

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**  
**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**  
**Cursos Gerais**

Duração da prova: 120 minutos  
 2006

2.ª FASE

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA**

---

**COTAÇÕES**

<b>Grupo I</b> .....	<b>63</b>
Cada resposta certa .....	9
Cada resposta errada .....	0
Cada questão não respondida ou anulada .....	0
 <b>Grupo II</b> .....	 <b>137</b>
1. ....	21
1.1. ....	12
1.2. ....	9
2. ....	28
2.1. ....	14
2.2. ....	14
3. ....	42
3.1. ....	14
3.2. ....	28
3.2.1.....	14
3.2.2.....	14
4. ....	14
5. ....	18
5.1. ....	9
5.2. ....	9
6. ....	14
 <b>TOTAL</b> .....	 <b>200</b>

## CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

### Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	D	A	C	A	D	A
Versão 2	B	C	A	B	D	D	C

### Grupo II

#### Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.
2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.
3. As cotações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.
4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
  - Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
  - Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8 e 9 destes critérios gerais, e das desvalorizações previstas nos pontos 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.
5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.
- 6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
- 6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.  
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.  
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
  - erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
  - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
  - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.
- 6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.
- 6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
- 6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
- 6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.
7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.
9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a cotação total a atribuir ao item deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.
11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ..... -2 pontos

## Critérios específicos

1.1. .... 12

Escrever  $z_1$  na forma algébrica .....6

$\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = i$  .....2

Restantes cálculos .....4

Calcular  $\frac{z_1}{z_2}$  .....6

Escrever  $z_1$  na forma trigonométrica .....2

Efectuar a divisão na forma trigonométrica .....4

1.2. .... 9

Representar o triângulo  $[AOB]$  no plano complexo (ver nota 1) .....3

Escrever  $z$  na forma  $x + yi$  ..... 6

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{2}$  ..... 3

$z = \sqrt{3} + i$  (ver nota 2) ..... 3

ou

Aplicar o Teorema de Pitágoras para concluir que  $x = \sqrt{3}$  ..... 3

$z = \sqrt{3} + i$  (ver nota 2) ..... 3

ou

$z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$  ..... 4

$z = \sqrt{3} + i$  (ver nota 2) ..... 2

**Notas:**

1. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Representação correcta ..... 3

Triângulo  $[OAB]$  com

- o vértice  $A$  no primeiro quadrante,
  - o vértice  $B$  no quarto quadrante,
  - $A$  e  $B$  simétricos relativamente ao eixo real,
- mas onde  $\overline{AB}$  é manifestamente diferente de  $\overline{OA}$  e de  $\overline{OB}$ , e não existe qualquer referência à igualdade dos lados ..... 2

Triângulo  $[OAB]$  com

- o vértice  $A$  no primeiro quadrante,
  - o vértice  $B$  no quarto quadrante,
- mas onde  $A$  e  $B$  não são simétricos relativamente ao eixo real, e não existe qualquer referência que evidencie a simetria ..... 1

Outras situações ..... 0

2. Se o examinando apresentar a parte real de  $z$  na forma de um valor aproximado, em vez do valor exacto  $\sqrt{3}$ , a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1. .... 14

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$  ..... 3

Concluir que a recta de equação  $x = 1$  é assíntota do gráfico de  $f$  ..... 3

Referir que, pelo facto de  $f$  ser contínua em todo o seu domínio, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais ..... 3

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ..... 3

$\frac{f(x)}{x} = 1 + \ln(x - 1)$  ..... 2

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(x - 1)] = +\infty$  ..... 1

Concluir que não existem assíntotas não verticais do gráfico de  $f$  ..... 2

**Nota:**

Se o examinando tentar verificar a existência de assíntotas não verticais quando  $x \rightarrow -\infty$ , a cotação a atribuir a esta questão deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se, em consequência desta desvalorização, a cotação resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

2.2. .... 14

$f'(x) = 1 + \ln(x - 1) + x \times \frac{1}{x - 1}$  (ver nota 1) ..... 4

Determinar  $f'(2)$  ..... 1

Determinar  $f(2)$  ..... 1

Escrever uma equação da recta  $r$  ..... 2

Determinar a abcissa do ponto  $P$  ..... 3

Determinar a área do trapézio (ver nota 2) ..... 3

**Notas:**

1. Se o examinando evidenciar a intenção de determinar  $f'(x)$ , a cotação mínima a atribuir a esta etapa deverá ser de 1 ponto.
2. Se o examinando não apresentar o resultado na forma de fracção irredutível, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

**3.1. .... 14**

Concluir que  $\pi$  é maximizante de  $d$  (ver nota)..... 3  
 Determinar a distância máxima (152,1) ..... 4  
 Concluir que 0 é minimizante de  $d$  (ver nota) ..... 3  
 Determinar a distância mínima (147,1)..... 4

ou

$-1 \leq \cos x \leq 1$  ..... 3  
 $0,0167 \geq -0,0167 \cos x \geq -0,0167$  ..... 3  
 $1,0167 \geq 1 - 0,0167 \cos x \geq 0,9833$  ..... 3  
 $152,1 \geq 149,6(1 - 0,0167 \cos x) \geq 147,1$  ..... 3  
 Conclusão ..... 2

**Nota:**

Não se exige que o examinando utilize a relação entre zeros/sinal da derivada e extremos/monotonia da função. O examinando pode obter o maximizante e o minimizante por observação directa da figura do enunciado.

**3.2.1. .... 14**

Mostrar que, para  $x = \pi$ , se tem  $t = \frac{T}{2}$  ..... 8

Substituir  $x$  por  $\pi$  ..... 1  
 Obter a igualdade  $\frac{2\pi t}{T} = \pi$  ..... 3  
 Mostrar que  $\frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$  ..... 4

Interpretar o resultado ..... 6

A cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Interpretação correcta (exemplo: «O tempo que decorre entre a passagem da Terra pelo periélio e o instante em que a Terra atinge o ponto mais afastado da sua órbita, relativamente ao Sol, é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.») ..... 6

Interpretação mal redigida, mas onde existe evidência de o examinando ter compreendido a situação (exemplos: «Quando o  $x = \pi$ , demora-se metade dos dias a fazer uma volta completa de órbita.»; «Quando  $x = \pi$  percorre-se metade da distância, demorando-se metade do tempo.») ..... 3

Outras situações (exemplo: «O tempo para se chegar ao periélio é metade do tempo que demora a alcançar o Sol.») ..... 0

Determinar o número de dias que decorrem entre 4 de Janeiro e 14 de Fevereiro (ver nota 1) .....	2
Escrever a equação $\frac{2\pi \times 41}{365,24} = x - 0,0167 \text{ sen } x$ .....	3
Resolver a equação .....	6
Explicação do método utilizado (ver nota 2) .....	3
Valor de $x$ (ver nota 3) .....	3
Determinar a distância pedida .....	3
Substituir $x$ pelo valor encontrado, na expressão $149,6 (1 - 0,0167 \cos x)$ .....	2
Resultado correctamente arredondado .....	1

**Notas:**

1. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:
 

Número de dias correcto (41) .....	2
Número de dias igual a 40 ou a 42 .....	1
Outras situações .....	0
  
2. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:
 

Apresentação do gráfico da função definida por $x - 0,0167 \text{ sen } x$ , com respeito pelo domínio desta função, $[0, 2\pi[$ , e da recta de equação $y = \frac{2\pi \times 41}{365,24}$ , bem como do ponto de intersecção e respectiva abcissa (ou apresentação do gráfico da função definida por $x - 0,0167 \text{ sen } x - \frac{2\pi \times 41}{365,24}$ e respectivo zero) .....	3
Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência da abcissa do ponto de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função não respeita o seu domínio) .....	1 ou 2
Outras situações .....	0
  
3. A cotação a atribuir à solução da equação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:
 

Solução no intervalo $[0,7162; 0,7163]$ .....	3
Solução não pertencente ao intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0,71; 0,72]$ .....	2
Solução não pertencente ao intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0,70; 0,73]$ .....	1
Outras situações .....	0

A demonstração envolve os seguintes pontos:

- referir a continuidade de  $g$
- justificar correctamente que  $g(0) < 0$  ( $g(0) = -f(1)$  e  $f(1) > 0$ )
- justificar correctamente que  $g(1) > 0$  ( $g(1) = f(1)$  e  $f(1) > 0$ )
- evocar o Teorema de Bolzano para concluir que  $\exists c \in ]0, 1[ : g(c) = 0$
- referir que  $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = f(c + 1)$

A cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:

O examinando explicita os cinco pontos de uma forma clara e encadeada, demonstrando assim o pretendido .....	14
O examinando explicita os cinco pontos, mas não o faz de uma forma clara e encadeada .....	10
O examinando explicita quatro pontos .....	8
O examinando explicita três pontos .....	6
O examinando explicita dois pontos .....	4
O examinando explicita um ponto .....	2

**5.1. .... 9**

Expressão que dá a probabilidade (ver notas 1 e 2)..... 8

Resultado na forma de fracção irreductível (ver nota 3)..... 1

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir. As respostas apresentadas têm todas a forma de fracção. O examinando pode, no entanto, apresentar expressões equivalentes na forma de um produto de fracções.

1.º caso: Fracções com denominador  ${}^{23}C_2$  e com numerador igual a:

$4 \times 9 + {}^{10}C_2$ (ou equivalente) .....	8
$10 \times 9 + 4 \times 9$ (ou equivalente) .....	6
$4 \times 9$ (ou equivalente) .....	4
${}^{10}C_2$ (ou equivalente) .....	4
${}^{13}C_2 + {}^{10}C_2$ (ou equivalente) .....	4
Outras situações .....	2

2.º caso: Fracções com denominador  $23 \times 22$  e numerador igual a:

$2 \times 4 \times 9 + {}^{10}A_2$ (ou equivalente) .....	8
$4 \times 9 + 10 \times 9$ (ou equivalente) .....	6
$4 \times 9 \times 2$ (ou equivalente) .....	4
${}^{10}A_2$ (ou equivalente) .....	4
$4 \times 9$ (ou equivalente) .....	3
Outras situações .....	2

3.º caso: Fracções com denominador  $23^2$  e numerador igual a:

$2 \times 4 \times 9 + 10^2$ (ou equivalente) .....	2
Outras situações .....	0

4.º caso: Fracções com outros denominadores ..... 0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Referir que existem 9 alunos com sete anos, dos quais 2 são rapazes ..... 7

Concluir que a probabilidade pedida é  $\frac{2}{9}$  .....2

2.º Processo:

Referir que  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$  (ver nota 1) .....2

Concluir que  $P(B|A) = \frac{\frac{2}{23}}{\frac{9}{23}}$  (ver nota 2) ..... 6

Concluir que a probabilidade pedida é  $\frac{2}{9}$  .....1

**Notas:**

1. Se a fórmula apresentada pelo examinando estiver incorrecta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à totalidade da resposta a este item.
2. Se o examinando, desrespeitando a instrução do enunciado, não explicitar os valores de  $P(B \cap A)$  e de  $P(A)$ , ou seja, se escrever  $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{9}$ , a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 3 pontos.

Explicar a rejeição das opções 1, 2 e 3 (ver notas 1 e 2) ..... 12

Concluir que a opção 4 é a correcta (ver nota 3) ..... 2

**Notas:**

1. Para cada uma das três opções que o examinando deve rejeitar, a cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

O examinando identifica a afirmação falsa, explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa, utilizando sempre uma linguagem matematicamente correcta ..... 4

O examinando identifica a afirmação falsa, explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa, mas nem sempre utiliza uma linguagem matematicamente correcta ..... 3

O examinando identifica a afirmação falsa, mas não explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa ..... 2

O examinando não identifica a afirmação falsa ..... 0

2. Para cada uma das três opções, indica-se o mínimo que se aceita como justificação correcta da falsidade da afirmação em causa.

**Opção 1:** A afirmação  $P(X \cup Y) < 1$  é falsa porque, como todos os alunos têm idade superior ou igual a 16 anos,  $X \cup Y$  é um acontecimento certo.

**Opção 2:** A afirmação  $P(X \cup Y) > P(X)$  é falsa porque, como todos os números múltiplos de 4 são pares,  $X \cup Y = X$ .

**Opção 3:** A afirmação  $P(X \cap Y) > 0$  é falsa porque, como não existem raparigas com 18 anos,  $X \cap Y = \emptyset$ .

3. A cotação relativa a esta etapa só deve ser atribuída se tiverem sido cotadas, com pelo menos 2 pontos, cada uma das três rejeições (da etapa anterior) ou se o examinando justificar convenientemente porque é que as três afirmações são verdadeiras, na opção 4.