EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Duração da prova: 120 minutos **1.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \, cis\, \theta)^n = \rho^n \, cis\,(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$ $\quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$ $\quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$ $\quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

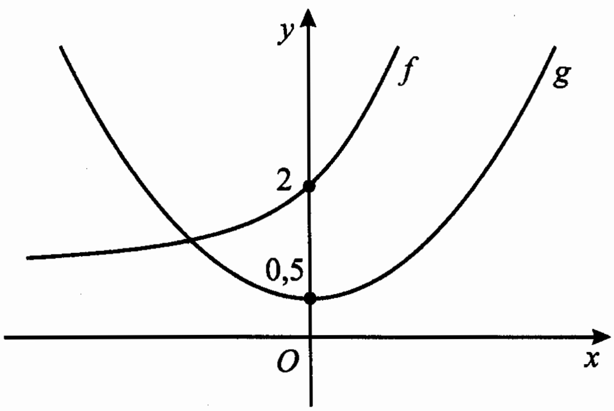
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $\quad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos de duas funções, f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.
Tal como a figura sugere,
- nenhum dos gráficos intersecta o eixo Ox;
- os gráficos de g e de f intersectam o eixo Oy nos pontos de ordenadas $0{,}5$ e 2, respectivamente.



Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?

(A) $f(x) + g(x) = 0$

(B) $f(x) - g(x) = 0$

(C) $f(x) \times g(x) = 1$

(D) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

2. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \dfrac{e^x + 5}{2 + \cos x}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$

Indique o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n)$

(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1

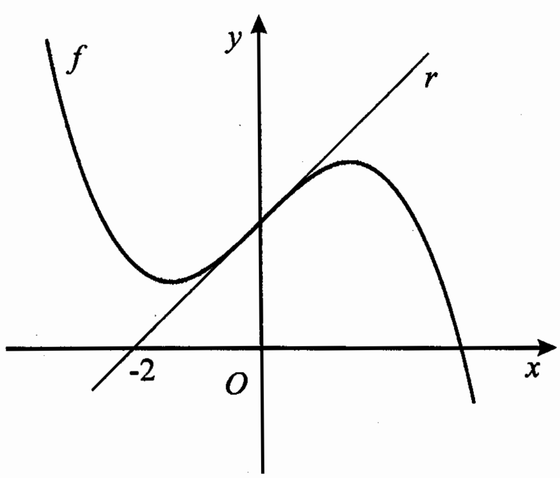
3. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2} \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Qual das seguintes expressões pode também definir h ?

(A) $\sqrt{x}$ **(B)** $\dfrac{x}{2}$ **(C)** $\dfrac{x}{4}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f.
Tal como a figura sugere, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e voltada para baixo em $[0, +\infty[$.



A recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2.

Sabendo que f' e f'' designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de f, indique o valor de $f(0) + f'(0) + f''(0)$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

5. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que $P(A) = 0{,}3$

Apenas um dos acontecimentos seguintes pode ter probabilidade inferior a $0{,}3$.

Qual deles?

(A) $A \cup B$ **(B)** $\overline{A} \cup B$ **(C)** $A \cap B$ **(D)** $\overline{A \cap B}$

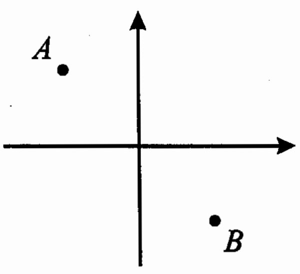
6. Uma variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\dfrac{{}^{2005}C_{99}}{{}^{2006}C_{100}}$	$\dfrac{a}{{}^{2006}C_{100}}$

Indique o valor de a.

(A) ${}^{2005}C_{99}$ **(B)** ${}^{2005}C_{100}$ **(C)** ${}^{2006}C_{99}$ **(D)** ${}^{2006}C_{100}$

7. Os pontos A e B, representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo z.



Qual dos números complexos seguintes pode ser z?

(A) 1 **(B)** i **(C)** -1 **(D)** $-i$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{4 + 2i\left(cis\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i}$, apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

1.2. Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$,

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \qquad \wedge \qquad \frac{3\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$$

e determine a sua **área**.

2.

2.1. Uma coluna com a forma de um prisma hexagonal regular está assente no chão de um jardim. Dispomos de seis cores (amarelo, branco, castanho, dourado, encarnado e verde) para pintar as sete faces visíveis (as seis faces laterais e a base superior) desse prisma.
Admita que se pintam de verde duas faces laterais opostas.
Determine de quantas maneiras diferentes podem ficar pintadas as restantes **cinco** faces, de tal modo

- que duas faces que tenham uma aresta comum fiquem pintadas com cores diferentes
- e que duas faces laterais que sejam opostas fiquem pintadas com a mesma cor.

2.2. Considere um prisma hexagonal regular num referencial o.n. $Oxyz$, de tal forma que uma das suas bases está contida no plano de equação $z = 2$.
Escolhendo ao acaso dois vértices do prisma, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta paralela ao eixo Oz? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

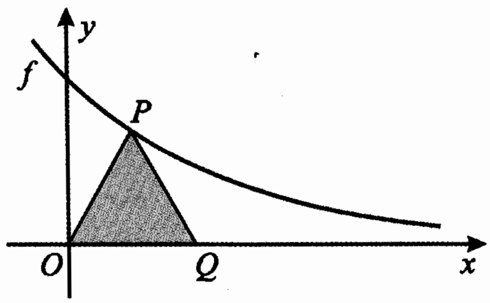
3. De uma caixa com dez bolas brancas e algumas bolas pretas, extraem-se sucessivamente, e ao acaso, duas bolas, não repondo a primeira bola extraída, antes de retirar a segunda.
Considere os acontecimentos:
A: «*a primeira bola extraída é preta*»;
B: «*a segunda bola extraída é branca*».

Sabe-se que $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ($P(B|A)$ designa probabilidade de B, se A)

Quantas bolas pretas estão inicialmente na caixa? Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita.

4. Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$
- um triângulo **isósceles** $[OPQ]$ $\left(\overline{PO} = \overline{PQ}\right)$, em que:
  - O é a origem do referencial;
  - P é um ponto do gráfico de f;
  - Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.

O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.

Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$.

4.1. Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x) = x\,e^{-x}$

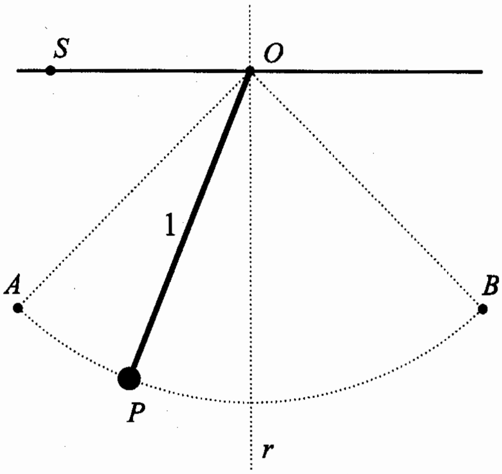
4.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir.

5. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é contínua;
- a recta de equação $y = x$ é assimptota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$.

Mostre que o gráfico da função g, definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x\,f(x)$, não tem qualquer assimptota.

6. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O.



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à recta vertical r.

A recta r passa pelo ponto O e é perpendicular à recta OS.

No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A.

Admita que, t segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos\left(\sqrt{9{,}8}\ t\right)$$

Nas duas alíneas seguintes, **não utilize a calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

6.1. Determine a distância do centro da esfera à recta OS, no instante inicial.

6.2. Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na recta r. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

7. Considere a função f definida no intervalo $[1,2]$ por $f(x) = \cos(x-1) + \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b, a função g, definida no intervalo $[1,2]$ por $g(x) = a\,.\,f(x) + b$, tem por contradomínio o intervalo $[4,5]$.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b, arredondados às centésimas.
Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos. Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I		**63**
Cada resposta certa	9	
Cada resposta errada	0	
Cada questão não respondida ou anulada	0	
Grupo II		**137**
1.	21	
1.1.	10	
1.2.	11	
2.	20	
2.1.	10	
2.2.	10	
3.	12	
4.	28	
4.1.	14	
4.2.	14	
5.	14	
6.	28	
6.1.	14	
6.2.	14	
7.	14	
TOTAL		**200**