Proposta de resolução do exame de Matemática A de 12º ano
cod 635
23 de Junho de 2009

Grupo I

Versão 1	
1.	A
2.	D
3.	B
4.	C
5.	D
6.	A
7.	C
8.	C

Versão 2	
1.	D
2.	A
3.	C
4.	B
5.	A
6.	D
7.	B
8.	B

Grupo II

1.

1.1.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i}{1-i} - i^{18} = \frac{i(1+i)}{1+1} - i^2 \\ &= \frac{i+i^2}{2} - (-1) = \frac{-1+i}{2} + 1 \\ &= \frac{i-1+2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Determinação de ρ:

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Determinação de θ:
Como $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{2}$ e $\mathrm{Im}(z_1) = \frac{1}{2}$, então o afixo de z_1 pertence ao primeiro quadrante.

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1,$$

logo $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Fazendo, por exemplo, $k = 0$, vem $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Obtemos então

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$$

1.2.

$$\begin{aligned}
(-iz_2)^n = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]^n = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)\right]^n = \mathrm{cis}\,\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^n = \mathrm{cis}\,\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{cis}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \mathrm{cis}\,\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad n = 3 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

O menor valor de n, natural, ocorre quando $k = 0$, originando $n = 3$.

2. ${}^7C_3 \times {}^4C_2 = 210$.

3.

3.1. A probabilidade de sairem duas cores diferentes poderá ser determinada da seguinte forma:

$$\frac{2 \times 10^2}{20 \times 19} = \frac{10}{19}.$$

3.2. A expressão $P[(B \cap C)|A]$ exprime a probabilidade de a segunda bola retirada ser amarela com número par, sabendo que na primeira extracção saiu bola verde. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, se estes forem todos equiprováveis. O número de casos possíveis é 19, pois das vinte bolas já retirámos uma, e assim, como não repomos a primeira bola, ficamos com 19 bolas no saco. O número de casos favoráveis é 5, pois corresponde ao número de bolas amarelas com número par que podem sair na segunda extracção (12, 14, 16, 18 ou 20).

Assim, pela regra de Laplace temos que a probabilidade pedida é $\frac{5}{19}$.

4. $D_f = \mathbb{R}^+$, $D_g = \mathbb{R}^+$.

Sabemos que

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = 0,$$

logo $y = 2x$ é a equação da recta assimptota oblíqua do gráfico de f.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} x = 2 + \infty = +\infty.$$

Não há assimptotas quando $x \to -\infty$ porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$. Assim o gráfico de g não tem assimptotas oblíquas.

5.

5.1 A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser soma de funções contínuas. Em particular, é contínua em $[0,1;0,3]$.

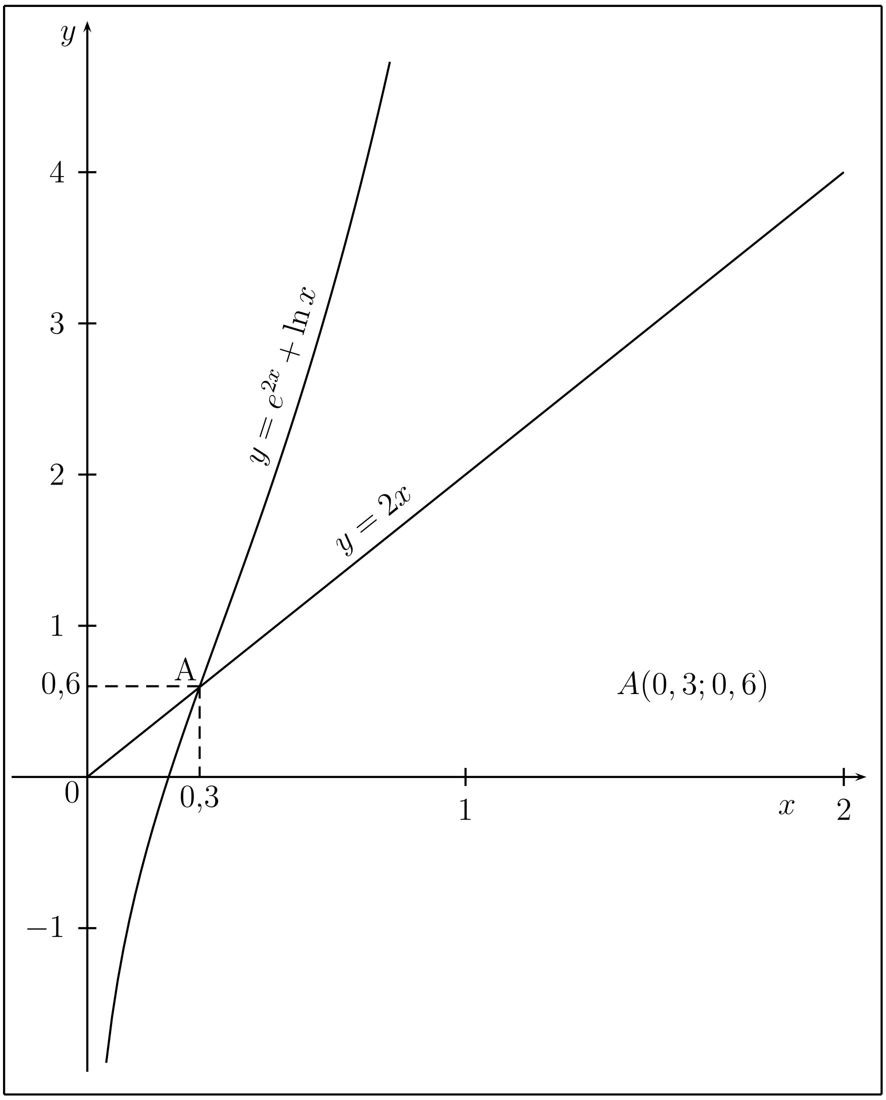
$g(0,1) = e^{0,2} + \ln 0,1 \approx -1,08 < 0$, e

$g(0,3) = e^{0,6} + \ln 0,3 \approx 0,62 > 0$.

Assim, $g(0,1) \times g(0,3) < 0$, e portanto, pelo corolário do Teorema de Bolzano,

$$\exists\, c \in]0,1;0,3[\ :\ g(c) = 0.$$

5.2. $g(x)=2x$, $x\in]0,2]$.



6.

$$D\ =\ ]1,+\infty[\ \cap\ ]-\infty,2[\ =\ ]1,2[$$

Para $x\in]1,2[$,

$$\begin{aligned}
\log_2(x-1)\geq 1+\log_2(2-x) &\Leftrightarrow \log_2(x-1)\geq \log_2 2+\log_2(2-x)\\
&\Leftrightarrow \log_2(x-1)\geq \log_2(2(2-x))\\
&\Leftrightarrow x-1\geq 4-2x\\
&\Leftrightarrow 3x\geq 5\\
&\Leftrightarrow x\geq \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

O sentido da desigualdade mantém-se ao desembaraçar de logaritmos porque a base é maior do que 1, e portanto a função logaritmica é crescente.

Tendo em conta o domínio encontrado, o conjunto solução é $\left[\frac{5}{3}, 2\right[$.

7.

7.1.

$$\lim_{t\to+\infty}(2te^{-0,3t}) = 2\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{0,3t}} = \frac{2}{0,3}\lim_{t\to+\infty}\frac{0,3t}{e^{0,3t}} = \frac{2}{0,3}\times 0 = 0.$$

Este limite é um dos limites notáveis, o que fica claro se se fizer $x = 0,3t$.

Com o passar do tempo, a concentração do medicamento no sangue tende para zero, ou seja, o medicamento tende a desaparecer do sangue.

7.2.

$$C'(t) = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = (2-0,6t)e^{-0,3t},\ t \geq 0.$$

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t} = 0 \vee t = \frac{10}{3}.$$

Como $e^{-0,3t} = 0$ é impossível, então $t = \frac{10}{3}$.

t	0		10/3	$+\infty$
$C'(t)$	2	+	0	−
$C(t)$	0	$\nearrow$	max.	$\searrow$

$\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$, ou seja, 10/3 horas são 3 horas e 20 minutos.

Resposta: A concentração máxima ocorreu 3 horas e 20 minutos depois da primeira administração, isto é, às 12 horas e 20 minutos.