Teste Intermédio

Matemática A

Resolução **(Versão 2)**

Duração do Teste: 90 minutos | 11.03.2014

11.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

O valor máximo da função objetivo de um problema de programação linear é atingido num vértice da região admissível. Os vértices da região admissível são os pontos de coordenadas $(0, 0)$, $(0, 6)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$ e $(3, 0)$

Calculemos o valor da função objetivo em cada um destes pontos.

$L(0,0) = 4 \times 0 + 0 = 0$ $\quad L(0,6) = 4 \times 0 + 6 = 6$ $\quad L(2,6) = 4 \times 2 + 6 = 14$

$L(3,4) = 4 \times 3 + 4 = 16$ $\quad L(3,0) = 4 \times 3 + 0 = 12$

Assim, o valor máximo da função L na região representada é 16

2. Resposta **(B)**

Seja $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$; tem-se $\operatorname{sen} x < 0$, $\cos x > 0$ e $\operatorname{tg} x < 0$

Então, $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x < 0$, $\cos x - \operatorname{tg} x > 0$, $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x} < 0$ e $\operatorname{sen} x \times \cos x < 0$

Portanto, só a expressão $\cos x - \operatorname{tg} x$ designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao intervalo $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

3. Resposta **(C)**

A equação $\operatorname{sen} x = 0{,}4$ tem duas soluções no intervalo $[0, 2\pi[$: uma no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e outra no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

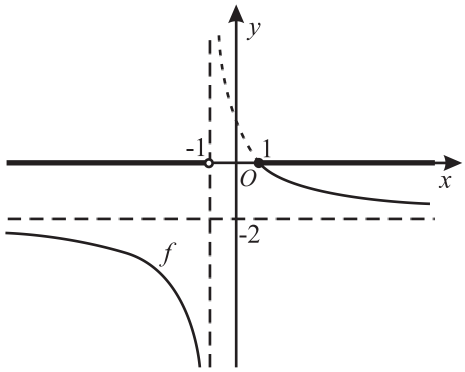
Como a função seno é periódica, de período 2π, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}4$ tem também duas soluções em qualquer um dos trinta intervalos $[-30\pi, -28\pi[$, $[-28\pi, -26\pi[, \cdots,$ $[-2\pi, 0[$, $[0, 2\pi[$, $[2\pi, 4\pi[, \cdots,$ $[28\pi, 30\pi[$

Portanto, a equação dada tem 30×2 soluções no intervalo $[-30\pi, 30\pi[$

4. Resposta **(C)**

O conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$ é o conjunto das abcissas dos pontos do gráfico de f que têm ordenada menor ou igual a zero.

Na figura ao lado, estão representados a cheio os pontos da hipérbole com ordenada menor ou igual a zero e a traço mais grosso as respetivas abcissas.



5. Resposta **(A)**

A função f é definida por $f(x) = 2x + 6$ e, portanto, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Como a função g é par e $g(3) = 0$, também se tem $g(-3) = 0$

Portanto, os zeros da função g são -3 e 3

Dado que as duas funções têm domínio $\mathbb{R}$, tem-se:

- $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = -3 \wedge (x \neq -3 \wedge x \neq 3)}_{\text{condição impossível}}$

Então,

- a função $f \times g$ tem dois zeros: -3 e 3
- a função $\dfrac{f}{g}$ não tem zeros

GRUPO II

1.1. No intervalo $]1, +\infty[$, tem-se:

$$f(x) < \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{3x-4}{1-x} < \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{3x-4}{1-x} - \frac{1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-4)(x-2)-(1-x)}{(1-x)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-9x+7}{(1-x)(x-2)} < 0$$

Em $\mathbb{R}$, o numerador não tem zeros, e os números 1 e 2 são os zeros do denominador.

No intervalo $]1, +\infty[$, tem-se o seguinte quadro de sinais.

x	1		2	$+\infty$
Numerador	n.d.	$+$	$+$	$+$
Denominador	n.d.	$+$	0	$-$
Fração	n.d.	$+$	n.d.	$-$

n.d. – não definida.

Conjunto solução: $]2, +\infty[$

1.2. Tem-se: $(g \circ f)(-3) = g\big(f(-3)\big)$

$$f(-3) = \frac{2}{3} \times (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 14 = -5$$

Portanto,

$$(g \circ f)(-3) = 14 \Leftrightarrow g\big(f(-3)\big) = 14 \Leftrightarrow g(-5) = 14 \Leftrightarrow k \times (-5) + 4 = 14 \Leftrightarrow k = -2$$

1.3. Na figura, está representada, num referencial, parte do gráfico da função f

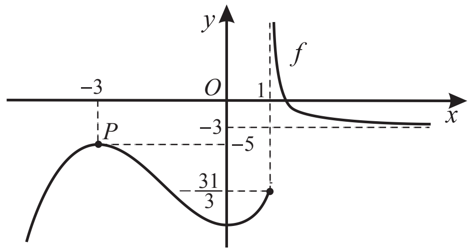
Nesse referencial, estão também representados:

– o ponto de abcissa 1 e a respetiva ordenada

– a assíntota horizontal do gráfico da função f definida pela equação $y = -3$

– a assíntota vertical do gráfico da função f definida pela equação $x = 1$

– o ponto $P(-3, -5)$, cuja ordenada é o máximo relativo da função f



O contradomínio da função é o conjunto das ordenadas dos pontos do seu gráfico.

Portanto, o contradomínio da função f é $]-\infty, -5] \cup]-3, +\infty[$

2.1. A área do polígono $[ABCPQ]$ é igual à soma da área do triângulo $[OAQ]$ com a área do pentágono $[OABCP]$

A área do triângulo $[OAQ]$ é dada por $\dfrac{\overline{OA} \times \overline{QR}}{2}$

Tem-se: $\text{sen}\, x = \dfrac{\overline{QR}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \dfrac{\overline{QR}}{1} \Leftrightarrow \overline{QR} = \text{sen}\, x$

Portanto, a área do triângulo $[OAQ]$ é dada por $\dfrac{1 \times \text{sen}\, x}{2}$, ou seja, é dada por $\dfrac{\text{sen}\, x}{2}$

A área do pentágono $[OABCP]$ é igual à diferença entre a área do retângulo $[ABCD]$ e a área do triângulo $[ODP]$

A área do retângulo $[ABCD]$ é igual a 2

A área do triângulo $[ODP]$ é dada por $\dfrac{\overline{OD} \times \overline{DP}}{2}$

Tem-se: $\text{tg}\, x = \dfrac{\overline{DP}}{\overline{OD}} \Leftrightarrow \text{tg}\, x = \dfrac{\overline{DP}}{1} \Leftrightarrow \overline{DP} = \text{tg}\, x$

Portanto, a área do triângulo $[ODP]$ é dada por $\dfrac{1 \times \text{tg}\, x}{2}$, ou seja, $\dfrac{\text{tg}\, x}{2}$

Assim, a área do pentágono $[OABCP]$ é dada por $2 - \dfrac{\text{tg}\, x}{2}$

Logo, a área do polígono $[ABCPQ]$ é dada por $2 - \dfrac{\text{tg}\, x}{2} + \dfrac{\text{sen}\, x}{2}$

2.2. Tem-se: $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen}x$

Então, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{sen}x=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}x=\frac{3}{5}$

Dado que $\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1$ e que $\operatorname{sen}x=\frac{3}{5}$, tem-se: $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2x=1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2x=1 \Leftrightarrow \frac{9}{25}+\cos^2x=1 \Leftrightarrow \cos^2x=\frac{16}{25}$

Como $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, tem-se $\cos x=\frac{4}{5}$

Então, dado que $\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$, tem-se $\operatorname{tg}x=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

Tendo em conta que a área do polígono $[ABCPQ]$ é dada por $2-\frac{\operatorname{tg}x}{2}+\frac{\operatorname{sen}x}{2}$, concluímos que a área pedida é $2-\frac{\frac{3}{4}}{2}+\frac{\frac{3}{5}}{2}=2-\frac{3}{8}+\frac{3}{10}=\frac{80-15+12}{40}=\frac{77}{40}$

3.1. Dois planos paralelos admitem o mesmo vetor normal. Portanto, uma equação cartesiana do plano pedido é da forma $x+2y+z=d$

Como o plano passa no ponto $D(3,2,1)$, tem-se $3+2\times2+1=d$

Logo, $d=8$

Assim, uma equação do plano que passa no ponto D e é paralelo ao plano ABC é $x+2y+z=8$

3.2. Como os pontos A, B e C pertencem ao plano ABC, as suas coordenadas satisfazem a equação $x+2y+z=12$

Determinemos as coordenadas dos pontos A, B e C

- como o ponto A tem ordenada zero e cota zero, tem-se $x+2\times0+0=12$, pelo que $x=12$; portanto, o ponto A tem coordenadas $(12,0,0)$
- como o ponto B tem abcissa zero e cota zero, tem-se $0+2y+0=12$, pelo que $y=6$; portanto, o ponto B tem coordenadas $(0,6,0)$
- como o ponto C tem abcissa zero e ordenada zero, tem-se $0+2\times0+z=12$, pelo que $z=12$; portanto, o ponto C tem coordenadas $(0,0,12)$

O ponto M é o ponto de coordenadas $\left(0,\frac{6+0}{2},\frac{0+12}{2}\right)=(0,3,6)$

Tem-se, então, $\overrightarrow{MA}=A-M=(12,0,0)-(0,3,6)=(12,-3,-6)$

Portanto, uma condição cartesiana da reta MA é $\frac{x-12}{12}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-6}$

3.3. Seja r a reta que passa em O e é perpendicular ao plano ABC

O ponto P é o ponto de intersecção da reta r com esse plano.

Dado que a reta r é perpendicular ao plano ABC, um vetor diretor desta reta é o vetor de coordenadas $(1, 2, 1)$

A determinação das coordenadas do ponto P pode fazer-se por dois processos.

1.º Processo

Recorrendo a uma condição cartesiana da reta r

Como a reta r passa no ponto O, origem do referencial, e tem a direção do vetor de coordenadas $(1, 2, 1)$, uma condição que define esta reta é $x = \frac{y}{2} = z$

As coordenadas do ponto P são, portanto, a solução do sistema $\begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = \frac{y}{2} \\ x + 2y + z = 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = \frac{y}{2} \\ x + 2y + z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} + 2y + \frac{y}{2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = \frac{y}{2} \\ y + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = \frac{y}{2} \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Portanto, o ponto P é o ponto de coordenadas $(2, 4, 2)$

2.º Processo

Recorrendo a uma equação vetorial da reta r

Como a reta r passa no ponto O, origem do referencial, e tem a direção do vetor de coordenadas $(1, 2, 1)$, uma equação vetorial desta reta é $(x, y, z) = k(1, 2, 1), \quad k \in \mathbb{R}$

Tem-se: $(x, y, z) = k(1, 2, 1) \Leftrightarrow x = k \ \wedge \ y = 2k \ \wedge \ z = k$

Portanto, qualquer ponto da reta r tem coordenadas da forma $(k, 2k, k)$, sendo k um número real.

O ponto P é o ponto desta reta cujas coordenadas satisfazem a equação $x + 2y + z = 12$

De $k + 2 \times 2k + k = 12$, conclui-se que $k = 2$

Portanto, o ponto P é o ponto de coordenadas $(2,4,2)$

Assim, o raio da esfera é $\overline{OP} = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24}$

Portanto, o volume da esfera é $\frac{4}{3} \times \pi \times (\sqrt{24})^3$

4. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Tem-se que a altura de um triângulo equilátero de lado b é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}b$

Portanto, $\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$

Então,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AM}\| \times \cos(\overrightarrow{AC} \,\hat{}\, \overrightarrow{AM}) = b \times \frac{\sqrt{3}}{2}b \times \cos 30^{\circ} = b \times \frac{\sqrt{3}}{2}b \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3b^2}{4}$$

2.º Processo

Tem-se: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

Portanto, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AM} = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + 0 = \|\overrightarrow{AM}\|^2$

Tem-se que a altura de um triângulo equilátero de lado b é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}b$

Assim, $\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$

Portanto, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 = \frac{3b^2}{4}$

3.º Processo

Tem-se: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$

Portanto, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CM} =$

$= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{CM}\| \times \cos(\overrightarrow{AC} \,\hat{}\, \overrightarrow{CM}) =$

$= b^2 + b \times \frac{b}{2} \times \cos 120^{\circ} = b^2 + \frac{b^2}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3b^2}{4}$