EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

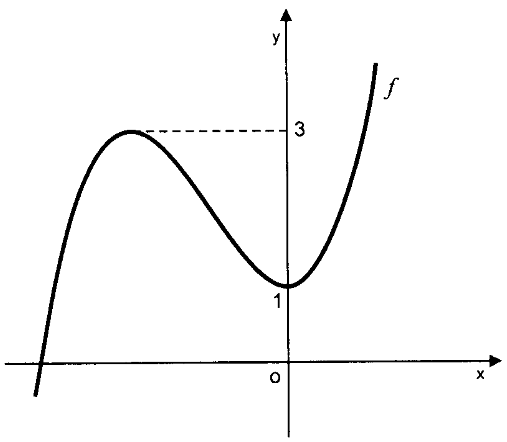
V.S.F.F.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

(A) uma **(B)** duas **(C)** três **(D)** quatro

2. Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \text{sen } x$

Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h ?

(A) $y = 2x + \pi$ **(B)** $y = -2$

(C) $y = \sqrt{2}\, x - 9$ **(D)** $y = x$

V.S.F.F.

3. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objecto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

(A) $2\ dm$ **(B)** $4\ dm$

(C) $6\ dm$ **(D)** $8\ dm$

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- o gráfico de g é uma recta, que designamos por s
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira** ?

(A) A recta s é tangente ao gráfico de f

(B) A recta s é secante ao gráfico de f

(C) A recta s não intersecta o gráfico de f

(D) A recta s é uma assimptota do gráfico de f

5. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel.

Qualquer um dos cinco jovens pode conduzir.

De quantas maneiras podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

(A) 36 **(B)** 120 **(C)** 12 **(D)** 72

6. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Seja X o número de vezes que sai a face 6 nos dois lançamentos.

Qual é a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$

(C)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

(D)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

7. Qual das seguintes condições define uma recta no plano complexo ?

(A) $|z - 1| = 4$

(B) $arg(z) = \frac{\pi}{2}$

(C) $3z + 2i = 0$

(D) $|z - 1| = |z + i|$

V.S.F.F.

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

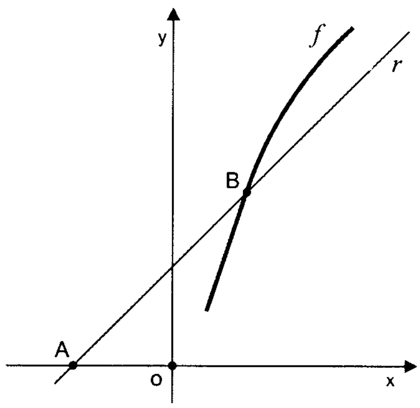
1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - \cos x$

1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0, \pi[$.

1.2. Seja f' a função derivada de f. Mostre que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

1.3. Na figura abaixo estão representadas:

- parte do gráfico da função f
- parte de uma recta r, cuja inclinação é $45°$, que contém o ponto $A(-3, 0)$ e que intersecta o gráfico da função f no ponto B



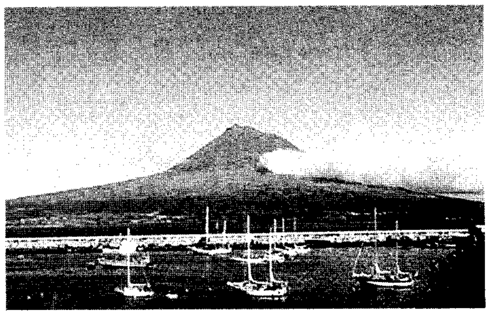
Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo $[AOB]$, onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101\, e^{-0{,}12\, h}$$

2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros.



Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.

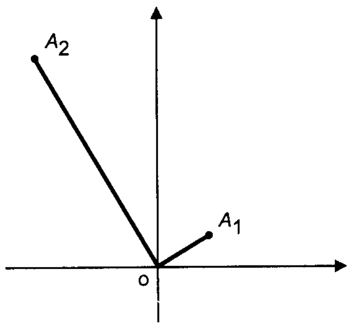
2.2. Determine x tal que, para qualquer h, $P(h+x) = \frac{1}{2}\, P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

3. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, e sejam z_1 e z_2 dois elementos de $\mathbb{C}$.

Sabe-se que:

- z_1 tem argumento $\frac{\pi}{6}$
- $z_2 = z_1^4$
- A_1 e A_2 são as imagens geométricas de z_1 e de z_2, respectivamente



3.1. Justifique que o ângulo $A_1 O A_2$ é recto (O designa a origem do referencial).

3.2. Considere, no plano complexo, a circunferência C definida pela condição $|z| = |z_1|$. Sabendo que o perímetro de C é 4π, represente, na **forma algébrica**, o número complexo z_1

4.

4.1. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam E_1 e E_2 dois acontecimentos possíveis ($E_1 \subset S$ e $E_2 \subset S$).

Prove que $$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = 1 - P(E_1) \times P(E_2 \mid E_1)$$

(P designa probabilidade, $\overline{E_1}$ e $\overline{E_2}$ designam os acontecimentos contrários de E_1 e de E_2, e $P(E_2 \mid E_1)$ designa a probabilidade de E_2, se E_1).

4.2. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: se o desejar, utilize a igualdade referida na alínea anterior; neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos E_1 e E_2, no contexto da situação apresentada.

4.3. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.

Imagine que está a participar nesse jogo.

Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 51
- **1.1.** 16
- **1.2.** 17
- **1.3.** 18

2. 33
- **2.1.** 15
- **2.2.** 18

3. 21
- **3.1.** 11
- **3.2.** 10

4. 32
- **4.1.** 12
- **4.2.** 10
- **4.3.** 10

TOTAL **200**

V.S.F.F.

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\, cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\; cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$