

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2011

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
 - Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
 - Não apresente cálculos, nem justificações.
 - Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
-

1. Seja f a função, de domínio $[1, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$

Qual é o valor de $f^{-1}(3)$?

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

2. Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = x + 1$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$

Para um certo número real a , tem-se $(g \circ h)(a) = \frac{1}{9}$

(o símbolo \circ designa a composição de funções)

Qual é o valor de a ?

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

3. Seja f uma função real de variável real.

Sabe-se que:

- $f'(2) = 9$
- a recta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa 2, intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada -15

Qual é o valor de $f(2)$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
-

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por

$$(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(1, 0, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

Qual das condições seguintes define uma recta **paralela** à recta r ?

(A) $y = 5 \wedge z = 6$

(B) $x = 3 \wedge y = 4$

(C) $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(3, 4, 5), \quad k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (3, 4, 5) + k(0, 1, 0), \quad k \in \mathbb{R}$

5. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 2n \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Seja (w_n) a sucessão de termo geral $w_n = 5n - 13$

Qual é o valor de n para o qual se tem $w_n = u_2$?

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Estude, quanto à monotonia, a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{1-2n}{n+3}$

2. Determine o valor de $3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$

Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

3. Uma floresta foi atingida por uma praga.

Admita que a área, em **milhares** de hectares, da região afectada por essa praga é dada por

$$A(t) = \frac{2t}{t^2 + 3} \quad (t \geq 0)$$

(Considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao início da praga.)

- 3.1. Houve um certo intervalo de tempo durante o qual a área da região afectada pela praga foi, pelo menos, de 500 hectares. Nesse intervalo de tempo, a floresta esteve seriamente ameaçada.

Durante quanto tempo esteve a floresta seriamente ameaçada?

Na sua resposta deve:

- escrever uma inequação que lhe permita resolver o problema;
- resolver analiticamente essa inequação;
- apresentar o valor pedido.

- 3.2. Utilize as capacidades gráficas da calculadora para resolver o seguinte problema:

Ao fim de quanto tempo, contado a partir do início da praga, foi máximo o valor da área atingida por essa praga?

Na sua resposta deve:

- reproduzir o gráfico visualizado na calculadora;
- assinalar, no gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema e indicar as coordenadas desse ponto, arredondadas às milésimas;
- apresentar a solução do problema em dias, arredondada às unidades (considere 1 ano = 365 dias).

4. Considere:

- a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$
- a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Utilize métodos exclusivamente analíticos na resolução dos três itens seguintes.

4.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto aos extremos relativos.

Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- os extremos relativos, caso existam.

4.2. Sabe-se que -1 é um zero da função f

Caracterize a função $f \times g$

Na sua resposta deve:

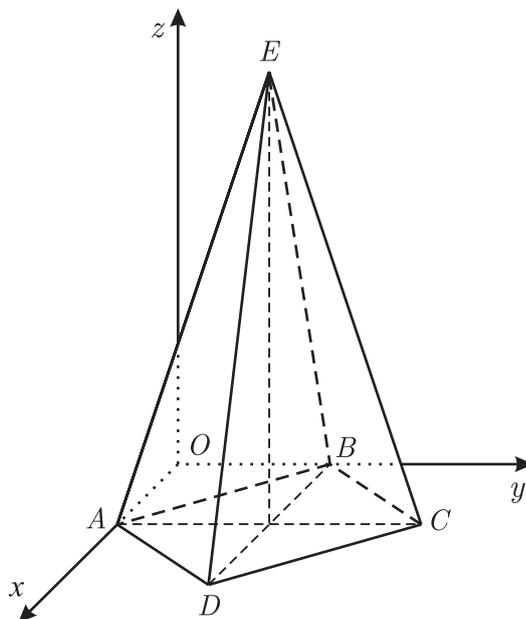
- indicar o domínio da função $f \times g$
- apresentar $(f \times g)(x)$ na forma de um polinómio do terceiro grau.

4.3. Seja P o ponto de intersecção das assíntotas do gráfico da função g

Para um certo número real k , o ponto P pertence ao gráfico da função h , de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = f(x) + k$

Determine o valor de k

5. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$ cuja base está contida no plano xOy



Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(1, 0, 0)$
- o vértice B tem coordenadas $(0, 1, 0)$
- o plano DCE é perpendicular à recta definida pela condição $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = z$

Determine o volume da pirâmide.

Nota – Pode ser-lhe útil determinar uma equação do plano DCE

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	<hr/>
	50 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	20 pontos
3.	
3.1.	20 pontos
3.2.	15 pontos
4.	
4.1.	20 pontos
4.2.	20 pontos
4.3.	20 pontos
5.	20 pontos
	<hr/>
	150 pontos

TOTAL **200 pontos**