Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2011

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(D)**

$f^{-1}(3)$ é o número cuja imagem, por meio de f, é igual a 3

Como $f(x)=3 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=3 \Leftrightarrow x=11$, conclui-se que $f^{-1}(3)=11$

2. Resposta **(C)**

$$(g \circ h)(a)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow g\big(h(a)\big)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow g(a-1)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a-1}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow a=9$$

3. Resposta **(B)**

Como $f'(3)=7$, o declive da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 3 é 7

A ordenada na origem da recta tangente é -19. Assim, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico da função f, no ponto de abcissa 3, é $y=7x-19$

O ponto desta recta que tem abcissa 3 é o ponto de tangência. A sua ordenada é $7 \times 3-19=2$. Esse ponto pertence quer à recta, quer ao gráfico da função f

Portanto, $f(3)=2$

4. Resposta **(B)**

A recta r tem a direcção do vector $(0,\ 0,\ 1)$, pelo que é paralela ao eixo Oz

Das quatro condições apresentadas, apenas a condição $x=2 \wedge y=3$ define uma recta paralela ao eixo Oz

5. Resposta **(A)**

Tem-se: $u_2 = 4+3\times 2 = 10$

Portanto, $w_n = u_2 \Longleftrightarrow 4n-6=10 \Longleftrightarrow n=4$

GRUPO II

1. Dos vários processos de resolução deste item, apresentam-se dois.

1.º Processo

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1-3(n+1)}{n+1+2} - \frac{1-3n}{n+2} = \frac{-3n-2}{n+3} - \frac{1-3n}{n+2} =$$

$$= \frac{(-3n-2)(n+2)-(1-3n)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-3n^2-6n-2n-4-(n+3-3n^2-9n)}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \frac{-3n^2-8n-4+3n^2+8n-3}{(n+3)(n+2)} = \frac{-7}{(n+3)(n+2)}$$

Como n designa um número natural, $\dfrac{-7}{(n+3)(n+2)}$ designa sempre um número negativo.

Assim, para qualquer número natural n, tem-se $u_{n+1}-u_n<0$, ou seja, $u_{n+1}<u_n$

Portanto, a sucessão (u_n) é uma sucessão decrescente.

2.º Processo

Tem-se que $u_n = -3+\dfrac{7}{n+2}$

A sucessão de termo geral $n+2$ é uma sucessão crescente de termos positivos. Logo, a sucessão de termo geral $\dfrac{7}{n+2}$ é uma sucessão decrescente.

Portanto, a sucessão (u_n) é uma sucessão decrescente.

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{sen}\alpha=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25}$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

Portanto, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

Logo, $3-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=3-\frac{1}{\frac{3}{4}}=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

3.1. Tem-se: $A(t)\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3t}{t^2+5}\geq\frac{1}{2}$

Dado que, qualquer que seja o valor de t, $t^2+5>0$, vem:

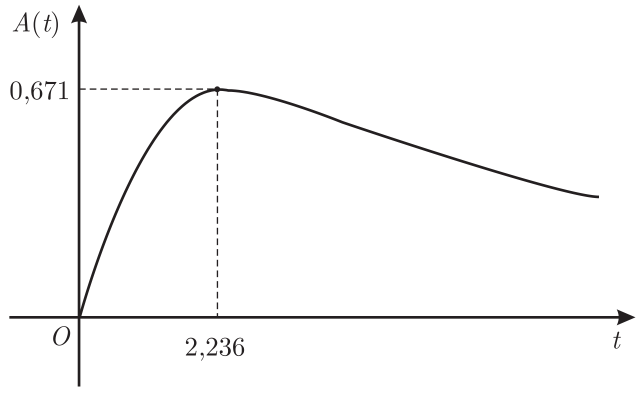
$\frac{3t}{t^2+5}\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 6t\geq t^2+5 \Leftrightarrow t^2-6t+5\leq 0$

Dado que $t^2-6t+5=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=5$, vem $t^2-6t+5\leq 0 \Leftrightarrow t\in[1,5]$

Como $5-1=4$, conclui-se que a floresta esteve seriamente ameaçada durante quatro anos.

3.2. Reproduz-se a seguir o gráfico da função A visualizado na calculadora, no qual se assinalou o ponto correspondente ao máximo da função.

Indicam-se as coordenadas desse ponto, arredondadas às milésimas.



Tem-se $2,236\times 365\approx 816$

Portanto, foi ao fim de 816 dias, contados a partir do início da praga, que foi máximo o valor da área atingida por essa praga.

4.1. Tem-se: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Tem-se:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) - 5 = 0$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 - 5 = -32$$

Portanto,

- a função f é crescente no intervalo $]-\infty, -1]$ e no intervalo $[3, +\infty[$
- a função f é decrescente no intervalo $[-1, 3]$
- a função f tem um máximo relativo igual a 0, para $x = -1$
- a função f tem um mínimo relativo igual a -32, para $x = 3$

4.2. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \left(\mathbb{R} \setminus \{-1\}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x - 5) \times \frac{x-1}{x+1}$$

Como -1 é um zero da função f, o polinómio $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ é divisível por $x + 1$

Efectuando a divisão do polinómio $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ por $x + 1$, utilizando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -3 & -9 & -5 \\
-1 & & -1 & 4 & 5 \\
\hline
 & 1 & -4 & -5 & \boxed{0}
\end{array}$$

Portanto,

$$(x^3 - 3x^2 - 9x - 5) \times \frac{x-1}{x+1} = (x+1) \times (x^2 - 4x - 5) \times \frac{x-1}{x+1} = (x^2 - 4x - 5) \times (x - 1) =$$

$$= x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x - 5x + 5 = x^3 - 5x^2 - x + 5$$

Assim,

$f \times g$ é a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definida por $(f \times g)(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

4.3. Tem-se: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$

O gráfico da função g tem uma assimptota vertical de equação $x=-1$ e uma assimptota horizontal de equação $y=1$

Portanto, o ponto P tem coordenadas $(-1,1)$

O ponto P pertence ao gráfico da função h se, e só se, $h(-1)=1$

$h(-1)=1 \Leftrightarrow f(-1)+k=1 \Leftrightarrow 0+k=1 \Leftrightarrow k=1$

5. Comecemos por determinar a área da base da pirâmide:

$\overrightarrow{DA}=A-D=(0,1,0)-(1,0,0)=(-1,1,0)$

$\|\overrightarrow{DA}\|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

Portanto, a área da base da pirâmide é $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

A altura da pirâmide é a cota do ponto V

O ponto V pertence ao plano CBV. Determinemos uma equação deste plano.

O vector de coordenadas $(3,3,1)$ é um vector normal ao plano CBV, pois é um vector director da recta definida por $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=z$, que é perpendicular ao plano CBV

Portanto, o plano CBV pode ser definido por uma equação do tipo $3x+3y+z+d=0$

Como o ponto B tem coordenadas $(1,2,0)$, vem $3\times 1+3\times 2+0+d=0$, ou seja, $d=-9$

Assim, uma equação do plano CBV é $3x+3y+z-9=0$

Como o ponto V pertence a este plano e tem abcissa e ordenada iguais a 1, vem que a cota z do ponto V satisfaz a equação $3+3+z-9=0$

Portanto, o ponto V tem cota 3

Como a área da base da pirâmide é igual a 2 e a altura é igual a 3, o volume da pirâmide é $\dfrac{2\times 3}{3}=2$