EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Curso Científico-Humanístico
de Artes Visuais

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**
2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 10.

A prova inclui um formulário (pág. 11).

Em todas as questões da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar de forma inequívoca a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

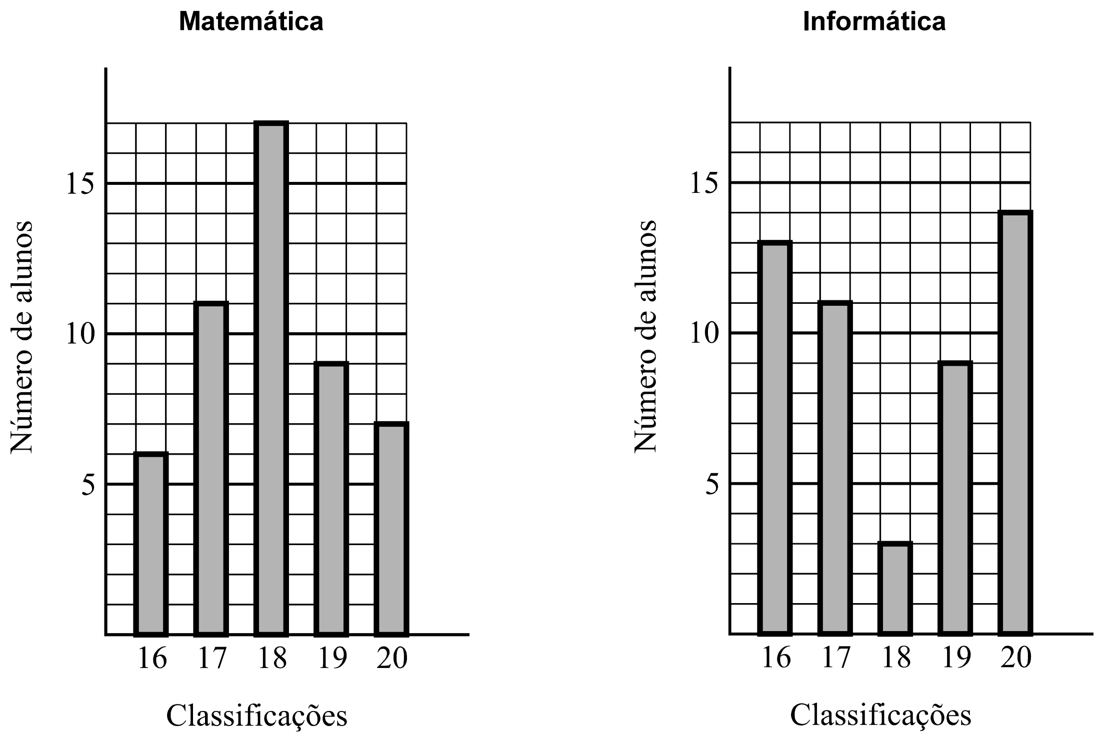
Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. Num certo concelho do nosso país, uma empresa de informática vai facultar um estágio, durante as férias do Verão, aos alunos do 11.º ano, das escolas desse concelho, que tenham obtido classificação final superior a 15 valores, quer a Matemática, quer a Informática.
As classificações finais nas disciplinas de Matemática e de Informática obtidas pelos 50 alunos desse concelho que satisfaziam as condições requeridas foram tratadas estatisticamente.
Desse tratamento resultaram os gráficos apresentados a seguir.



1.1. Depois de ter calculado, para cada uma das disciplinas, a média e o desvio padrão das classificações, a Ângela comentou: «As médias das classificações a Matemática e a Informática são iguais, mas o mesmo não se passa com os desvios padrão».

1.1.1. Conclua que a Ângela tem razão na sua afirmação, calculando, para cada uma das disciplinas, a média e o desvio padrão das classificações.

1.1.2. O Pedro, que estava a tratar os dados em conjunto com a Ângela, comentou: «Quando me disseste que as médias eram iguais, eu, observando os gráficos, concluí logo que os desvios padrão eram diferentes».
Tendo em conta que o desvio padrão mede a variabilidade dos dados relativamente à média, explique como poderá o Pedro ter chegado àquela conclusão.

1.2. Sabe-se que, dos alunos que obtiveram 20 a Informática, metade obteve também 20 a Matemática.
A empresa vai sortear um prémio entre os alunos que obtiveram classificação igual ou superior a 19, na disciplina de Matemática.
Qual é a probabilidade de o prémio sair a um aluno que obteve 20 nas duas disciplinas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. A Ana e a Fátima têm de ler, para a disciplina de Português, um livro com 255 páginas numeradas, da página 1 (primeira página do livro) à página 255 (última página do livro).

2.1. As duas raparigas começam a ler o livro no mesmo dia, na página 1.
A Ana lê uma página no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, lê o dobro do número de páginas do dia anterior.
A Fátima lê três páginas no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, lê mais duas páginas do que no dia anterior.

2.1.1. Verifique que, ao fim de n dias, a Ana já leu $2^n - 1$ páginas e a Fátima já leu $n^2 + 2n$ páginas.

2.1.2. Admita que a Ana acaba de ler o livro no dia 18 de Abril. Em que dia acaba a Fátima de ler o livro? Justifique a sua resposta.

2.2. Escolhida, ao acaso, uma das 255 páginas numeradas do mesmo livro, qual é a probabilidade de o número dessa página ter, pelo menos, dois algarismos e começar por 2? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

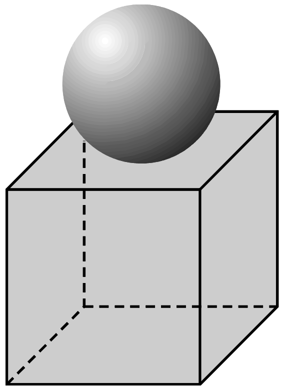
3. Admita que, em condições ambientais normais, o número aproximado de aves de uma certa população, t anos após um determinado instante inicial, é dado por

$$N(t) = \frac{125\,A}{A + (125 - A)\,e^{-0,2\,t}} \qquad (t \geq 0 \quad \text{e} \quad A \text{ constante positiva})$$

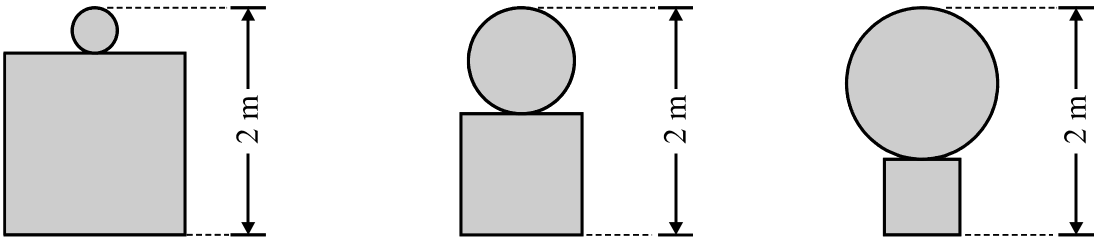
3.1. Verifique que A é o número de aves existentes no instante inicial.

3.2. Ao longo dos cinco anos que se seguiram ao instante inicial, a população cresceu em condições ambientais normais. Nasceram 80 aves e morreram 57, não tendo entrado nem saído mais aves da população.
Estime o número de aves que havia nessa população, no instante inicial, sabendo que esse número era inferior a 25.

4. Na figura, está representado um projecto de uma escultura em cimento para o jardim de uma escola, constituída por uma esfera colocada sobre um cubo.



Pretende-se que a escultura tenha uma altura total de 2 metros.
Apresentam-se, a seguir, as vistas de frente de três possíveis concretizações desse projecto.



4.1. Designemos por x o raio da esfera (em metros).

4.1.1. Indique, na forma de intervalo de números reais, o conjunto dos valores que a variável x pode assumir.

4.1.2. Mostre que o volume total, V, em metros cúbicos, da escultura é dado, em função de x, por

$$V(x) = \frac{4\pi - 24}{3}\, x^3 + 24\,x^2 - 24\,x + 8$$

4.1.3. Determine o raio da esfera e a aresta do cubo de modo que o volume total da escultura seja mínimo. Apresente os resultados em metros, arredondados às centésimas.

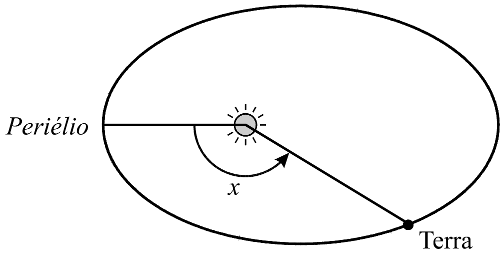
4.2. Admita agora que o raio da esfera é metade da aresta do cubo.

Pretende-se pintar toda a superfície da escultura, excepto, naturalmente, a face do cubo que está assente no chão.
Cada litro da tinta que vai ser utilizada permite pintar uma superfície de $2{,}5\,m^2$.

Admitindo que esta tinta só é vendida em latas de 1 litro, quantas latas será necessário comprar?

5. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos $(x \in [0, 2\pi[\,)$.

Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.

A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por

$$d = 149{,}6\ (1 - 0{,}0167\ \cos x)$$

5.1. Determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol.
Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

5.2. Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\ \operatorname{sen} x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa ($365{,}24$ dias).

5.2.1. Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.
Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

5.2.2. Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.
Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora.

6. Para estudar a Lei do Arrefecimento de um Corpo, a Joana aqueceu uma pequena quantidade de água. Em seguida, deixou-a a arrefecer, medindo a temperatura em vários instantes, a partir de um certo instante inicial.

De acordo com a referida lei, em cada instante, a taxa de variação da temperatura é directamente proporcional à diferença entre a temperatura da água, nesse instante, e a temperatura ambiente, que se considera constante.

Tem-se, portanto, que

$$T'(t) = k\,[\,T(t) - A\,]$$

em que:

- $T(t)$ designa a temperatura da água, no instante t;
- $T'(t)$ designa a taxa de variação da temperatura, nesse mesmo instante;
- A designa a temperatura ambiente;
- k é a constante de proporcionalidade.

Admita que, durante a experiência, o tempo foi medido em minutos e a temperatura em graus Celsius.
Na tabela seguinte, estão valores da temperatura da água, registados de $0{,}5$ em $0{,}5$ minutos, com início no instante $t = 2$.

t	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$
$T(t)$	$85{,}0$	$83{,}8$	$82{,}6$	$81{,}5$

Tendo em conta os dados desta tabela e sabendo que a temperatura ambiente, no local da experiência, era de 25 graus Celsius, estime o valor de k.
Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- *Determine a taxa de variação média da temperatura da água, nos intervalos* $[2\,;3{,}5]$, $[2\,;3]$ *e* $[2\,;2{,}5]$.
- *Tendo em conta os valores obtidos, estime a taxa de variação instantânea da temperatura da água, no instante* $t = 2$.
- *Tendo em conta a fórmula dada acima, estime o valor de* k.

FIM

COTAÇÕES

1. .... **25**

- **1.1.** 15
  - **1.1.1.** 8
  - **1.1.2.** 7
- **1.2.** 10

2. .... **32**

- **2.1.** 22
  - **2.1.1.** 12
  - **2.1.2.** 10
- **2.2.** 10

3. .... **30**

- **3.1.** 15
- **3.2.** 15

4. .... **43**

- **4.1.** 30
  - **4.1.1.** 5
  - **4.1.2.** 15
  - **4.1.3.** 10
- **4.2.** 13

5. .... **45**

- **5.1.** 15
- **5.2.** 30
  - **5.2.1.** 15
  - **5.2.2.** 15

6. .... **25**

TOTAL **200**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ – *raio da base*; g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r$ – *raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $(r$ – *raio*$)$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$