GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Teste Intermédio de Matemática A

Versão 1

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 06.03.2013

11.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(C)**

Os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares se, e só se, $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = 0$

Designemos por x a abcissa do ponto P

Então, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ são $(x, -4, 1)$

Portanto,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x, -4, 1) \cdot (2, 3, 6) = 0 \Leftrightarrow 2x - 12 + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

2. Resposta **(D)**

Designemos por r a reta definida por $\begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$

O vetor $\vec{r}\,(1, 1, 0)$ é um vetor diretor da reta r

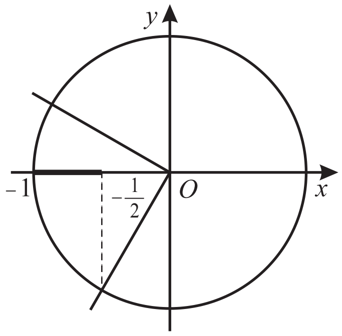
Um plano é perpendicular à reta r se, e só se, o vetor $\vec{r}$ for perpendicular a esse plano.

Portanto, a equação do plano tem de ser equivalente a uma equação da forma $x + y = d$

É o caso do plano definido pela equação $x + y = 5$

3. Resposta **(D)**

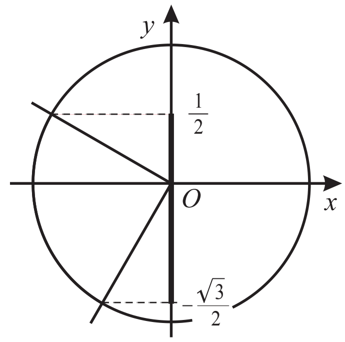
No intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$, o cosseno toma todos os valores do intervalo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Portanto, as equações apresentadas nas opções A e C têm solução.



No intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$, o seno toma todos os valores do intervalo $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Tem-se $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}87$

Portanto, só a equação apresentada na opção D não tem solução.



4. Resposta **(B)**

As assíntotas do gráfico da função f são as retas de equações $x = -1$ e $y = 0$

Como as assíntotas do gráfico de g são as retas de equações $x = -2$ e $y = 2$, o gráfico de g obtém-se do gráfico de f por meio da translação associada ao vetor de coordenadas $(-1, 2)$

Portanto, $a = 1$ e $k = 2$

5. Resposta **(A)**

Sabe-se que os gráficos das funções f e g se intersectam no ponto de coordenadas $(3,\ 0)$, ou seja, sabe-se que $f(3) = g(3) = 0$

Portanto, 3 é um zero comum às duas funções.

A função f tem outro zero, que vamos designar por a

Dado que as duas funções têm domínio $\mathbb{R}$, tem-se que:

- $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \vee \ g(x) = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x = a \vee x = 3) \ \vee \ x = 3 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = a \vee x = 3$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \wedge \ g(x) \neq 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x = a \vee x = 3) \ \wedge \ x \neq 3 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = a$

Então,

- a função $f \times g$ tem dois zeros: a e 3
- a função $\frac{f}{g}$ tem um zero: a

GRUPO II

1.1.1. O contradomínio da função f é $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, pelo que a equação $f(x)=k$ é impossível se, e só se, $k=-1$

1.1.2. Dado que a reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f, o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ é igual a -1

1.2.1. $f(x)\le\dfrac{4-x}{x+2}\Leftrightarrow\dfrac{6-x}{x-2}\le\dfrac{4-x}{x+2}\Leftrightarrow\dfrac{6-x}{x-2}-\dfrac{4-x}{x+2}\le 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{(6-x)(x+2)-(4-x)(x-2)}{(x-2)(x+2)}\le 0\Leftrightarrow\frac{6x+12-x^2-2x-4x+8+x^2-2x}{x^2-4}\le 0\Leftrightarrow$$

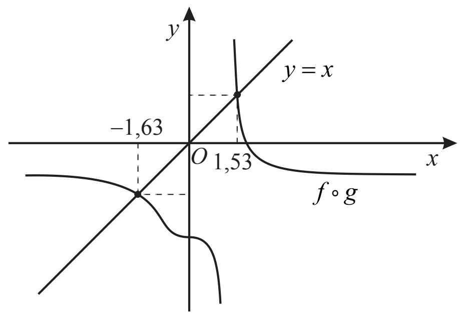
$$\Leftrightarrow\frac{-2x+20}{x^2-4}\le 0$$

x	$-\infty$	-2		2		10	$+\infty$
Numerador	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Denominador	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Fração	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

n.d. – não definida

Conjunto solução: $]-2,2[\,\cup\,[10,+\infty[$

1.2.2. $(f\circ g)(x)=x\Leftrightarrow f(g(x))=x\Leftrightarrow f(x^3)=x\Leftrightarrow\dfrac{6-x^3}{x^3-2}=x$



Na figura, estão representados:

- o gráfico da função $f\circ g$, definida pela expressão $\dfrac{6-x^3}{x^3-2}$
- a reta de equação $y=x$
- os pontos de intersecção das duas linhas, cujas abcissas são as soluções da equação $(f\circ g)(x)=x$

Portanto, as soluções da equação $(f\circ g)(x)=x$, arredondadas às centésimas, são $-1{,}63$ e $1{,}53$

2.1.1. O vetor $\overrightarrow{FA}$ é perpendicular ao plano FGH, pelo que uma equação deste plano é da forma $2x+3y+6z+d=0$

Como o ponto F tem coordenadas $(1,3,-4)$, tem-se $2\times 1+3\times 3+6\times(-4)+d=0$

Portanto, $d=13$

Assim, uma condição cartesiana que define o plano FGH é $2x+3y+6z+13=0$

2.1.2. Uma condição cartesiana que define a reta AF é $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{6}$

2.1.3. A superfície esférica de centro no ponto F à qual pertence o ponto G tem raio igual a $\overline{FA}$

Tem-se $\overline{FA} = \|\overrightarrow{FA}\| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$

Assim, uma condição cartesiana que define a superfície esférica é $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2 = 49$

2.2. O ponto E é o ponto de intersecção da reta EF com o plano HCD

Como a reta EF é perpendicular a este plano, que é definido por $6x+2y-3z+25=0$, uma equação vetorial da reta é $(x, y, z) = (1, 3, -4) + k(6, 2, -3),\ k \in \mathbb{R}$

Tem-se $(x, y, z) = (1, 3, -4) + k(6, 2, -3) \Leftrightarrow x = 1+6k \ \wedge \ y = 3+2k \ \wedge \ z = -4-3k$

Portanto, qualquer ponto da reta EF tem coordenadas da forma $(1+6k, 3+2k, -4-3k)$, sendo k um número real.

O ponto E é o ponto desta reta cujas coordenadas satisfazem a equação $6x+2y-3z+25=0$

Vem, então,

$6(1+6k)+2(3+2k)-3(-4-3k)+25=0 \Leftrightarrow 6+36k+6+4k+12+9k+25=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49k = -49 \Leftrightarrow k = -1$

Portanto, o ponto E é o ponto de coordenadas $(-5, 1, -1)$

3.1. A área do trapézio $[OPQR]$ é dada por $\frac{\overline{PQ}+\overline{OR}}{2} \times \overline{QR}$

As coordenadas do ponto P são $(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$

Portanto,

- $\overline{OR} = -\cos\alpha$
- $\overline{PQ} = -2\cos\alpha$
- $\overline{QR} = \operatorname{sen}\alpha$

Logo, a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por $\frac{-2\cos\alpha+(-\cos\alpha)}{2} \times \operatorname{sen}\alpha$, ou seja, é dada por $-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha$

3.2. Afirmar que a reta OP intersecta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$ é equivalente a afirmar que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$

Como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, tem-se:

$$\left(-\frac{7}{24}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{49}{576} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{625}{576} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{576}{625}$$

Atendendo a que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$

Como $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, tem-se $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \times \cos\alpha = -\frac{7}{24} \times \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{25}$

Portanto, a área pedida é $-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{2} \times \frac{7}{25} \times \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{252}{625}$

4. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{ED}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{ED}\,\hat{}\,\overrightarrow{DC}\right)$

Tem-se $\|\overrightarrow{DC}\| = 4$

Como a área do triângulo $[ADE]$ é igual a 6 e $\overline{AD}$ é igual a 4, vem:

$$\frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} = 6 \Leftrightarrow \overline{AE} \times \overline{AD} = 12 \Leftrightarrow \overline{AE} \times 4 = 12 \Leftrightarrow \overline{AE} = 3$$

Assim, $\overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{ED}^2 \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 = \overline{ED}^2 \Leftrightarrow \overline{ED} = 5$

Portanto, $\|\overrightarrow{ED}\| = 5$

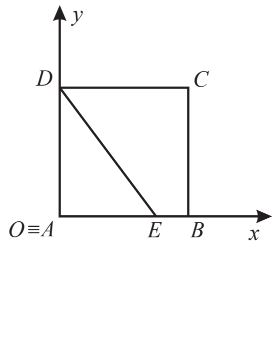
Tem-se ainda:

$$\cos\left(\overrightarrow{ED}\,\hat{}\,\overrightarrow{DC}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{DE}\,\hat{}\,\overrightarrow{DC}\right) = -\cos\left(E\hat{D}C\right) = -\cos\left(D\hat{E}A\right) = -\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = -\frac{3}{5}$$

Logo, $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} = 5 \times 4 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -12$

2.º Processo

Consideremos um referencial o.n. xOy do plano, em que, como a figura sugere, a origem do referencial coincide com o ponto A e os pontos B e D pertencem aos eixos Ox e Oy, respetivamente.



Como a área do triângulo $[ADE]$ é igual a 6 e $\overline{AD}$ é igual a 4, vem:

$$\frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} = 6 \Leftrightarrow \overline{AE} \times \overline{AD} = 12 \Leftrightarrow \overline{AE} \times 4 = 12 \Leftrightarrow \overline{AE} = 3$$

Tem-se, portanto: $C(4,4) \quad D(0,4) \quad E(3,0)$

Assim, $\overrightarrow{ED} = D - E = (0, 4) - (3, 0) = (-3, 4)$

$\overrightarrow{DC} = C - D = (4, 4) - (0, 4) = (4, 0)$

Vem, então: $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} = (-3, 4) \cdot (4, 0) = -12 + 0 = -12$