do tipo $2x + y = d$
Como o plano α contém o ponto $P(0, 3, 4)$, vem $2 \times 0 + 3 = d$, ou seja, $d = 3$.
Uma equação do plano α é, portanto, $2x + y = 3$.
O centro da esfera é o ponto de coordenadas $(-1, 5, 4)$. Substituindo estas coordenadas na equação $2x + y = 3$ vem $2 \times (-1) + 5 = 3$, o que é verdade, pelo que o plano α contém o centro da esfera.
Assim, a secção produzida pelo plano α na esfera é um círculo cujo centro coincide com o centro da esfera e cujo raio é igual ao da esfera.
Como a área de um círculo é dada por $\pi\, r^2$, a área da secção é igual a 7π.

2.2.1. O perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $\overline{OP}+\overline{OQ}+\overline{PQ}$

Tem-se que:

$\overline{OP}^2 = 3^2+4^2$, pelo que $\overline{OP}=5$

$\overline{OQ}=z$

$$\overline{PQ} = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \|Q-P\| =$$

$$= \|(0,0,z)-(0,3,4)\| =$$

$$= \|(0,\,-3,z-4)\| = \sqrt{0+9+(z-4)^2} =$$

$$= \sqrt{9+z^2-8\,z\,+\,16} = \sqrt{z^2-8\,z\,+\,25}$$

Portanto, o perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $z+5+\sqrt{z^2-8\,z\,+\,25}$

2.2.2. Tem-se:

$$z+5+\sqrt{z^2-8\,z\,+\,25}=18 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{z^2-8\,z\,+\,25}=18-z-5 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sqrt{z^2-8\,z\,+\,25}=13-z \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{z^2-8\,z\,+\,25}\right)^2=(13-z)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; z^2-8\,z\,+\,25=169-26\,z\,+\,z^2 \;\Leftrightarrow\; 26\,z\,-\,8z\,=\,169-25 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 18\,z\,=\,144 \;\Leftrightarrow\; z\,=\,8$$

Como, num passo da resolução, se elevaram ambos os membros da equação ao quadrado, não é possível garantir que 8 é solução da equação inicial. Temos de verificar se assim é:

$8+5+\sqrt{8^2-8\times 8\,+\,25}=18 \;\Leftrightarrow\; 18=18$, o que é verdade.

Portanto, 8 é solução da equação inicial.

Assim, o ponto Q deve ter cota 8, de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 18.

3.

3.1. Resulta da figura que $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$

Pretende-se saber $8 \cos (4\pi - \alpha) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

Ora, $8 \cos (4\pi - \alpha) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 8 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = 6 \cos \alpha$

Portanto, sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$ e queremos saber o valor de $6 \cos \alpha$

Tem-se: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Vem, então: $1 + \left(-\sqrt{8}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$

Como α é um ângulo cujo lado extremidade está no segundo quadrante, tem-se que $\cos \alpha < 0$.

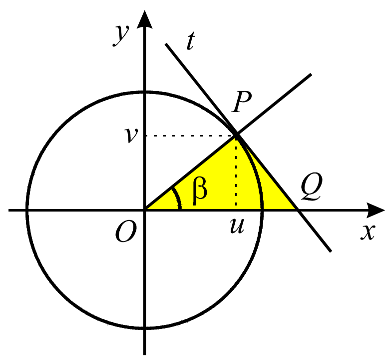
Portanto, $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Vem então que $6 \cos \alpha = -2$

3.2. Apresentamos a seguir três possíveis processos de resolução:

<u>1º Processo</u>:

Seja β a amplitude do ângulo QOP.



Por um lado, tem-se que $\cos \beta = u$

Por outro lado, tem-se que

$$\cos \beta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\overline{OQ}}$$

Portanto, $\frac{1}{\overline{OQ}} = u$, donde $\overline{OQ} = \frac{1}{u}$

Portanto, a recta t intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa $\frac{1}{u}$

2º Processo:

Seja x a abcissa do ponto Q. Como este ponto pertence ao eixo Ox, a sua ordenada é zero.

Tem-se assim que Q tem coordenadas $(x, 0)$.

Como a recta t é tangente à circunferência no ponto P, os vectores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares, pelo que $\overrightarrow{OP} . \overrightarrow{PQ} = 0$.

Como $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, 0) - (u, v) = (x - u, \, - v)$, vem:

$$\overrightarrow{OP} . \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (u, v) . (x - u, \, - v) = 0 \Leftrightarrow u\,x - u^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u\,x = u^2 + v^2 \Leftrightarrow u\,x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$$

3º Processo:

Tem-se que $\overrightarrow{OP} = (u, v)$, pelo que um vector director da recta t é o vector $\overrightarrow{u} = (-v, u)$

O declive da recta t é, portanto, igual a $-\frac{u}{v}$

A equação reduzida da recta t é, assim, da forma $y = -\frac{u}{v}x + b$

Como o ponto $P(u, v)$ pertence a esta recta, tem-se que $v = -\frac{u}{v}u + b$,

donde vem $b = v + \frac{u}{v}u = v + \frac{u^2}{v} = \frac{v^2 + u^2}{v} = \frac{1}{v}$

A equação reduzida da recta t é $y = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v}$

A abcissa do ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox é a solução da equação

$0 = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v}$ (onde x é a incógnita).

Ora, $0 = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v} \Leftrightarrow \frac{u}{v}x = \frac{1}{v} \Leftrightarrow x = \dfrac{\frac{1}{v}}{\frac{u}{v}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{v} \times \frac{v}{u} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$$