Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2011

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(C)**

$f^{-1}(3)$ é o número cuja imagem, por meio de f, é igual a 3

Como $f(x)=3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow x=10$, conclui-se que $f^{-1}(3)=10$

2. Resposta **(B)**

$$(g\circ h)(a)=\frac{1}{9} \Leftrightarrow g\big(h(a)\big)=\frac{1}{9} \Leftrightarrow g(a+1)=\frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow a=8$$

3. Resposta **(C)**

Como $f'(2)=9$, o declive da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2 é 9

A ordenada na origem da recta tangente é -15. Assim, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico da função f, no ponto de abcissa 2, é $y=9x-15$

O ponto desta recta que tem abcissa 2 é o ponto de tangência. A sua ordenada é $9\times 2-15=3$. Esse ponto pertence quer à recta, quer ao gráfico da função f

Portanto, $f(2)=3$

4. Resposta **(A)**

A recta r tem a direcção do vector $(1,\,0,\,0)$, pelo que é paralela ao eixo Ox

Das quatro condições apresentadas, apenas a condição $y=5 \wedge z=6$ define uma recta paralela ao eixo Ox

5. Resposta **(B)**

Tem-se: $u_2 = 3+2\times 2 = 7$

Portanto, $w_n = u_2 \Leftrightarrow 5n-13=7 \Leftrightarrow n=4$

GRUPO II

1. Dos vários processos de resolução deste item, apresentam-se dois.

1.º Processo

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1-2(n+1)}{n+1+3} - \frac{1-2n}{n+3} = \frac{-2n-1}{n+4} - \frac{1-2n}{n+3} =$$

$$= \frac{(-2n-1)(n+3)-(1-2n)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2n^2-6n-n-3-(n+4-2n^2-8n)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{-2n^2-7n-3+2n^2+7n-4}{(n+4)(n+3)} = \frac{-7}{(n+4)(n+3)}$$

Como n designa um número natural, $\dfrac{-7}{(n+4)(n+3)}$ designa sempre um número negativo.

Assim, para qualquer número natural n, tem-se $u_{n+1}-u_n<0$, ou seja, $u_{n+1}<u_n$

Portanto, a sucessão (u_n) é uma sucessão decrescente.

2.º Processo

Tem-se que $u_n = -2+\dfrac{7}{n+3}$

A sucessão de termo geral $n+3$ é uma sucessão crescente de termos positivos. Logo, a sucessão de termo geral $\dfrac{7}{n+3}$ é uma sucessão decrescente.

Portanto, a sucessão (u_n) é uma sucessão decrescente.

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{sen}\alpha=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{5}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{9}{25}$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

Portanto, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

Logo, $3-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=3-\frac{1}{\frac{4}{3}}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

3.1. Tem-se: $A(t)\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2t}{t^2+3}\geq\frac{1}{2}$

Dado que, qualquer que seja o valor de t, $t^2+3>0$, vem:

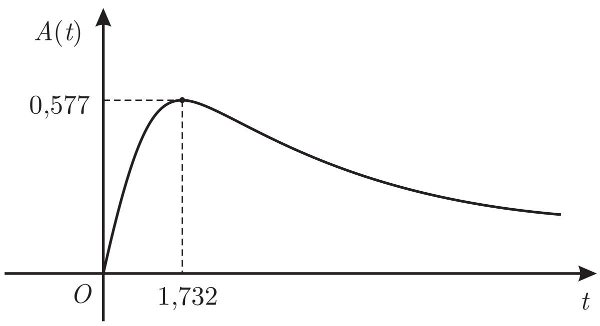
$\frac{2t}{t^2+3}\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4t\geq t^2+3 \Leftrightarrow t^2-4t+3\leq 0$

Dado que $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=1 \ \vee \ t=3$, vem $t^2-4t+3\leq 0 \Leftrightarrow t\in[1,3]$

Como $3-1=2$, conclui-se que a floresta esteve seriamente ameaçada durante dois anos.

3.2. Reproduz-se a seguir o gráfico da função A visualizado na calculadora, no qual se assinalou o ponto correspondente ao máximo da função.

Indicam-se as coordenadas desse ponto, arredondadas às milésimas.



Tem-se $1{,}732\times 365\approx 632$

Portanto, foi ao fim de 632 dias, contados a partir do início da praga, que foi máximo o valor da área atingida por essa praga.

4.1. Tem-se: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \lor x = 1$$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Tem-se:

$f(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) - 11 = 16$

$f(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 9 \times 1 - 11 = -16$

Portanto,

- a função f é crescente no intervalo $]-\infty, -3]$ e no intervalo $[1, +\infty[$
- a função f é decrescente no intervalo $[-3, 1]$
- a função f tem um máximo relativo igual a 16, para $x = -3$
- a função f tem um mínimo relativo igual a -16, para $x = 1$

4.2. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \backslash \{-1\}) = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^3 + 3x^2 - 9x - 11) \times \frac{x-1}{x+1}$

Como -1 é um zero da função f, o polinómio $x^3 + 3x^2 - 9x - 11$ é divisível por $x + 1$

Efectuando a divisão do polinómio $x^3 + 3x^2 - 9x - 11$ por $x + 1$, utilizando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	3	-9	-11
-1		-1	-2	11
	1	2	-11	0

Portanto,

$(x^3 + 3x^2 - 9x - 11) \times \frac{x-1}{x+1} = (x+1) \times (x^2 + 2x - 11) \times \frac{x-1}{x+1} = (x^2 + 2x - 11) \times (x - 1) =$

$= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - 11x + 11 = x^3 + x^2 - 13x + 11$

Assim,

$f \times g$ é a função de domínio $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ definida por $(f \times g)(x) = x^3 + x^2 - 13x + 11$

4.3. Tem-se: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$

O gráfico da função g tem uma assimptota vertical de equação $x=-1$ e uma assimptota horizontal de equação $y=1$

Portanto, o ponto P tem coordenadas $(-1,1)$

O ponto P pertence ao gráfico da função h se, e só se, $h(-1)=1$

$h(-1)=1 \Leftrightarrow f(-1)+k=1 \Leftrightarrow 0+k=1 \Leftrightarrow k=1$

5. Comecemos por determinar a área da base da pirâmide:

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,1,0)-(1,0,0)=(-1,1,0)$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

Portanto, a área da base da pirâmide é $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

A altura da pirâmide é a cota do ponto E

O ponto E pertence ao plano DCE. Determinemos uma equação deste plano.

O vector de coordenadas $(3,3,1)$ é um vector normal ao plano DCE, pois é um vector director da recta definida por $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=z$, que é perpendicular ao plano DCE

Portanto, o plano DCE pode ser definido por uma equação do tipo $3x+3y+z+d=0$

Como o ponto C tem coordenadas $(1,2,0)$, vem $3\times1+3\times2+0+d=0$, ou seja, $d=-9$

Assim, uma equação do plano DCE é $3x+3y+z-9=0$

Como o ponto E pertence a este plano e tem abcissa e ordenada iguais a 1, vem que a cota z do ponto E satisfaz a equação $3+3+z-9=0$

Portanto, o ponto E tem cota 3

Como a área da base da pirâmide é igual a 2 e a altura é igual a 3, o volume da pirâmide é $\dfrac{2\times3}{3}=2$